Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat 2022

(11^{e} année – Secondaire V)

le mercredi 23 février 2022

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 24 février 2022

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On a : $6 + (3 \times 6) - 12 = 6 + 18 - 12 = 12$.

Réponse : (C)

2. *Solution 1*

Puisque les deux nombres ont une moyenne de 7, alors ils ont une somme de $2 \times 7 = 14$.
Puisque l'un des nombres est 5, l'autre est donc $14 - 5 = 9$.

Solution 2

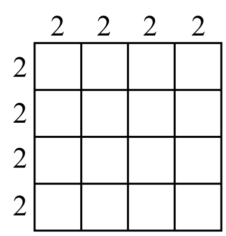
Deux nombres ont une moyenne de 7 et l'un d'eux est 5.
Puisque 5 est 2 de moins que 7, alors l'autre nombre doit être 2 de plus que 7, soit 9.

Réponse : (E)

3. Entre le jour où elle parcourt 500 m et le jour où elle parcourt 4500 m, Gauravi augmente sa distance parcourue de $(4500 \text{ m}) - (500 \text{ m}) = 4000 \text{ m}$.
À chaque jour, Gauravi augmente sa distance parcourue de 500 m par rapport au jour précédent.
Donc, il lui faut $\dfrac{4000 \text{ m}}{500 \text{ m}} = 8$ jours pour passer de 500 m à 4500 m.
Si l'on compte huit jours après lundi (soit 1 semaine et 1 jour), on arrive à mardi. Donc, Gauravi parcourra exactement 4500 m un mardi.

Réponse : (C)

4. On peut disposer 4 rangées de 4 carrés chacune (ces derniers ayant des côtés de longueur 2) les unes à côté des autres pour former un grand carré ayant des côtés de longueur 8.



On peut donc placer $4 \cdot 4 = 16$ carrés de cette manière. Puisque ces petits carrés recouvrent complètement le grand carré, il est impossible d'utiliser plus de carrés de dimensions 2×2. Donc, 16 est le plus grand nombre possible de carrés de dimensions 2×2 que l'on peut placer, sans chevauchement, à l'intérieur du grand carré de dimensions 8×8.

Réponse : (C)

5. Puisque la liste comprend 15 entiers, alors la probabilité pour qu'on choisisse un entier qui parait cinq fois dans la liste est égale à $\frac{1}{3}$ (car $\frac{1}{3} \cdot 15 = 5$).
Puisque l'entier 5 parait cinq fois dans la liste et qu'aucun autre entier ne parait cinq fois, alors $n = 5$.

Réponse : (E)

6. Supposons que le triangle PQR a pour base PQ (soit le segment de droite vertical situé sur la droite d'équation $x = 2$) et une hauteur correspondant à la distance horizontale entre R et PQ.
Le segment de droite reliant $P(2, 6)$ et $Q(2, 2)$ a une longueur de 4.
Le point $R(8, 5)$ est situé 6 unités à droite de la droite d'équation $x = 2$.
Donc, l'aire du triangle PQR est égale à $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12$.

Réponse : (D)

7. On a : $(1+2+3)(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}) = 6(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}) = 6+\frac{6}{2}+\frac{6}{3} = 6+3+2 = 11$.

RÉPONSE : (B)

8. Puisque $10x+y=75$ et $10y+x=57$, alors

$$(10x+y)+(10y+x) = 75+57$$

d'où

$$11x+11y = 132$$

On divise les deux membres de l'équation par 11 pour obtenir $x+y=12$.
(Par ailleurs, on aurait pu remarquer que $(x,y)=(7,5)$ est un couple qui vérifie les deux équations, d'où on a donc $x+y=12$.)

RÉPONSE : (A)

9. Puisque Pascale met 7 jours pour creuser 4 trous et que $\frac{21}{7}=3$, alors elle creusera $3 \cdot 4 = 12$ trous en 21 jours.

Puisque Miguel met 2 jours pour creuser 2 trous et que $\frac{21}{3}=7$, alors il creusera $7 \cdot 2 = 14$ trous en 21 jours.

En tout, ils creuseront $12+14=26$ trous en 21 jours.

RÉPONSE : (D)

10. En manipulant algébriquement le membre de gauche, on obtient :

$$2^{11}\times 6^5 = 2^{11}\times(2\times 3)^5 = 2^{11}\times 2^5\times 3^5 = 2^{16}\times 3^5$$

Puisque $4^x\times 3^y = 2^{16}\times 3^5$ et que x et y sont des entiers strictement positifs, alors $y=5$ (car 4^x n'admet pas 3 comme diviseur).
Cela signifie également que $4^x = 2^{16}$.
Puisque $4^x=(2^2)^x=2^{2x}$, alors $4^x=2^{16}$ donne $2^{2x}=2^{16}$, d'où $2x=16$ ou $x=8$.
Donc, $x+y=8+5=13$.

