Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
*cemc.uwaterloo.ca*

# *Concours Galois 2022*

## le mardi 12 avril 2022
**(Amérique du Nord et Amérique du Sud)**

## le mercredi 13 avril 2022
**(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)**

*Solutions*

1. (a) Le rapport de la contribution d'Alice à celle de Bello est de 3 : 8.
Cela signifie que pour chaque 3 \$ + 8 \$ = 11 \$ contribués, Bello en contribue 8 \$. Donc, Bello a contribué $\dfrac{8}{11}$ des coûts de démarrage de la nouvelle entreprise.
Si les coûts de démarrage de la nouvelle entreprise s'élevaient à 9240 \$, alors Bello a contribué $\dfrac{8}{11} \times 9240$ \$ $= 6720$ \$ aux coûts de démarrage.

(b) Dans la première année d'activité, Alice et Bello se sont partagés tous les profits réalisés par leur entreprise selon le même rapport que leurs contributions aux coûts de démarrage ; soit 3 : 8.
Cela signifie que pour chaque 3 \$+8 \$ = 11 \$ de profits réalisés pendant la première année, la part revenant à Alice était de 3 \$.
Soit $P$ \$ le profit total réalisé par l'entreprise pendant cette première année.
Étant donné que la part du profit revenant à Alice était de 1881 \$, alors $\dfrac{3}{11} \times P = 1881$ ou $P = \dfrac{1881 \times 11}{3}$, d'où $P = \dfrac{20\,691}{3} = 6897$.
Donc, l'entreprise a réalisé un profit total de 6897 \$ pendant cette première année.

(c) Dans la deuxième année d'activité, Alice et Bello ont décidé de partager tous les profits réalisés par leur entreprise cette année-là selon un rapport de $3 : (8 + x)$.
Cela signifie que pour chaque 3 \$ + $(8 + x)$ \$ = $(11 + x)$ \$ de profits réalisés pendant la deuxième année, la part revenant à Bello était de $(8 + x)$ \$.
Étant donné que la part du profit revenant à Bello était de 5440 \$ et que l'entreprise a réalisé un profit total de 6400 \$ cette année-là, alors $\dfrac{(8 + x)}{(11 + x)} \times 6400 = 5440$.
On résout l'équation pour obtenir

$$\begin{aligned}
\frac{(8+x)}{(11+x)} \times 6400 &= 5440 \\
6400(8+x) &= 5440(11+x) \\
20(8+x) &= 17(11+x) \quad \text{(on divise les deux membres par 320)} \\
160 + 20x &= 187 + 17x \\
3x &= 27
\end{aligned}$$

Donc, $x = 9$.

2. (a) La droite $D_1$ a pour équation $y = \frac{3}{2}x + k$ et pour pente $\frac{3}{2}$.
Puisque $D_2$ et $D_1$ sont perpendiculaires, alors la pente de $D_2$ est égale à $-\frac{2}{3}$.

(b) Puisque $D_1$ a pour équation $y = \frac{3}{2}x + k$, son ordonnée à l'origine est $k$.
La droite $D_2$ a la même ordonnée à l'origine que $D_1$ (soit $P(0, k)$).
Donc, $D_2$ a pour pente $-\frac{2}{3}$, une ordonnée à l'origine de $k$ et a donc pour équation $y = -\frac{2}{3}x + k$.
Puisque $D_2$ coupe l'axe des ordonnées à $Q$, alors l'abscisse du point $Q$ est égale à l'abscisse à l'origine de $D_2$.
Pour obtenir l'abscisse à l'origine de cette droite, on pose $y = 0$ pour obtenir $0 = -\frac{2}{3}x + k$ ou $\frac{2}{3}x = k$, d'où $x = \frac{3k}{2}$.
L'abscisse du point $Q$, exprimée en fonction de $k$, est égale à $\frac{3k}{2}$.

(c) D'après la partie (b), les coordonnées de $P$ sont $(0, k)$ et les coordonnées de $Q$ sont $\left(\frac{3k}{2}, 0\right)$.

Pour représenter l'aire du triangle $PQR$ à l'aide d'une expression, il faut d'abord déterminer les coordonnées du point $R$.

$D_3$ est parallèle à $D_1$ et a donc une pente de $\frac{3}{2}$ et a pour équation $y = \frac{3}{2}x + b$, $b$ étant l'ordonnée à l'origine.

