



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fryer

(9^e année – Sec. III)

le mardi 12 avril 2022

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 13 avril 2022

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)



UNIVERSITY OF
WATERLOO

Durée : 75 minutes

©2022 University of Waterloo

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 4

Chaque question vaut 10 points.

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci :



- Chacune vaut 2 ou 3 points.
- Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
- **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.

2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci :



- Elles valent le reste des 10 points attribués à la question.
- La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
- Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
- Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, et leur niveau scolaire, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca. Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

NOTE :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent être présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
7. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Fryer, Galois ou Hypatie.

1. Dans un jeu, un joueur lance une balle vers une cible. S'il atteint la cible, 7 points sont ajoutés à son pointage. S'il rate la cible, 3 points sont soustraits de son pointage. Un joueur commencera toujours avec un pointage de 0 et il est possible pour un joueur d'avoir un pointage négatif.



(a) Quel est le pointage de Sébastien après 6 lancers s'il en réussit 4 mais en rate 2 ?

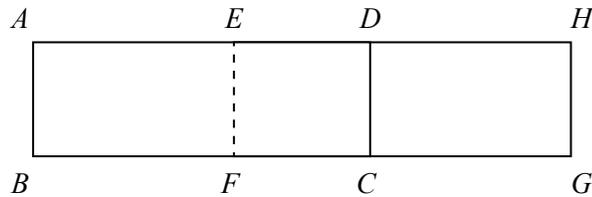


(b) Après exactement h lancers réussis et 6 lancers ratés, Suzanne a 59 points. Quelle est la valeur de h ?

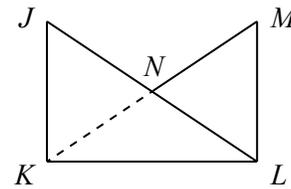


(c) Après exactement 20 lancers, le pointage de Souresh est supérieur à 85 et inférieur à 105. Si exactement m de ces lancers sont ratés, déterminer toutes les valeurs possibles de l'entier strictement positif m .

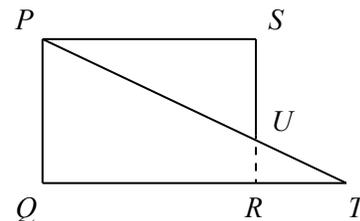
2.  (a) Deux rectangles identiques, $ABCD$ et $EFGH$, ayant chacun une aire de 13 cm^2 , se chevauchent comme dans la figure ci-dessous. La région où les deux rectangles se chevauchent, soit le rectangle $EFCD$, a une aire de 5 cm^2 . Quelle est l'aire du rectangle $ABGH$?



-  (b) Deux triangles rectangles identiques, JKL et MLK , se chevauchent le long du côté KL , comme dans la figure ci-contre. Les côtés JL et MK se coupent en N . L'aire de la région où les deux triangles se chevauchent, soit le triangle KLN , est égale à la moitié de l'aire du triangle JKL . La figure $JKLMN$ a une aire de 48 cm^2 . Si $JK = 6 \text{ cm}$, déterminer la longueur de KL .



-  (c) Le rectangle $PQRS$ et le triangle PQT se chevauchent de manière que R soit situé sur QT et que RS coupe PT en U , comme dans la figure ci-contre. Le rectangle $PQRS$ a une aire de 108 cm^2 tandis que le triangle PQT a une aire de 81 cm^2 . Si la figure $PQTUS$ a une aire de 117 cm^2 , déterminer l'aire de la région où le rectangle et le triangle se chevauchent, soit la région $PQRU$.



3. Si un entier n est écrit sous la forme d'un produit de nombres premiers, on peut utiliser ce produit (soit sa *factorisation première*) pour déterminer le nombre de diviseurs positifs de n . Par exemple, la factorisation première de $28 = 2 \times 2 \times 7 = 2^2 \times 7^1$. Les diviseurs positifs de 28 sont :

$$28 = 2^2 \times 7^1 \quad 14 = 2^1 \times 7^1 \quad 7 = 2^0 \times 7^1 \quad 4 = 2^2 \times 7^0 \quad 2 = 2^1 \times 7^0 \quad 1 = 2^0 \times 7^0$$

Chaque diviseur positif comprend 0, 1 ou 2 facteurs 2, 0 ou 1 facteur 7, et aucun autre nombre premier. Puisqu'il y a 3 choix pour le nombre de facteurs 2 et 2 choix pour le nombre de facteurs 7, alors 28 admet $3 \times 2 = 6$ diviseurs positifs.