RÉPONSE : (D)

11. Les lettres A, B, C, D et E représentent respectivement André, Bev, Cao, Dhruv et Elcim.
Soit $D>B$ la représentation du fait que « Dhruv est plus âgé que Bev ».
D'après l'énoncé du problème, on a donc $D>B$, $B>E$, $A>E$, $B>A$ et $C>B$. On voit donc que Dhruv et Cao sont plus âgés que Bev tandis qu'Elcim et André sont plus jeunes qu'elle.
Cela signifie que deux personnes sont plus âgées que Bev tandis que deux personnes sont plus jeunes qu'elle. Donc, Bev est la troisième plus âgée.

RÉPONSE : (B)

12. Puisque d est un entier impair, alors $d+d$ est pair et $d\times d$ est impair.
Puisque e est un entier pair, alors $e+e$ est pair, ce qui signifie que $(e+e)\times d$ est pair.
De plus, $e+d$ est impair, ce qui signifie que $d\times(e+d)$ est impair.
Donc, parmi les 4 expressions, 2 sont égales à un entier impair.

RÉPONSE : (C)

13. Supposons que les côtés les plus courts des petits rectangles ont une mesure de x.
Donc, le rectangle de la Figure A a une hauteur de $2x$. Cela signifie que les côtés les plus longs des petits rectangles ont une mesure de $2x$.
Donc, le rectangle de la Figure A a une hauteur de $2x$, une largeur de $2x + x = 3x$ et a donc un périmètre de $2(3x + 2x) = 10x$. De plus, le rectangle de la Figure B a une hauteur de $2x$, une largeur de $x + 2x + x = 4x$ et a donc un périmètre de $2(4x + 2x) = 12x$.

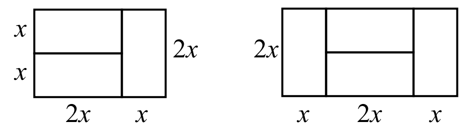


Figure A Figure B

Donc, le rapport du périmètre de la Figure A au périmètre de la Figure B est égal à $10x : 12x$, ce qui est égal à $5 : 6$, puisque $x \neq 0$.

RÉPONSE : (E)

14. Zebadiah doit retirer au moins 3 chemises.
S'il retire 3 chemises, 2 d'entre elles pourraient être rouges et 1 pourrait être bleue.
S'il retire 4 chemises, 2 d'entre elles pourraient être rouges et 2 pourraient être bleues.
Par conséquent, s'il retire moins de 5 chemises, il n'est pas certain qu'il puisse retirer 3 chemises de la même couleur ou 3 chemises de couleurs différentes.
Supposons qu'il retire 5 chemises. Si 3 sont de la même couleur, les conditions sont remplies.
S'il n'y a pas 3 chemises de la même couleur parmi les 5 chemises, alors on a au plus 2 de chaque couleur (par exemple, 2 chemises rouges, 2 chemises bleues et 1 chemise verte). Cela signifie qu'il doit retirer des chemises de 3 couleurs, car s'il ne retirait que des chemises de 2 couleurs, il retirerait au plus $2 + 2 = 4$ chemises.
Autrement dit, en retirant 5 chemises, il est garanti d'obtenir soit 3 chemises de la même couleur, soit 3 chemises de couleurs différentes.
Donc, Zebediah doit retirer au moins 5 chemises.

RÉPONSE : (D)

15. Si a est impair, la sortie $a + 3$ est paire car elle est égale à la somme de deux entiers impairs.
Si a est pair, la sortie $a + 5$ est impaire car elle est égale à la somme d'un entier pair et d'un entier impair.
Si on présente $a = 15$ comme entrée initiale et qu'on utilise la machine 2 fois, on obtient $15 \to 15 + 3 = 18 \to 18 + 5 = 23$.
Si on présente 23 comme entrée suivante et qu'on utilise la machine 2 fois, on obtient $23 \to 23 + 3 = 26 \to 26 + 5 = 31$.
On remarque que si l'on présente un entier impair comme entrée et qu'on utilise la machine 2 fois, le résultat net est 8 de plus que l'entrée initiale ; l'entrée initiale impaire produit une première sortie qui est 3 de plus que l'entrée initiale (et qui est donc paire) et produit une seconde sortie qui est 5 de plus que la première sortie.
Le résultat net est donc $3 + 5$ de plus que l'entrée initiale.
Donc, en utilisant la machine 46 fois de plus, on répète ces deux étapes à 23 reprises. Puisque 8 est le résultat net de 2 étapes, alors on multiplie 8 par 23 (soit le nombre de fois qu'on répète les 2 étapes) et on ajoute ce produit à 31 pour obtenir la sortie : $31 + 23 \cdot 8 = 215$.
Jusque-là, on a utilisé la machine 50 fois.
En utilisant la machine une 51^e fois, on obtient $215 \to 215 + 3 = 218$. Donc, on obtient une sortie finale de 218.