La droite $D_3$ passe par le point $Q\left(\frac{3k}{2}, 0\right)$. Donc, $0 = \frac{3}{2}\left(\frac{3k}{2}\right) + b$ ou $b = -\frac{9k}{4}$.

Donc, $D_3$ a pour ordonnée à l'origine $-\frac{9k}{4}$ et donc $R$ a pour coordonnées $\left(0, -\frac{9k}{4}\right)$.

Soit $O(0,0)$ l'origine. Donc, l'aire du triangle $PQR$ est égale à $\frac{1}{2} \times PR \times OQ$, puisque la hauteur $OQ$ est perpendiculaire à la base $PR$.
Puisque $PR = k - \left(-\frac{9k}{4}\right) = \frac{13k}{4}$ et $OQ = \frac{3k}{2}$, alors l'aire du triangle $PQR$ est égale à $\frac{1}{2} \times \frac{13k}{4} \times \frac{3k}{2} = \frac{39k^2}{16}$.
L'aire du triangle $PQR$ est égale à 351, donc $\frac{39k^2}{16} = 351$ ou $k^2 = \frac{351 \times 16}{39}$, d'où $k^2 = 144$ ou $k = 12$ (puisque $k > 0$).

3. (a) Remarquons d'abord qu'un nombre est un carré parfait si l'exposant de chaque facteur premier dans sa factorisation première est pair. Inversement, la factorisation première de tout carré parfait contient des facteurs premiers ayant des exposants pairs.
La factorisation première du nombre 84 est $2^2 \times 3 \times 7$.
Pour que le produit $84 \times k = 2^2 \times 3 \times 7 \times k$ soit un carré parfait, $k$ doit au moins comprendre les facteurs premiers 3 et 7 (puisque chacun a un exposant impair), d'où $k$ doit donc admettre 21 comme diviseur.
Si $k = 3 \times 7$, alors $84 \times k$ est un carré parfait car

$$84 \times 3 \times 7 = 2^2 \times 3^2 \times 7^2 = (2 \times 3 \times 7) \times (2 \times 3 \times 7).$$

Donc, la plus petite valeur de l'entier strictement positif $k$ pour laquelle $84 \times k$ est un carré parfait est $k = 3 \times 7 = 21$.

(b) La factorisation première de 572 est $2^2 \times 11 \times 13$. Donc, $\ell$ doit au moins comprendre les facteurs premiers 11 et 13 (puisque chacun a un exposant impair).
Puisque $572 \times \ell$ est un carré parfait, alors tout facteur de $\ell$, y compris 11 et 13, doit être un carré parfait.
Autrement dit, $\ell$ est un nombre de la forme $11 \times 13 \times n^2$, $n$ étant un entier strictement positif, car

$$572 \times \ell = 572 \times 11 \times 13 \times n^2 = (2 \times 11 \times 13 \times n) \times (2 \times 11 \times 13 \times n).$$

Puisque $\ell = 11 \times 13 \times n^2 = 143n^2$ et $\ell < 6000$, alors $143n^2 < 6000$, d'où $n^2 < \frac{6000}{143} \approx 41{,}96$.
La plus grande valeur de l'entier strictement positif $n$ qui vérifie $n^2 \leq 41$ est $n = 6$.
Donc, la plus grande valeur possible de $\ell$ est $11 \times 13 \times 6^2 = 5148$.

(c) La factorisation première du nombre 525 000 est $2^3 \times 3 \times 5^5 \times 7$. Donc, si $525\,000 \times m$ est un carré parfait, alors $m$ doit au moins comprendre les facteurs premiers $2, 3, 5$ et $7$ (puisque chacun a un exposant impair).
Si $m$ comprend les facteurs premiers 2, 3, 5 et 7, alors $m$ est supérieur ou égal à $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$.
Donc, si $m$ est un entier strictement positif inférieur à 200, alors $525\,000 \times m$ ne peut être un carré parfait.

