



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat

(11^e année – Sec. V)

le mercredi 23 février 2022

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 24 février 2022

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)



UNIVERSITY OF
WATERLOO

Durée: 60 minutes

©2022 University of Waterloo

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Directives

1. Attendez le signal du surveillant ou de la surveillante avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponses. Au besoin, demandez à l'enseignante ou à l'enseignant d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur droite de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école et le nom de la ville.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats admissibles.**
6. Les parties A et B du concours sont composées de questions à choix multiple. Chacune de ces questions est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. La réponse juste à chaque question de la partie C est un entier de 0 à 99 inclusivement. Après avoir décidé de votre réponse, remplissez les deux cercles appropriés sur la feuille-réponse. Une réponse à un chiffre (p. ex. $\langle 7 \rangle$) doit être codée avec un zéro non significatif ($\langle 07 \rangle$).
8. Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C. Une réponse fautive n'est *pas* pénalisée. Chaque question laissée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 10 questions.
9. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui visuel seulement.
10. Après le signal du surveillant ou de la surveillante, vous aurez 60 minutes pour terminer.
11. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Pascal, Cayley ou Fermat.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

Notation: Une réponse fautive *n'est pas pénalisée*.

On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 10 questions.

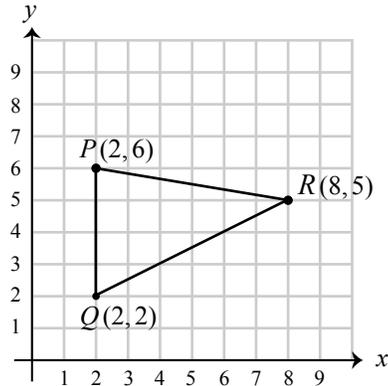
Partie A (5 points par bonne réponse)

- Quelle est la valeur de $6 + (3 \times 6) - 12$?
(A) 6 (B) 9 (C) 12 (D) 18 (E) 24
- Deux nombres ont une moyenne de 7. L'un des nombres est 5. Quel est l'autre nombre?
(A) 6 (B) 4 (C) 3 (D) 8 (E) 9
- Gauravi fait une promenade tous les jours. Un lundi, elle parcourt 500 m. Chaque jour suivant, elle augmente sa distance parcourue de 500 m par rapport au jour précédent. Quel jour de la semaine parcourra-t-elle exactement 4500 m?
(A) Jeudi (B) Vendredi (C) Mardi (D) Lundi (E) Mercredi
- Quel est le plus grand nombre de carrés ayant des côtés de longueur 2 que l'on peut placer, sans chevauchement, à l'intérieur d'un carré ayant des côtés de longueur 8?
(A) 8 (B) 32 (C) 16 (D) 64 (E) 4
- On choisit au hasard l'un des entiers dans la liste suivante de 15 entiers :

1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5

La probabilité pour que l'entier choisi soit égal à n est égale à $\frac{1}{3}$. Quelle est la valeur de n ?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5
- Dans la figure ci-contre, les points $P(2,6)$, $Q(2,2)$ et $R(8,5)$ forment un triangle. Quelle est l'aire du triangle PQR ?
(A) 24 (B) 14 (C) 21
(D) 12 (E) 16



- L'expression $(1 + 2 + 3)(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3})$ est égale à :
(A) 3 (B) 11 (C) 6 (D) $\frac{11}{6}$ (E) 12

8. Sachant que $10x + y = 75$ et $10y + x = 57$, x et y étant des entiers strictement positifs, quelle est la valeur de $x + y$?
 (A) 12 (B) 5 (C) 7 (D) 77 (E) 132
9. Pascale met 7 jours pour creuser 4 trous tandis que Miguel met 3 jours pour creuser 2 trous. S'ils travaillent ensemble et que chacun continue à creuser à la même vitesse, combien de trous au total creuseront-ils en 21 jours ?
 (A) 35 (B) 22 (C) 12 (D) 26 (E) 28
10. Sachant que $2^{11} \times 6^5 = 4^x \times 3^y$, x et y étant des entiers strictement positifs, quelle est la valeur de $x + y$?
 (A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14