RÉPONSE : (B)

16. Puisqu'on obtient un reste de 6 lorsqu'on divise 111 par n, alors $111 - 6 = 105$ est un multiple de n et $n > 6$ (puisque, par définition, le reste doit être inférieur au diviseur).
Puisque $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, les diviseurs positifs de 105 sont $1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105$.
Donc, les valeurs possible de n sont 7, 15, 21, 35, 105. Il y a donc 5 valeurs possibles de n.
Réponse : (A)

17. Supposons que la canette avait initialement un rayon de r cm et une hauteur de h cm.
Puisque la canette a une aire totale de 300 cm^2, alors $2\pi r^2 + 2\pi rh = 300$.
Si l'on double le rayon initial, on obtient un rayon de $2r$ cm. On peut donc représenter l'aire totale de cette canette, en cm^2, par l'expression $2\pi(2r)^2 + 2\pi(2r)h$ ou $8\pi r^2 + 4\pi rh$. On a donc $8\pi r^2 + 4\pi rh = 900$.
Si l'on double la hauteur initiale, on obtient une hauteur de $2h$ cm. On peut donc représenter l'aire totale de cette nouvelle canette, en cm^2, par l'expression $2\pi r^2 + 2\pi r(2h)$ ou $2\pi r^2 + 4\pi rh$.
On multiplie $2\pi r^2 + 2\pi rh = 300$ par 3 pour obtenir $6\pi r^2 + 6\pi rh = 900$.
Puisque $8\pi r^2 + 4\pi rh = 900$, on obtient $6\pi r^2 + 6\pi rh = 8\pi r^2 + 4\pi rh$, alors $2\pi rh = 2\pi r^2$ d'où $\pi rh = \pi r^2$.
Puisque $2\pi r^2 + 2\pi rh = 300$ et $\pi rh = \pi r^2$, alors $2\pi r^2 + 2\pi r^2 = 300$, d'où $4\pi r^2 = 300$ ou $\pi r^2 = 75$.
Puisque $\pi rh = \pi r^2 = 75$, alors $2\pi r^2 + 4\pi rh = 6 \cdot 75 = 450$. Donc, si l'on doublait la hauteur de la canette, son aire totale serait égale à 450 cm^2.
Réponse : (A)

18. Soit A le point de départ d'Arianne, B le point de départ de Béatrice et M leur point de rencontre.
Arianne parcourt la distance entre A et M en 42 minutes et celle entre M et B en 28 minutes.
(Remarquons que 9 h est 18 minutes après 8 h 42 et que 9 h 10 est 10 minutes après 9 h.)
Puisque Arianne marche à une vitesse constante, alors le rapport entre la distance AM et la distance MB est égal au rapport des temps de parcours, soit 42 : 28, ce qui est équivalent à 3 : 2.
Puisque Béatrice parcourt la distance entre B et M en 42 minutes, le rapport entre la distance AM et la distance MB est égal à 3 : 2. Puisque Béatrice marche à une vitesse constante, alors il lui faut $\frac{3}{2} \times 42 = 63$ minutes pour parcourir la distance entre M et A.
Donc, Béatrice arrive au point de départ d'Arianne à 9 h 45.
(Remarquons que 9 h est 18 minutes après 8 h 42 et que 9 h 45 est 45 minutes après 9 h.)
Réponse : (D)

19. Puisque le triangle PQR est rectangle en R, alors d'après le théorème de Pythagore,

$$PQ^2 = PR^2 + QR^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400$$

Puisque $PQ > 0$, alors $PQ = 20$.
Puisque M est le milieu de PQ, alors $MQ = \frac{1}{2}PQ = 10$.
Les triangles NMQ et PRQ sont semblables, puisqu'ils sont rectangles et qu'il partagent un angle aigu Q.
Donc, $\dfrac{NQ}{PQ} = \dfrac{MQ}{RQ}$, alors $\dfrac{NQ}{20} = \dfrac{10}{16}$, d'où $NQ = \dfrac{20 \cdot 10}{16} = \dfrac{25}{2}$.
Donc, $RN = RQ - NQ = 16 - \dfrac{25}{2} = \dfrac{32}{2} - \dfrac{25}{2} = \dfrac{7}{2}$.
Puisque le triangle PNR est rectangle en R, son aire est égale à $\dfrac{1}{2} \cdot PR \cdot RN = \dfrac{1}{2} \cdot 12 \cdot \dfrac{7}{2} = 21$.
Réponse : (A)