(d) Supposons que les trois puissances de 10 que l'on choisit de cette liste sont $10^a, 10^b$ et $10^c$, $a, b, c$ étant des entiers impairs strictement positifs de 1 à 99 tels que $a < b < c$.
Puisque $a < b$ et $a < c$, alors la somme de ces trois puissances, $S = 10^a + 10^b + 10^c$, peut

être facorisée pour que $S = 10^a(1 + 10^{b-a} + 10^{c-a})$.
Puisque $b - a$ est un entier strictement positif, alors $10^{b-a}$ est un entier pair strictement positif.
De même, $10^{c-a}$ est un entier pair strictement positif, d'où $1 + 10^{b-a} + 10^{c-a}$ est donc un entier impair strictement positif.
Donc, pour des entiers impairs strictement positifs $a, b, c$ et $d$,

$$S = 10^a(1 + 10^{b-a} + 10^{c-a}) = 10^a \times d = (2 \times 5)^a \times d = 2^a \times 5^a \times d$$

Puisque $d$ est un entier impair, alors 2 n'est pas un facteur premier de $d$. Donc, le facteur premier 2 parait un nombre impair de fois dans la factorisation première de $S$ (puisque $a$ est impair).
Donc, la somme de chaque choix de trois puissances de 10 différentes de cette liste n'est pas un carré parfait.

4. (a) *Solution 1*

Pour chaque chaine Bauman de longueur 5 dont la première lettre et la dernière lettre sont toutes deux $A$, les deuxième et quatrième lettres ne sont pas $A$.
Pour de telles chaines Bauman, soit la troisième lettre est $A$, soit elle n'est pas $A$.

1^er^ cas : La troisième lettre est $A$.
Dans ce cas, la chaine est de la forme $A\_\_A\_\_A$.
Il y a 4 choix pour la deuxième lettre ($B, C, D$ ou $E$) et 4 choix pour la quatrième lettre.
Il y a donc $4 \times 4 = 16$ chaines Bauman de cette forme.

2^e^ cas : La troisième lettre n'est pas $A$.
Dans ce cas, la chaine est de la forme $A\_\_x\_\_A$. Il y a 4 choix pour la troisième lettre $x$, soit $B, C, D$ ou $E$.
La deuxième lettre doit être différente de la troisième et ne doit pas être $A$, il y a donc 3 choix possibles pour la deuxième lettre.
De même, il y a 3 choix possibles pour la quatrième lettre, il y a donc $4 \times 3 \times 3 = 36$ telles chaines Bauman.

En tout, il y a $16 + 36 = 52$ chaines Bauman de longueur 5 dont la première lettre et la dernière lettre sont toutes deux $A$.

*Solution 2*

Pour chaque chaine Bauman de longueur 5 dont la première lettre et la dernière lettre sont toutes deux $A$, soit les deuxième et quatrième lettres sont pareilles, soit elles sont différentes.

1^er^ cas : Les deuxième et quatrième lettres sont pareilles.
Dans ce cas, la chaine est de la forme $Ax\_\_xA$.
Il y a 4 choix pour la deuxième lettre ($B, C, D$ ou $E$) et 1 choix pour la quatrième lettre puisqu'elle est pareille à la deuxième.
La troisième lettre doit être différente de la deuxième et de la quatrième (qui sont les mêmes) et il y a donc 4 choix pour la troisième lettre.
Donc, il y a $4 \times 1 \times 4 = 16$ chaines Bauman de cette forme.

2^e^ cas : Les deuxième et quatrième lettres sont différentes.
Dans ce cas, la chaine est de la forme $Ax\_\_yA$, $x$ et $y$ représentant des lettres différentes.
Il y a 4 choix pour la deuxième lettre ($B, C, D$ ou $E$) et 3 choix pour la quatrième lettre (cette lettre est différente de la deuxième lettre et n'est pas $A$).

La troisième lettre doit être différente de la deuxième et de la quatrième (qui sont différentes) et il y a donc 3 choix pour la troisième lettre.
Donc, il y a $4 \times 3 \times 3 = 36$ chaines Bauman de cette forme.

En tout, il y a $16 + 36 = 52$ chaines Bauman de longueur 5 dont la première lettre et la dernière lettre sont toutes deux $A$.

(b) *Solution 1*
On peut déterminer de manière indirecte le nombre de chaines Bauman de longueur 6 qui contiennent plus d'un $B$.
C'est-à-dire qu'on peut soustraire le nombre de chaines Bauman qui contiennent 0 $B$ et le nombre de chaines Bauman qui contiennent exactement 1 $B$ du nombre total de chaines Bauman de longueur 6.

