



Le CENTRE d'ÉDUCATION en  
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE  
*cemc.uwaterloo.ca*

# Concours Galois

(10<sup>e</sup> année – Sec. IV)

le mardi 12 avril 2022

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 13 avril 2022

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)



UNIVERSITY OF  
**WATERLOO**

Durée : 75 minutes

©2022 University of Waterloo

*Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.*

Nombre de questions : 4

Chaque question vaut 10 points.

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci :



- Chacune vaut 2 ou 3 points.
- Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
- **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.

2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci :



- Elles valent le reste des 10 points attribués à la question.
- La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
- Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
- Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.



**ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.**

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple,  $\pi + 1$  et  $1 - \sqrt{2}$  sont des nombres exacts simplifiés.

*Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.*

*Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, et leur niveau scolaire, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au [cemc.uwaterloo.ca](http://cemc.uwaterloo.ca). Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.*

NOTE :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de  , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de  , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent être présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par  $y = x^3 - x$ , mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
7. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Fryer, Galois ou Hypatie.

1. Alice et Bello ont contribué aux coûts de démarrage d'une nouvelle entreprise. Le rapport de la contribution d'Alice à celle de Bello est de 3 : 8.



(a) Si les coûts de démarrage de la nouvelle entreprise s'élevaient à 9240 \$, quel est le montant de la contribution de Bello aux coûts de démarrage ?



(b) Dans la première année d'activité, Alice et Bello se sont partagés tous les profits réalisés par leur entreprise selon le même rapport que leurs contributions aux coûts de démarrage ; soit 3 : 8. Étant donné que la part du profit revenant à Alice était de 1881 \$, quel est le profit total réalisé par l'entreprise pendant cette première année ?



(c) Dans la deuxième année, Alice et Bello ont décidé de partager tous les profits réalisés par leur entreprise cette année-là selon un rapport de 3 : (8 +  $x$ ). Si l'entreprise a réalisé un profit total de 6400 \$ lors de sa deuxième année d'activité et que la part de ce profit revenant à Bello était de 5440 \$, déterminer la valeur de  $x$ .

2. Dans la figure ci-dessous, la droite  $D_1$  a pour équation  $y = \frac{3}{2}x + k$ , où  $k > 0$ , et coupe l'axe des ordonnées en  $P$ . On trace une deuxième droite,  $D_2$ , passant par  $P$  de manière qu'elle soit perpendiculaire à  $D_1$  et qu'elle coupe l'axe des abscisses en  $Q$ . On trace une troisième droite,  $D_3$ , passant par  $Q$  de manière qu'elle soit parallèle à  $D_1$  et qu'elle coupe l'axe des ordonnées en  $R$ .



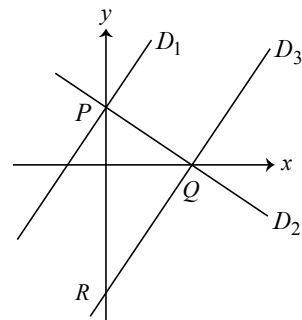
(a) Quelle est la pente de  $D_2$  ?



(b) Exprimer l'abscisse du point  $Q$  en fonction de  $k$ .



(c) Sachant que le triangle  $PQR$  a une aire de 351, déterminer la valeur de  $k$ .



3. La *factorisation première* du nombre 324 est  $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$  or  $2^2 \times 3^4$ . Or, 324 est un carré parfait, car on peut l'écrire sous la forme  $(2 \times 3^2) \times (2 \times 3^2)$ .  
La factorisation première de 63 est  $3^2 \times 7$ . Donc, 63 n'est pas un carré parfait, mais  $63 \times 7$  est un carré parfait, car  $63 \times 7 = 3^2 \times 7^2 = (3 \times 7) \times (3 \times 7)$ .



(a) Le produit  $84 \times k$  est un carré parfait. Sachant que  $k$  est un entier strictement positif, quelle est la plus petite valeur possible de  $k$  ?



(b) Le produit  $572 \times \ell$  est un carré parfait. Sachant que  $\ell$  est un entier strictement positif inférieur à 6000, quelle est la plus grande valeur possible de  $\ell$  ?



(c) Démontrer que si  $m$  est un entier strictement positif inférieur à 200, alors  $525\,000 \times m$  ne peut être un carré parfait.



(d) La liste  $10, 10^3, 10^5, \dots, 10^{99}$  contient les cinquante puissances de 10, dont les exposants sont des entiers impairs, comprises entre  $10^1$  et  $10^{99}$  inclus. Démontrer que la somme de chaque choix de trois puissances de 10 différentes de cette liste n'est pas un carré parfait.

4. Une *chaîne Bauman* est une chaîne de lettres qui satisfait aux deux conditions suivantes :

- Chaque lettre de la chaîne est  $A, B, C, D$  ou  $E$ .
- La chaîne ne peut contenir un couple de lettres adjacentes qui soient identiques.

Par exemple,  $AECD$  et  $BDCEC$  sont, respectivement, des chaînes Bauman de longueur 4 et 5, tandis que  $ABBC$  et  $DAEEE$  ne sont pas des chaînes Bauman.



(a) Combien y a-t-il de chaînes Bauman de longueur 5 dont la première lettre et la dernière lettre sont toutes deux  $A$  ?



(b) Déterminer le nombre de chaînes Bauman de longueur 6 qui contiennent plus d'un seul  $B$ .



(c) Déterminer le nombre de chaînes Bauman de longueur 10 dont la première lettre est  $C$  et la dernière lettre est  $D$ .



Le CENTRE d'ÉDUCATION en  
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE  
*cemc.uwaterloo.ca*

*Pour les élèves...*

Merci d'avoir participé au concours Galois de 2022! Chaque année, plus de 260 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire ou au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2022.

Visitez notre site Web au [cemc.uwaterloo.ca](http://cemc.uwaterloo.ca) pour :

- des copies gratuites des concours précédents
- des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
- des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

*Pour les enseignants...*

Visitez notre site Web au [cemc.uwaterloo.ca](http://cemc.uwaterloo.ca) pour :

- obtenir des renseignements au sujet des concours de 2022/2023
- inscrire vos élèves aux Concours canadiens de mathématiques de niveau intermédiaire et supérieur qui auront lieu en novembre
- jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11<sup>e</sup> et 12<sup>e</sup> année
- vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
- vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
- vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
- trouver les résultats de vos élèves dans les concours