20. On remarque que

$$t_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \approx 0{,}67$$

$$t_1 + t_2 = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12} \approx 0{,}92$$

$$\begin{aligned} t_1 + t_2 + t_3 &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = 1{,}05 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_1 + t_2 + t_3 + t_4 &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \approx 1{,}13 \end{aligned}$$

Cela signifie que la somme des k premiers termes est inférieure à 1,499 lorsque $k = 1, 2, 3, 4$.
Lorsque $k > 4$, on peut prolonger la régularité que l'on a constaté pour $k = 3$ et $k = 4$ afin de remarquer que

$$\begin{aligned} t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_{k-1} + t_k &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots \\ &\qquad + \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right) + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \cdots - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \\ &= 1{,}500 - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \end{aligned}$$

Cela signifie que la somme des k premiers termes est inférieure à 1,499 uniquement lorsque $\dfrac{1}{k+1} + \dfrac{1}{k+2}$ est supérieur à 0,001.
Au fur et à mesure que k augmente à partir de 4, $\dfrac{1}{k+1}$ et $\dfrac{1}{k+2}$ diminuent tous deux, ce qui signifie que leur somme diminue également.
Lorsque $k = 1998$, $\dfrac{1}{k+1} + \dfrac{1}{k+2} = \dfrac{1}{1999} + \dfrac{1}{2000} > \dfrac{1}{2000} + \dfrac{1}{2000} = \dfrac{1}{1000} = 0{,}001$.
Lorsque $k = 1999$, $\dfrac{1}{k+1} + \dfrac{1}{k+2} = \dfrac{1}{2000} + \dfrac{1}{2001} < \dfrac{1}{2000} + \dfrac{1}{2000} = \dfrac{1}{1000} = 0{,}001$.
Cela signifie que $\dfrac{1}{k+1} + \dfrac{1}{k+2}$ est supérieur à 0,001 uniquement lorsque $k \leq 1998$, et inférieur à 0,001 lorsque $k \geq 1999$.

Autrement dit, la somme des k premiers termes est inférieure à 1,499 lorsque $k = 1, 2, 3, 4$ et lorsque $5 \leq k \leq 1998$. C'est-à-dire lorsque $1 \leq k \leq 1998$.
Donc, $k = 1998$ est le plus grand entier strictement positif pour lequel les k premiers termes ont une somme inférieure à 1,499.

Réponse : (E)

21. La masse totale des 6 barres d'acier dans les sacs est supérieure ou égale à $1+2+3+4+5+6 = 21$ kg et inférieure ou égale à $10+11+12+13+14+15 = 75$ kg car les 15 barres d'acier ont les masses suivantes : 1 kg, 2 kg, 3 kg, ..., 14 kg, 15 kg.
Puisque les six barres d'acier sont placées dans trois sacs de manière que les sacs contiennent chacun la même masse totale, alors la masse totale contenue dans chacun des sacs est supérieure ou égale à $21 \div 3 = 7$ kg et inférieure ou égale à $75 \div 3 = 25$ kg.
Il existe $25 - 7 + 1 = 19$ masses qui sont des nombres entiers dans cet intervalle (soit 7 kg, 8 kg, 9 kg, ..., 23 kg, 24 kg, 25 kg).
Chacune de ces 19 masses est en effet possible. Pour le voir, on remarque que

$$1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4 = 7 \qquad 1 + 7 = 2 + 6 = 3 + 5 = 8 \qquad 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 9$$

d'où on voit donc que 7, 8 et 9 sont des valeurs possibles de M.
Si l'on augmente les valeurs les plus grandes jusqu'à 15, 14, 13, on obtient

$$1 + 15 = 2 + 14 = 3 + 13 = 16$$

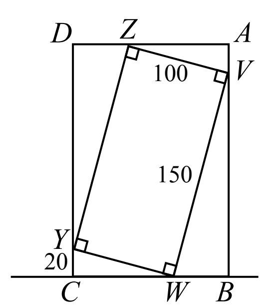
d'où l'on comprend donc que chacun des entiers de 10 à 16 est également une valeur possible de M. À partir des trois derniers couples, on augmente les valeurs les plus petites pour obtenir :

$$2+15 = 3+14 = 4+13 = 17 \qquad 3+15 = 4+14 = 5+13 = 18 \quad \cdots \quad 10+15 = 11+14 = 12+13 = 25$$

On voit donc que 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24 et 25 sont également des valeurs possibles de M.
Donc, toute valeur entière de M dans l'intervalle $7 \leq M \leq 25$ est possible.
Il y a donc 19 valeurs possibles de M.