Pour une chaine Bauman de longueur 6 (ayant aucune restriction), il y a 5 choix pour la première lettre et 4 choix pour chacune des lettres restantes. Il y a donc un total de $5 \times 4^5 = 5120$ chaines Bauman de cette forme.

Pour une chaine Bauman de longueur 6 qui contient 0 $B$, il y a 4 choix pour la première lettre et 3 choix pour chacune des lettres restantes. Il y a donc un total de $4 \times 3^5 = 972$ chaines Bauman de cette forme.

Ensuite, on compte le nombre de chaines Bauman qui contiennent exactement 1 $B$.
Si la première lettre de la chaine est un $B$, alors il y a 4 choix pour la deuxième lettre et 3 choix pour chacune des quatre lettres restantes.
De même, si la dernière lettre est un $B$, alors il y a 4 choix pour la lettre adjacente au $B$ et 3 choix pour chacune des quatre lettres restantes.
Donc, il y a $1 \times 4 \times 3^4 = 324$ chaines qui commencent par un $B$ et 324 chaines qui se terminent par un $B$.
Si la deuxième lettre de la chaine est un $B$, alors il y a 4 choix pour la première lettre, 4 choix pour la troisième lettre et 3 choix pour chacune des quatrième, cinquième et sixième lettres.
Il y a donc $4 \times 1 \times 4 \times 3^3 = 432$ chaines Bauman de cette forme.
De même, si la troisième, quatrième ou cinquième lettre de la chaine est un $B$, alors il y a 432 chaines Bauman de cette forme.

En tout, il y a $5120 - 972 - 2 \times 324 - 4 \times 432 = 1772$ chaines Bauman de longueur 6 qui contiennent plus d'un seul $B$.

*Solution 2*
Une chaine Bauman de longueur 6 ne peut pas contenir plus de 3 $B$ (avant de continuer, essayez de voir pourquoi).
On peut déterminer de manière directe le nombre de chaines Bauman de longueur 6 qui contiennent plus d'un $B$.
C'est-à-dire qu'on peut compter le nombre de chaines qui contiennent exactement 3 $B$ et le nombre de chaines qui contiennent exactement 2 $B$.
Donc, il y a deux cas à considérer.
<u>1^er^ cas</u> : La chaine Bauman contient exactement 3 $B$
Dans ce cas, la chaine peut être de l'une des formes suivantes :

$$B\_B\_B\_\ , \qquad B\_B\_\_B, \qquad B\_\_B\_B, \qquad \_B\_B\_B.$$

On compte d'abord le nombre de chaines de la forme $B\_B\_B\_$.
Il y a 4 choix pour la deuxième lettre ($A, C, D$ ou $E$), 4 choix pour la quatrième lettre et

4 choix pour la sixième lettre. Il y a donc $4^3 = 64$ chaines Bauman de cette forme.
De même, il y a $4^3 = 64$ chaines de la forme $\_B\_B\_B$.
Remarquons que $B\_B\_B\_$ et $\_B\_B\_B$ ont des formes identiques lorsque l'une est lue de gauche à droite et l'autre de droite à gauche.
Soient de tels couples de formes des formes *symétriques* et remarquons que, sous les mêmes restrictions, les formes symétriques ont un nombre égal de chaines Bauman.

Pour les chaines de la forme $B\_B\_\_B$, il y a 4 choix pour la deuxième lettre, 4 choix pour la quatrième lettre et 3 choix pour la cinquième lettre (puisque la cinquième lettre doit être différente de $B$ et différente de la quatrième lettre, qui n'est pas $B$). On a donc $4^2 \times 3 = 48$ chaines Bauman de cette forme.
Puisque $B\_\_B\_B$ est symétrique à $B\_B\_\_B$, alors il y a également $4^2 \times 3 = 48$ chaines de cette forme.
Donc, il y a $2 \times 64 + 2 \times 48 = 224$ chaines Bauman qui contiennent exactement 3 $B$.