-  (a) Combien de diviseurs positifs le nombre 675 admet-il ?
-  (b) Un entier strictement positif n admet 9, 11, 15, 25 et exactement quatorze autres entiers comme diviseurs positifs. Déterminer la valeur de n .
-  (c) Déterminer le nombre d'entiers strictement positifs inférieurs à 500 qui admettent 2, 9 et exactement dix autres entiers comme diviseurs positifs.

4. François et Sarah jouent quatre parties d'un jeu. Voici les règles du jeu :
- (R1) Le jeu commence avec deux bocaux, chacun d'entre eux pouvant contenir des haricots.
 - (R2) François joue en premier, Sarah en deuxième, et les deux joueurs continuent à jouer à tour de rôle.
 - (R3) À chaque tour, le joueur retire un nombre prédéterminé de haricots de l'un des bocaux. Si aucun des bocaux ne contient assez de haricots, le joueur ne peut pas jouer son tour et perd. Si un seul bocal contient suffisamment de haricots, le joueur doit retirer les haricots de ce bocal. Si les deux bocaux contiennent suffisamment de haricots, le joueur choisit l'un des bocaux et retire les haricots de ce bocal.
 - (R4) François doit tenter de retirer 1 haricot à son premier tour, 3 haricots à son deuxième tour et 4 haricots à son troisième tour. Par la suite, à chaque série de trois tours qu'il joue, François doit continuer à essayer de retirer 1, 3 et 4 haricots dans cet ordre.
 - (R5) Sarah doit essayer de retirer 2 haricots à son premier tour et 5 haricots à son deuxième tour. Par la suite, à chaque série de deux tours qu'elle joue, Sarah doit continuer à essayer de retirer 2 et 5 haricots dans cet ordre.
 - (R6) Un joueur est déclaré vainqueur si l'autre joueur perd de la manière décrite dans (R3).

Par exemple, si le jeu commence avec 10 haricots dans un bocal et 10 haricots dans l'autre bocal, le jeu pourrait se dérouler de la manière suivante :

Numéro du tour	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de haricots retirés par François	1		3		4		1
Nombre de haricots retirés par Sarah		2		5		2	
Nombre de haricots restant dans les bocaux	10, 9	10, 7	7, 7	7, 2	3, 2	1, 2	0, 2

Au tour suivant, Sarah ne peut pas retirer 5 haricots puisque le plus grand nombre de haricots restant dans l'un ou l'autre des bocaux est 2. Ainsi, après exactement 7 tours, Sarah perd et François gagne.



(a) Au début de la première partie, il y a 40 haricots dans un bocal et 0 haricot dans l'autre bocal. Après un total de 10 tours (François et Sarah jouent chacun 5 tours), quel est le nombre total de haricots restant dans les deux bocaux ?



(b) Au début de la deuxième partie, il y a 384 haricots dans un bocal et 0 haricot dans l'autre bocal. Après exactement n tours, la partie se termine et l'un des joueurs est déclaré vainqueur. Quelle est la valeur de n ?



(c) Au début de la troisième partie, il y a 17 haricots dans un bocal et 6 haricots dans l'autre bocal. Il existe une *stratégie gagnante* que l'un des joueurs peut employer pour garantir une victoire. Déterminer lequel des joueurs a une stratégie gagnante et décrire cette stratégie. (Une *stratégie gagnante* est une méthode que peut employer un joueur en choisissant un bocal à chaque tour pour garantir une victoire, quels que soient les choix de l'autre joueur.)



(d) Au début de la quatrième partie, il y a 2023 haricots dans un bocal et 2022 haricots dans l'autre bocal. Déterminer lequel des joueurs a une stratégie gagnante et décrire cette stratégie.



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Fryer de 2022! Chaque année, plus de 260 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire ou au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2022.

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- des copies gratuites des concours précédents
- des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
- des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- obtenir des renseignements au sujet des concours de 2022/2023
- inscrire vos élèves aux Concours canadiens de mathématiques de niveau intermédiaire et supérieur qui auront lieu en novembre
- jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11^e et 12^e année
- vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
- vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
- vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
- trouver les résultats de vos élèves dans les concours