Réponse : 19

22. On trace un rectangle plus grand autour du rectangle de l'énoncé de sorte que le grand rectangle ait des côtés horizontaux et verticaux et que les sommets du petit rectangle soient situés sur les côtés du grand rectangle.
Par souci de simplicité, les unités seront omises de nos calculs.



Puisque $VWYZ$ est un rectangle, alors $YW = ZV = 100$ et $ZY = VW = 150$.
Puisque le triangle YCW est rectangle en C, alors d'après le théorème de Pythagore,

$$CW^2 = YW^2 - YC^2 = 100^2 - 20^2 = 10\,000 - 400 = 9600$$

Puisque $CW > 0$, alors $CW = \sqrt{9600} = \sqrt{1600 \cdot 6} = \sqrt{1600} \cdot \sqrt{6} = 40\sqrt{6}$.
La hauteur à laquelle le sommet Z est situé au-dessus de la droite horizontale est égale à la longueur de DC, ce qui est égal à $DY + YC$ ou $DY + 20$.
Le triangle ZDY est rectangle en D tandis que le triangle YCW est rectangle en C.
De plus, $\angle DYZ + \angle ZYW + \angle WYC = 180°$, ce qui signifie que $\angle DYZ + \angle WYC = 90°$, puisque $\angle ZYW = 90°$.
Puisqu'on a également $\angle CWY + \angle WYC = 90°$ (en utilisant la somme des mesures des angles du triangle YCW), on obtient $\angle DYZ = \angle CWY$. On voit donc que les triangles ZDY et YCW sont semblables.
Donc, $\dfrac{DY}{ZY} = \dfrac{CW}{YW}$, d'où $DY = \dfrac{ZY \cdot CW}{YW} = \dfrac{150 \cdot 40\sqrt{6}}{100} = 60\sqrt{6}$.
On a donc $DC = DY + 20 = 60\sqrt{6} + 20 \approx 166{,}97$. À l'entier près, on a $DC = 167$.
Puisque $DC = 167$ et que cette longueur est égale à $100 + x$, alors $x = 67$.

Réponse : 67

23. Soit k un entier strictement positif fixe mais inconnu.
Supposons que les droites d'équations $9x + 4y = 600$ et $kx - 4y = 24$ se coupent en (x, y), x et y étant des entiers strictement positifs.
Puisque $9x + 4y = 600$ et $kx - 4y = 24$, on additionne ces équations, membre par membre, pour obtenir $9x + kx = 624$, d'où $(9 + k)x = 624$.
Puisque x et y sont des entiers strictement positifs et $k > 0$, alors $9 + k$ et x sont un couple de facteurs positifs de 624 avec $9 + k > 9$.
Puisque $624 = 6 \cdot 104 = 6 \cdot 8 \cdot 13 = 2^4 3^1 13^1$, alors les diviseurs positifs de 624 sont :

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 13, 16, 24, 26, 39, 48, 52, 78, 104, 156, 208, 312, 624$$

On veut également que la valeur de y soit un entier strictement positif.
Puisque le point (x, y) est situé sur la droite d'équation $9x + 4y = 600$, alors $4y = 600 - 9x$, d'où $y = 150 - \frac{9}{4}x$; la valeur de y étant un entier uniquement lorsque x est un multiple de 4.
Donc, on veut que x soit un diviseur positif de 624 qui est un multiple de 4.
Donc, les valeurs possibles de x sont $4, 8, 12, 16, 24, 48, 52, 104, 156, 208, 312, 624$.
Les valeurs correspondantes de $9 + k$ sont $156, 78, 52, 39, 26, 13, 12, 6, 4, 3, 2, 1$.
Puisque $9 + k > 9$, on peut donc éliminer $6, 4, 3, 2, 1$ de cette liste.
Donc, les valeurs possibles de $9 + k$ sont $156, 78, 52, 39, 26, 13, 12$.
Les valeurs correspondantes de k sont $147, 69, 43, 30, 17, 4, 3$.
Ces dernières correspondent aux valeurs suivantes de x : $4, 8, 12, 16, 24, 48, 52$.
On reporte ces valeurs dans $y = 150 - \frac{9}{4}x$ une à la fois pour obtenir les valeurs suivantes de y : $141, 132, 123, 114, 96, 42, 33$. Ces valeurs sont effectivement positives.
Cela signifie qu'il y a 7 valeurs de k ayant les propriétés requises.