2[e] cas : La chaine Bauman contient exactement 2 $B$
Dans ce cas, la chaine peut paraitre de dix formes possibles.
Huit d'entre elles paraissent sous l'une des formes dans les quatre couples symétriques suivants

$$B\_B\_\_\_ \text{ et } \_\_\_B\_B, \qquad B\_\_B\_\_ \text{ et } \_\_B\_\_B,$$

$$B\_\_\_B\_ \text{ et } \_B\_\_\_B, \qquad \_B\_B\_\_ \text{ et } \_\_B\_B\_$$

et les deux dernières formes (qui ne sont pas un couple symétrique) sont

$$B\_\_\_\_B \text{ et}$$

$$\_B\_\_B\_.$$

On compte d'abord le nombre de chaines de la forme $B\_B\_\_\_$.
Il y a 4 choix pour la deuxième lettre ($A, C, D$ ou $E$), 4 choix pour la quatrième lettre, 3 choix pour chacune des cinquième et sixième lettres. Il y a donc $4^2 \times 3^2 = 144$ chaines Bauman de cette forme.
De même, il y a $4^2 \times 3^2 = 144$ chaines pour chacune des cinq formes suivantes,
$\_\_\_B\_B, B\_\_B\_\_$, $\_\_B\_\_B$, $B\_\_\_B\_$, and $\_B\_\_\_B$.

Pour les chaines de la forme $\_B\_B\_\_$, il y a 4 choix pour la première lettre, 4 choix pour la troisième lettre, 4 choix pour la cinquième lettre et 3 choix pour la sixième lettre. Il y a donc $4^3 \times 3 = 192$ chaines Bauman de cette forme.
Puisque $\_\_B\_B\_$ et $\_B\_B\_\_$ sont symétriques, alors il y a également $4^3 \times 3 = 192$ chaines de cette forme.

Enfin, il y a $4 \times 3^3 = 108$ chaines de la forme $B\_\_\_\_B$ et $4^3 \times 3 = 192$ chaines de la forme $\_B\_\_B\_$.
Donc, il y a $6 \times 144 + 2 \times 192 + 108 + 192 = 1548$ chaines Bauman qui contiennent exactement 2 $B$.

En tout, il y a $224 + 1548 = 1772$ chaines Bauman de longueur 6 qui contiennent plus d'un seul $B$.

(c) *Solution 1*
Considérons toutes les chaines Bauman de longueur $n$ qui commencent par $C$.
Il y a 4 choix pour chacune des $n - 1$ lettres restantes. Il y a donc $4^{n-1}$ chaines Bauman

de cette forme.
Chacune de ces chaines se termine par $D$ ou ne se termine pas par $D$.
Soit $d_n$ les chaines qui se terminent par $D$ et soit $|d_n|$ le nombre de chaines de ce type.
De même, soit $x_n$ les chaines qui ne se terminent pas par $D$ et soit $|x_n|$ le nombre de chaines de ce type.
Par exemple, $d_1$ représente les chaines Bauman de longueur 1 qui commencent par $C$ et se terminent par $D$. Puisqu'il n'existe aucune chaine de ce type, alors $|d_1| = 0$.
De même, $x_1$ représente les chaines Bauman de longueur 1 qui commencent par $C$ et ne se terminent pas par $D$, d'où on a donc $|x_1| = 1$ (la chaine est $C$).
On peut vérifier que $4^{n-1} = |d_n| + |x_n|$ lorsque $n = 1$ puisque $4^{1-1} = |d_1| + |x_1| = 0 + 1$.
De plus, on sait que $|d_2| = 1$ (la chaine est $CD$) et $|x_2| = 3$ (les chaines sont $CA$, $CB$, $CE$) et on peut encore une fois vérifier que $4^{2-1} = 1 + 3$.

Considérons ensuite les chaines Bauman de longueur $n$ qui commencent par $C$ et ne se terminent pas par $D$, soit $x_n$.
Chacune de ces chaines pourrait se voir ajouter un $D$ à son extrémité pour former une chaine Bauman de longueur $n + 1$ qui commence par $C$ et se termine par $D$, soit $d_{n+1}$.
Puisque l'ajout d'un $D$ à la fin de chaque chaine $x_n$ donne toutes les chaines possibles $d_{n+1}$, alors $|d_{n+1}| = |x_n|$.
D'après notre travail précédent, on peut vérifier que $|d_2| = |x_1| = 1$.