Partie B (6 points par bonne réponse)

11. Dhruv est plus âgé que Bev. Bev est plus âgé que Elcim. Elcim est plus jeune qu'André. André est plus jeune que Bev. Bev est plus jeune que Cao. Qui est le troisième plus âgé ?
 (A) André (B) Bev (C) Cao (D) Dhruv (E) Elcim
12. Supposons que d est un entier impair et que e est un entier pair. Combien des expressions suivantes sont égales à un entier impair ?

$$d + d \quad (e + e) \times d \quad d \times d \quad d \times (e + d)$$

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4
13. Sept rectangles identiques sont disposés de manière à former deux grands rectangles, comme dans les figures A et B ci-dessous.

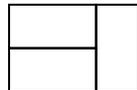


Figure A

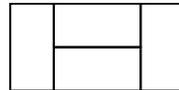


Figure B

Quel est le rapport du périmètre de la Figure A au périmètre de la Figure B ?

- (A) 2 : 3 (B) 3 : 4 (C) 3 : 5 (D) 4 : 5 (E) 5 : 6
14. Zebadiah a 3 chemises rouges, 3 chemises bleues et 3 chemises vertes dans un tiroir. Sans regarder, il retire au hasard les chemises une par une. Il voudrait un ensemble de chemises comprenant soit 3 chemises de la même couleur, soit 3 chemises de couleurs différentes. Quel est le nombre minimum de chemises que Zebadiah doit retirer pour *garantir* qu'il ait un tel ensemble ?
 (A) 4 (B) 3 (C) 6 (D) 5 (E) 7

15. On présente un entier strictement positif a comme entrée dans une machine. Si a est impair, la sortie est égale à $a + 3$. Si a est pair, la sortie est égale à $a + 5$. On peut répéter ce processus en utilisant chaque sortie successive comme entrée suivante. Par exemple, si on a $a = 1$ comme entrée initiale et qu'on utilise la machine trois fois, on obtient une sortie finale de 12. Si l'entrée initiale est $a = 15$ et que la machine est utilisée 51 fois, quelle est la sortie finale ?

(A) 213 (B) 218 (C) 212 (D) 220 (E) 215

16. Lorsque l'on divise 111 par 10, on a un reste de 1. Lorsque l'on divise 111 par l'entier strictement positif n , on a un reste de 6. Combien y a-t-il de valeurs possibles de n ?

(A) 5 (B) 8 (C) 7 (D) 6 (E) 4

17. Une canette en aluminium est en forme de cylindre. La canette est fermée aux deux extrémités et a une aire totale de 300 cm^2 . Sachant que la canette aurait une aire totale de 900 cm^2 si l'on doublait son rayon, que serait son aire totale si l'on doublait plutôt sa hauteur ?

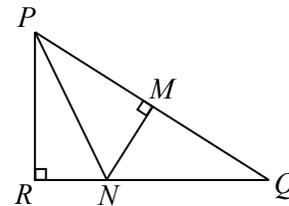
(L'aire totale d'un cylindre de rayon r et de hauteur h est égale à $2\pi r^2 + 2\pi r h$.)

(A) 450 cm^2 (B) 600 cm^2 (C) 750 cm^2 (D) 375 cm^2 (E) 300 cm^2

18. Ariane et Béatrice marchent à des vitesses différentes, mais constantes. Ariane est située à l'une des extrémités d'une rue tandis que Béatrice est située à l'autre extrémité de la rue. Chacune d'elles commence à marcher à 8 h et se dirige directement vers le point de départ de l'autre. Les deux filles se croisent à 8 h 42. Sachant qu'Ariane arrive au point de départ de Béatrice à 9 h 10, à quelle heure Béatrice arrive-t-elle au point de départ d'Ariane ?