Réponse : 07

24. Puisque $f(p) = 17$, alors $ap^2 + bp + c = 17$.
Puisque $f(q) = 17$, alors $aq^2 + bq + c = 17$.
On soustrait ces deux équations, membre par membre, pour obtenir $a(p^2 - q^2) + b(p - q) = 0$.
Puisque $p^2 - q^2 = (p - q)(p + q)$, alors on a $a(p - q)(p + q) + b(p - q) = 0$.
Puisque $p < q$, alors $p - q \neq 0$. Donc, on divise par $p - q$ pour obtenir $a(p + q) + b = 0$.
Puisque $f(p + q) = 47$, alors $a(p + q)^2 + b(p + q) + c = 47$, d'où $(p + q)(a(p + q) + b) + c = 47$.
Puisque $a(p + q) + b = 0$, alors $(p + q)(0) + c = 47$. Donc, $c = 47$.
Puisque $ap^2 + bp + c = 17$, alors $ap^2 + bp = -30$, d'où $p(ap + b) = -30$.
De même, $q(aq + b) = -30$.
Puisque p et q sont des nombres premiers et que a et b sont des entiers, alors p et q doivent être des diviseurs premiers de -30. On remarque que $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ et on rémarque également que p et q doivent être distincts.
Puisque $p < q$, alors $p = 2$ et $q = 3$, ou $p = 2$ et $q = 5$, ou $p = 3$ et $q = 5$.

On pourrait aussi remarquer que puisque $f(p) = f(q) = 17$, alors $f(p) - 17 = f(q) - 17 = 0$.
Donc, $f(x) - 17$ est un polynôme quadratique ayant pour racines p et q. On peut donc écrire $f(x) - 17 = a(x - p)(x - q)$, puisque le polynôme quadratique a pour coefficient dominant a.
Puisque $f(p + q) = 47$, alors $f(p + q) - 17 = a(p + q - p)(p + q - q)$, d'où $47 - 17 = aqp$ ou $apq = 30$.
Comme précédemment, $p = 2$ et $q = 3$, ou $p = 2$ et $q = 5$, ou $p = 3$ et $q = 5$.

Si $p = 2$ et $q = 3$, l'équation $p(ap + b) = -30$ devient $2(2a + b) = -30$ (ou $2a + b = -15$) et l'équation $q(aq + b) = -30$ devient $3(3a + b) = -30$ (ou $3a + b = -10$).
On soustrait l'équation $2a + b = -15$ de l'équation $3a + b = -10$, membre par membre, pour obtenir $a = 5$ (remarquons que $a > 0$), d'où on a donc $b = -15 - 2 \cdot 5 = -25$.
Donc, $f(x) = 5x^2 - 25x + 47$.
Puisque $pq = 6$, alors $f(pq) = 5(6^2) - 25(6) + 47 = 77$.

Si $p = 2$ et $q = 5$, on obtient $2a + b = -15$ et $5a + b = -6$.
On soustrait la première équation de la seconde, membre par membre, pour obtenir $3a = 9$ ou $a = 3$ (remarquons que $a > 0$), d'où on a donc $b = -15 - 2 \cdot 3 = -21$.
Donc, $f(x) = 3x^2 - 21x + 47$.
Puisque $pq = 10$, alors $f(pq) = 3(10^2) - 21(10) + 47 = 137$.

Si $p = 3$ et $q = 5$, on obtient $3a + b = -10$ et $5a + b = -6$.
On soustrait la première équation de la seconde, membre par membre, pour obtenir $2a = 4$ ou $a = 2$ (remarquons que $a > 0$), d'où on a donc $b = -10 - 3 \cdot 2 = -16$.
Donc, $f(x) = 2x^2 - 16x + 47$.
Puisque $pq = 15$, alors $f(pq) = 2(15^2) - 16(15) + 47 = 257$.

Ces valeurs de $f(pq)$ ont une somme de $77 + 137 + 257 = 471$.
Les deux chiffres les plus à droite de cet entier sont 71.

Réponse : 71

25. Considérons la grille de l'énoncé :

a	b	c
d	5	e
f	g	h

On sait que les entiers le long de chaque rangée, de chaque colonne et de chacune des deux diagonales principales ont des sommes qui sont toutes divisibles par 5.
On retire tous les entiers de la grille sauf 5, a, c, f et h.

a		c
	5	

Pour chacun de a et c, on a 9 choix.
Puisque la somme des entiers le long de chaque diagonale est égale à un multiple de 5, alors $a + 5 + h$ est un multiple de 5, ce qui revient à dire que $a + h$ est un multiple de 5.
Remarquons que chacun de a et h est un entier de 1 à 9.
Si $a = 1$, alors $h = 4$ ou $h = 9$. Si $a = 6$, alors $h = 4$ ou $h = 9$.
Si $a = 2$, alors $h = 3$ ou $h = 8$. Si $a = 7$, alors $h = 3$ ou $h = 8$.
Si $a = 3$, alors $h = 2$ ou $h = 7$. Si $a = 8$, alors $h = 2$ ou $h = 7$.
Si $a = 4$, alors $h = 1$ ou $h = 6$. Si $a = 9$, alors $h = 1$ ou $h = 6$.
Si $a = 5$, alors $h = 5$.
On écrit $h = \overline{a}$ pour exprimer le fait que h dépend de a. (Remarquons que h ne dépend pas de c.) Gardons en tête qu'il peut y avoir 1 ou 2 valeurs possibles pour h, selon la valeur de a.