De plus, $|x_{n+1}| = 4|d_n| + 3|x_n|$. Pourquoi est-ce vrai ?
Toute chaine Bauman de longueur $n + 1$ qui commence par $C$ et ne se termine pas par $D$, soit $x_{n+1}$, est soit une chaine $d_n$ à laquelle on a ajouté un $A$, un $B$, un $C$ ou un $E$ à sa fin, soit une chaine $x_n$ à laquelle on a ajouté un choix de 3 lettres à sa fin (la lettre ajoutée ne peut pas être $D$ et elle ne peut pas être la dernière lettre de $x_n$, ce qui laisse 3 possibilités).
Le nombre de chaines $d_n$ auxquelles on a ajouté $A$, $B$, $C$ ou $E$ à leur fin est égal à $4|d_n|$.
Le nombre de chaines $x_n$ auxquelles on a ajouté un choix de 3 lettres à leur fin est égal à $3|x_n|$.
Donc, on peut conclure que $|x_{n+1}| = 4|d_n| + 3|x_n|$.
D'après notre travail précédent, on peut vérifier que $|x_2| = 4|d_1| + 3|x_1| = 4(0) + 3(1) = 3$.

On utilise ces deux formules $|d_{n+1}| = |x_n|$ et $|x_{n+1}| = 4|d_n| + 3|x_n|$, qui sont équivalentes à $|d_n| = |x_{n-1}|$ et $|x_n| = 4|d_{n-1}| + 3|x_{n-1}|$, pour construire le tableau ci-dessous.

| $n$ | $\lvert d_n\rvert = \lvert x_{n-1}\rvert$ | $\lvert x_n\rvert = 4\lvert d_{n-1}\rvert + 3\lvert x_{n-1}\rvert$ |
|---|---|---|
| 1 | $\lvert d_1\rvert = 0$ | $\lvert x_1\rvert = 1$ |
| 2 | $\lvert d_2\rvert = 1$ | $\lvert x_2\rvert = 3$ |
| 3 | $\lvert d_3\rvert = \lvert x_2\rvert = 3$ | $\lvert x_3\rvert = 4\lvert d_2\rvert + 3\lvert x_2\rvert = 4(1) + 3(3) = 13$ |
| 4 | $\lvert d_4\rvert = \lvert x_3\rvert = 13$ | $\lvert x_4\rvert = 4\lvert d_3\rvert + 3\lvert x_3\rvert = 4(3) + 3(13) = 51$ |
| 5 | $\lvert d_5\rvert = 51$ | $\lvert x_5\rvert = 4(13) + 3(51) = 205$ |
| 6 | $\lvert d_6\rvert = 205$ | $\lvert x_6\rvert = 4(51) + 3(205) = 819$ |
| 7 | $\lvert d_7\rvert = 819$ | $\lvert x_7\rvert = 4(205) + 3(819) = 3277$ |
| 8 | $\lvert d_8\rvert = 3277$ | $\lvert x_8\rvert = 4(819) + 3(3277) = 13\,107$ |
| 9 | $\lvert d_9\rvert = 13\,107$ | $\lvert x_9\rvert = 4(3277) + 3(13\,107) = 52\,429$ |
| 10 | $\lvert d_{10}\rvert = 52\,429$ | non nécessaire |

Donc, il y a 52 429 chaines Bauman de longueur 10 dont la première lettre est $C$ et la dernière lettre est $D$.

*Solution 2*
Soit $S_n$ l'ensemble des chaines Bauman de longueur $n$ dont la première lettre est $C$ et la dernière lettre est $D$.
De plus, soit $|S_n|$ le nombre de chaines de cette forme.
Par exemple, $S_2 = \{CD\}$ d'où $|S_2| = 1$, et $S_3 = \{CAD, CBD, CED\}$ d'où $|S_3| = 3$.
Chaque chaine dans $S_{10}$ est de la forme $C\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,D$ ou $CT_8D$, $T_8$ étant une chaine Bauman de longueur 8 qui ne commence pas par $C$ et ne se termine pas par $D$.
Donc, $|S_{10}| = |T_8|$. Le nombre de telles chaines, $|T_8|$, est égal au

nombre total de chaines Bauman de longueur 8
$-$ nombre de chaines Bauman de longueur 8 qui commencent par $C$
$-$ nombre de chaines Bauman de longueur 8 qui se terminent par $D$
$+$ nombre de chaines Bauman de longueur 8 qui commencent par $C$ et se terminent par $D$

Remarquons que les chaines commençant par $C$ comprennent celles qui se terminent par $D$, ainsi que d'autres.
De même, les chaines qui se terminent par $D$ comprennent celles qui commencent par $C$, ainsi que d'autres.