(A) 9 h 30 (B) 9 h 35 (C) 9 h 40 (D) 9 h 45 (E) 9 h 50

19. Dans la figure ci-contre, le triangle PQR est rectangle en R , $PR = 12$ et $QR = 16$. De plus, M est le milieu de PQ et le point N est situé sur QR de manière que MN soit perpendiculaire à PQ . Quelle est l'aire du triangle PNR ?



(A) 21 (B) 17,5 (C) 36
(D) 16 (E) 21,5

20. On considère une suite de nombres t_1, t_2, t_3, \dots dont les termes sont définis par $t_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$ pour tout entier n ($n \geq 1$). Par exemple, $t_4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6}$. Quel est le plus grand entier strictement positif k pour lequel les k premiers termes (c'est-à-dire $t_1 + t_2 + \dots + t_{k-1} + t_k$) ont une somme inférieure à 1,499 ?

(A) 2000 (B) 1999 (C) 2002 (D) 2001 (E) 1998

Partie C (8 points par bonne réponse).

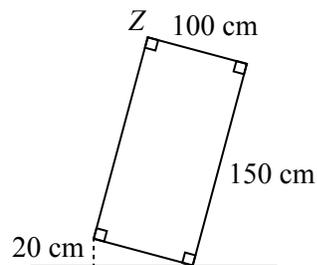
Chaque bonne réponse est un entier de 0 à 99 inclusivement.

Une réponse à un chiffre (p. ex. « 7 ») doit être codée avec un zéro non significatif (« 07 »).

Remarque: L'entier formé par les deux chiffres les plus à droite de 12345 est 45. L'entier formé par les deux chiffres les plus à droite de 6307 est 7, que l'on code 07.

21. Gustave a 15 barres d'acier dont les masses sont : 1 kg, 2 kg, 3 kg, ..., 14 kg, 15 kg. Il a également trois sacs : soit le sac A , le sac B et le sac C . Il place deux barres d'acier dans chaque sac de manière que la masse totale contenue dans chacun des sacs soit égale à M kg. Combien y a-t-il de valeurs différentes possibles de M ?

22. Un rectangle de dimensions 100 cm \times 150 cm est incliné de manière que l'un de ses sommets soit situé à 20 cm au-dessus d'une droite horizontale, comme dans la figure ci-contre. Au centimètre près, le sommet Z est situé à $(100 + x)$ cm au-dessus de la droite horizontale. Quelle est la valeur de x ?



23. Pour combien d'entiers strictement positifs k les droites d'équations $9x + 4y = 600$ et $kx - 4y = 24$ se coupent-elles en un point dont les coordonnées sont des entiers strictement positifs ?

24. Il existe des fonctions $f(x)$ qui satisfont aux conditions suivantes :

- $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a , b et c sont des entiers quelconques avec $a > 0$, et
- $f(p) = f(q) = 17$ et $f(p + q) = 47$, p et q étant des nombres premiers tels que $p < q$.

On calcule la valeur de $f(pq)$ pour chaque telle fonction. La somme de toutes les valeurs possibles de $f(pq)$ est égale à S . Quels sont les deux chiffres les plus à droite de S ?

25. Dans la grille 3×3 ci-contre, la case du centre contient l'entier 5 tandis que les huit autres cases contiennent les lettres a , b , c , d , e , f , g , h . Chacune des huit lettres doit être remplacée par un entier de 1 à 9. N'importe quel entier peut être utilisé plus d'une fois. Il existe N façons de compléter la grille pour que les entiers le long de chaque rangée, de chaque colonne et de chacune des deux diagonales principales aient des sommes qui soient toutes divisibles par 5. Quels sont les deux chiffres les plus à droite de N ?

a	b	c
d	5	e
f	g	h



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Fermat de 2022! Chaque année, plus de 265 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignante ou votre enseignant à vous inscrire au concours Hypatie qui aura lieu en avril.

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- plus d'information à propos du concours Hypatie
- des copies gratuites des concours précédents
- des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
- des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- inscrire vos élèves aux concours Fryer, Galois et Hypatie qui auront lieu en avril
- jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne
- vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
- vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
- vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
- trouver les résultats de vos élèves dans les concours