De même, $c + 5 + f$ est un multiple de 5. Donc, $c + f$ est également un multiple de 5. Donc, c et f ont les mêmes combinaisons de valeurs possibles que a et h.
On écrit $f = \overline{c}$. On a donc

a		c
	5	
$\overline{c}$		$\overline{a}$

Puisque $a + b + c$ est un multiple de 5, alors $b + (a + c)$ est un multiple de 5. On écrit donc $b = \overline{a + c}$, puisque b dépend de $a + c$.
On a donc

a	$\overline{a+c}$	c
	5	
$\overline{c}$		$\overline{a}$

Puisque chacun de a et c est un entier de 1 à 9, alors $a + c$ est un entier de 2 à 18. Rappelons que $b = \overline{a + c}$ est également un entier de 1 à 9.
Si $a + c$ est l'un de 2, 7, 12 et 17, alors les valeurs possibles de $b = \overline{a + c}$ sont 3 et 8.
Si $a + c$ est l'un de 3, 8, 13 et 18, alors les valeurs possibles de $b = \overline{a + c}$ sont 2 et 7.
Si $a + c$ est l'un de 4, 9 et 14, alors les valeurs possibles de $b = \overline{a + c}$ sont 1 et 6.
Si $a + c$ est l'un de 5, 10 et 15, alors $b = \overline{a + c} = 5$.
Si $a + c$ est l'un de 6, 11 et 16, alors les valeurs possibles de $b = \overline{a + c}$ sont 4 et 9.

On peut maintenant commencer à considérer les cas. Puisque l'on a vu ci-dessus que le nombre de possibilités pour certaines des entrées dépend de si a et c sont égaux à 5 ou non, alors on considère les cas (i) $a = c = 5$, (ii) $a = 5$ et $c \neq 5$, (iii) $c = 5$ et $a \neq 5$, et (iv) $a \neq 5$ et $c \neq 5$.

<u>1$^{\text{er}}$ cas : $a = c = 5$</u>
D'après ce qui précède, il n'y a qu'un seul choix possible pour chacun de $\overline{a}$ et $\overline{c}$: soit chacun doit être égal à 5.
De plus, $a + c = 10$. Donc $\overline{a+c}$ doit aussi égaler 5, d'où on a donc la grille :

5	5	5
	5	
5		5

De même, on ne peut placer que l'entier 5 dans chacune des cases restantes. Il n'y a donc qu'une seule façon de compléter la grille dans ce cas.

<u>2$^{\text{e}}$ cas : $a = 5$ et $c \neq 5$</u>
Puisque $a = 5$, alors $\overline{a} = 5$.
De plus, puisque $a = 5$, alors $a + c = 5 + c$. Cela signifie que $\overline{a+c}$ est égal à $\overline{c}$, d'où on a donc la grille :

5	$\overline{c}$	c
	5	
$\overline{c}$		5

Dans ce cas, il y a 8 choix pour c (tout sauf 5) et 2 choix pour chaque $\overline{c}$ (puisque c n'est pas égal à 5). De plus, les possibilités pour les 3 cases vides sont déterminées soit par la valeur de c soit par la valeur de $\overline{c}$, aucune des deux ne pouvant être un multiple de 5.
Il y a donc 2 possibilités pour chacune de ces 3 cases vides.
Donc, dans ce cas, il y a $1^2 \cdot 8 \cdot 2^2 \cdot 2^3 = 2^8$ grilles en tout.

<u>3$^{\text{e}}$ cas : $c = 5$ et $a \neq 5$</u>
Si $c = 5$ et $a \neq 5$, alors il y a aussi 2^8 grilles.

On considère par la suite la situation où $a \neq 5$ et $c \neq 5$.
On sait qu'il y a deux valeurs possibles pour chacun de $\overline{a}$ et $\overline{c}$. Cependant, le nombre de valeurs possibles de $\overline{a+c}$ dépend de si $a+c$ est un multiple de 5 ou non. De plus, le nombre de possibilités pour les 3 cases non nommées dépend également des valeurs des combinaisons de a, c, $\overline{a}$ et $\overline{c}$. D'où on a donc trois cas supplémentaires où $a \neq 5$ et $c \neq 5$.