Puisqu'on a soustrait du total le nombre de chaines qui commencent par $C$ et se terminent par $D$ deux fois, il faut ajouter ce nombre une fois.

Pour une chaine Bauman de longueur 8, il y a 5 choix pour la première lettre et 4 choix pour chacune des 7 lettres restantes.
Donc, il y a $5 \times 4^7$ chaines Bauman de longueur 8 en tout.
Pour une chaine Bauman de longueur 8 qui commence par $C$, il y a 1 choix pour la première lettre et 4 choix pour chacune des 7 lettres restantes.
Donc, il y a en tout $1 \times 4^7$ chaines Bauman de longueur 8 qui commencent par $C$.
De plus, il y a en tout $1 \times 4^7$ chaines Bauman de longueur 8 qui se terminent par $D$.
Le nombre de chaines Bauman de longueur 8 qui commencent par $C$ et se terminent par $D$ est égal à $|S_8|$.
Donc, on a

$$|S_{10}| = |T_8| = 5 \times 4^7 - 1 \times 4^7 - 1 \times 4^7 + |S_8| = 3 \times 4^7 + |S_8|$$

et donc le nombre de chaines Bauman de longueur 10 qui commencent par $C$ et se terminent par $D$ dépend du nombre de chaines Bauman de longueur 8 qui commencent par $C$ et se terminent par $D$.
À ce point-ci, on pourrait répéter le processus ci-dessus pour déterminer $|S_8|$, cependant, par souci d'efficacité, il faudrait plutôt généraliser le travail ci-dessus pour déterminer une formule pour $|S_n|$.

Pour les entiers $n \geq 3$, chaque chaine dans $S_n$ est de la forme $CT_{n-2}D$, $T_{n-2}$ étant une chaine Bauman de longueur $n-2$ qui ne commence pas par $C$ et ne se termine pas par $D$.
Le nombre de telles chaines, $|T_{n-2}|$, est égal au

  nombre total de chaines Bauman de longueur $n-2$
$-$ nombre de chaines Bauman de longueur $n-2$ qui commencent par $C$
$-$ nombre de chaines Bauman de longueur $n-2$ qui se terminent par $D$
$+$ nombre de chaines Bauman de longueur $n-2$ qui commencent par $C$ et se terminent par $D$

Pour une chaine Bauman de longueur $n-2$, il y a 5 choix pour la première lettre et 4 choix pour chacune des $n-3$ lettres restantes.
Donc, il y a $5 \times 4^{n-3}$ chaines Bauman de longueur $n-2$ en tout.
Pour une chaine Bauman de longueur $n-2$ qui commence par $C$, il y a 1 choix pour la première lettre et 4 choix pour chacune des $n-3$ lettres restantes.
Donc, il y a en tout $1 \times 4^{n-3}$ chaines Bauman de longueur $n-2$ qui commencent par $C$.
De plus, il y a en tout $1 \times 4^{n-3}$ chaines Bauman de longueur $n-2$ qui se terminent par $D$.
Le nombre de chaines Bauman de longueur $n-2$ qui commencent par $C$ et se terminent par $D$ est égal à $|S_{n-2}|$.
Donc, on a

$$|S_n| = |T_{n-2}| = 5\times4^{n-3}-1\times4^{n-3}-1\times4^{n-3}+|S_{n-2}| = 3\times4^{n-3}+|S_{n-2}|, \text{ pour les entiers } n \geq 3.$$

À l'aide de cette formule récursive et le fait que $|S_2| = 1$, on obtient

$$\begin{array}{lllllll}
|S_4| & = & 3 \times 4^{4-3} + |S_{4-2}| & = & 3 \times 4 + |S_2| & = & 13 \\
|S_6| & = & 3 \times 4^{6-3} + |S_{6-2}| & = & 3 \times 4^3 + |S_4| & = & 205 \\
|S_8| & = & 3 \times 4^{8-3} + |S_{8-2}| & = & 3 \times 4^5 + |S_6| & = & 3277 \\
|S_{10}| & = & 3 \times 4^{10-3} + |S_{10-2}| & = & 3 \times 4^7 + |S_8| & = & 52\,429
\end{array}$$

Donc, il y a 52 429 chaines Bauman de longueur 10 dont la première lettre est $C$ et la dernière lettre est $D$.