<u>4$^{\text{e}}$ cas : $a \neq 5$, $c \neq 5$ et $a + c$ est un multiple de 5</u>
Il y a 8 choix pour a (tout sauf 5).
Il y a donc 2 choix pour c (celui qui fera de sorte que $a + c$ soit un multiple de 5).
Il y a 2 choix pour chacun de $\overline{a}$ et $\overline{c}$, puisque ni a ni c n'est égal à 5.
De plus, $\overline{a+c} = 5$ puisque $a + c$ est un multiple de 5.
On a donc la grille suivante :

a	5	c
	5	
$\overline{c}$		$\overline{a}$

Pour que la somme de la colonne du milieu soit égale à un multiple de 5, on doit placer un 5 dans la case vide de la rangée du bas.

En examinant les première et troisième colonnes, on constate que ni $a + \overline{c}$ ni $c + \overline{a}$ ne peut être égal à un multiple de 5.
On peut le justifier en remarquant que puisque $a + c$ est un multiple de 5, les restes que l'on obtient lorsque a et c sont divisés par 5 doivent avoir une somme de 5.
Cela signifie que a et $\overline{c}$ ont le même reste non nul lorsqu'ils sont divisés par 5, ce qui signifie que leur somme ne peut admettre 5 comme diviseur.
Par conséquent, les 2 cases vides restantes ont chacune 2 entrées possibles pour que leurs colonnes aient des sommes qui soient égales à des multiples de 5.
Il y a 8 choix pour a, 2 choix pour c, 2 cases dans lesquelles on doit placer 5, et 2 choix pour chacune des 4 cases restantes..
Dans ce cas, il y a donc $8 \cdot 2 \cdot 1^2 \cdot 2^4 = 2^8$ grilles.

Enfin, on examine les grilles où $a \neq 5$, $c \neq 5$ et $a + c$ n'est pas un multiple de 5, tout en considérant séparément les situations où $a - c$ est un multiple de 5 et $a - c$ n'est pas un multiple de 5.

<u>5^e cas : $a \neq 5$, $c \neq 5$, $a + c$ n'est pas un multiple de 5 et $a - c$ est un multiple de 5</u>
Il y a 8 choix pour a.
Il y a alors 2 choix pour c : celui qui fera de sorte que l'on obtienne le même reste que a lorsqu'on le divise par 5.
Il y a 2 choix pour chacun de $\overline{a}$, $\overline{c}$ et $\overline{a+c}$ puisqu'aucun de a, c et $a + c$ n'est un multiple de 5.

a	$\overline{a+c}$	c
	5	
$\overline{c}$		$\overline{a}$

Puisque $a - c$ est un multiple de 5, alors $a + \overline{c}$ et $c + \overline{a}$ sont tous deux des multiples de 5.
Pour le voir, remarquons que $\overline{c} = 5 - c$ ou $\overline{c} = 10 - c$ ou $\overline{c} = 15 - c$. Donc, $a + \overline{c}$ est égal à l'un de $5 + a - c$ ou $10 + a - c$ ou $15 + a - c$, qui sont tous des multiples de 5 puisque $a - c$ l'est.
Cela signifie que l'on doit placer un 5 dans chacune des cases vides dans la colonne de gauche et celle de droite.
Enfin, il y a 2 choix possibles pour la case vide du bas (puisque $\overline{a+c}$ n'est pas un multiple de 5).
Dans ce cas, il y a donc $8 \cdot 2 \cdot 2^3 \cdot 1^2 \cdot 2 = 2^8$ grilles.

<u>6^e cas : $a \neq 5$, $c \neq 5$, $a + c$ n'est pas un multiple de 5 et $a - c$ n'est pas un multiple de 5</u>
Il y a 8 choix pour a.
Il y a alors 4 choix pour c (soit les choix qui ne sont pas : 5, les deux choix qui font de $a + c$ un multiple de 5, les deux choix qui font de $a - c$ un multiple de 5).
Il y a 2 choix pour chacun de $\overline{a}$, $\overline{c}$ et $\overline{a+c}$.
Il y a également 2 choix pour chacune des 3 entrées restantes de la grille puisque les deux entrées de la première colonne, celles de la troisième colonne et celles de la troisième rangée n'ont pas des sommes qui admettent 5 comme diviseur.
Dans ce cas, il y a $8 \cdot 4 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = 2^{11}$ grilles.

En combinant tous les cas, on peut compléter la grille de

$$N = 1 + 2^8 + 2^8 + 2^8 + 2^8 + 2^{11} = 1 + 4 \cdot 2^8 + 2^{11} = 3073 \text{ façons.}$$

Les deux chiffres les plus à droite de N sont 73.

Réponse : 73