Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide

le mardi 5 avril 2022
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 6 avril 2022
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF
WATERLOO

Durée : 2 heures et demie ©2022 University of Waterloo

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 10 **Chaque question vaut 10 points.**

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci :
   - Chacune vaut 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci :
   - Chacune vaut le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

NOTE :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.

Remarque au sujet de l'encodage par bulles

Prière de s'assurer d'avoir bien encodé son nom, sa date de naissance et son année scolaire sur la feuille de renseignements et d'avoir répondu à la question portant sur son admissibilité.

1. (a) Quelle est la valeur de $\dfrac{3^2 - 2^3}{2^3 - 3^2}$?

   (b) Quelle est la valeur de $\sqrt{\sqrt{81} + \sqrt{9} - \sqrt{64}}$?

   (c) Déterminer tous les nombres réels x qui vérifient $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+7}} = \dfrac{1}{4}$.

2. (a) Déterminer les trois couples (a, b) d'entiers tels que $1 < a < b$ et $ab = 2022$.

   (b) Soit c et d des entiers tels que $c > 0$, $d > 0$ et $\dfrac{2c+1}{2d+1} = \dfrac{1}{17}$. Quelle est la plus petite valeur possible de d ?

   (c) Soit p, r et t des nombres réels qui vérifient $(px + r)(x + 5) = x^2 + 3x + t$ pour tous les nombres réels x. Déterminer la valeur de t.

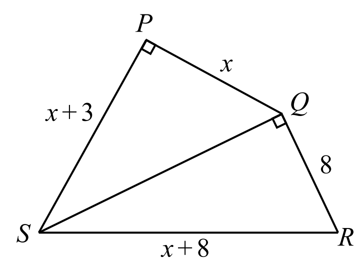
3. (a) Une grande carafe d'eau est remplie à $\frac{1}{4}$ d'eau. Après qu'on a rajouté 24 litres d'eau, la carafe est remplie à $\frac{5}{8}$. Quel est le volume de la carafe en litres ?

(b) Au début, Stéphanie a un grand nombre de ballons de soccer en sa possession. Elle en donne $\frac{2}{5}$ à Alphonso et $\frac{6}{11}$ à Christine. Le nombre de ballons qu'il lui reste est un multiple de 9. Quel est le plus petit nombre de ballons de soccer que Stéphanie aurait pu avoir au début ?

(c) Chaque élève d'un club de mathématiques fait partie soit de la section junior, soit de la section senior.
Aucun élève ne fait partie des deux sections.
Parmi les élèves de la section junior, 60 % sont gauchers et 40 % sont droitiers.
Parmi les élèves de la section senior, 10 % sont gauchers et 90 % sont droitiers.
Aucun élève du club de maths n'est à la fois gaucher et droitier.
Le nombre total d'élèves gauchers est égal au nombre total d'élèves droitiers dans le club de maths.
Déterminer le pourcentage des membres du club de mathématiques qui font partie de la section junior.

4. (a) L'hexagone $ABCDEF$ a pour sommets $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(7,2)$, $D(7,5)$, $E(3,5)$, $F(0,3)$. Quelle est l'aire de l'hexagone $ABCDEF$?

(b) Dans la figure ci-contre, le triangle PQS est rectangle en P et le triangle QRS est rectangle en Q. De plus, $PQ = x$, $QR = 8$, $RS = x + 8$, et $SP = x + 3$, x étant un nombre réel. Déterminer toutes les valeurs possibles du périmètre du quadrilatère $PQRS$.



5. (a) Une liste a_1, a_2, a_3, a_4 de nombres rationnels est telle que si l'un des termes est égal à r, alors le terme suivant est égal à $1 + \dfrac{1}{1+r}$. Par exemple, si $a_3 = \dfrac{41}{29}$, alors $a_4 = 1 + \dfrac{1}{1 + (41/29)} = \dfrac{99}{70}$. Si $a_3 = \dfrac{41}{29}$, quelle est la valeur de a_1 ?

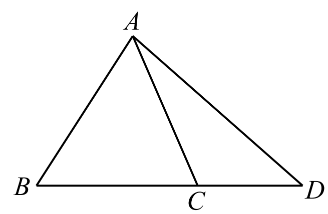
(b) Un tube cylindrique creux a un rayon de 10 mm et une hauteur de 100 mm. Le tube est placé sur une table horizontale de manière à reposer à plat sur une de ses bases circulaires. On verse de l'eau dans le tube jusqu'à une profondeur de h mm. Une tige cylindrique pleine a un rayon de 2,5 mm et une hauteur de 150 mm. La tige est placée dans le tube de manière qu'une de ses bases circulaires repose à plat sur le fond du tube. Après qu'on a placé la tige dans le tube, la profondeur de l'eau dans le tube est de 64 mm. Déterminer la valeur de h.

6. (a) Une fonction f est telle que $f\left(\dfrac{2x+1}{x}\right) = x + 6$ pour toutes les valeurs réelles de $x \neq 0$. Quelle est la valeur de $f(4)$?

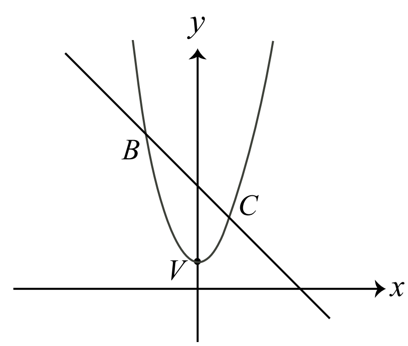
(b) Déterminer tous les nombres réels a, b et c pour lesquels la représentation graphique de la fonction $y = \log_a(x + b) + c$ passe aux points $P(3, 5)$, $Q(5, 4)$ et $R(11, 3)$.

7. (a) Un ordinateur est programmé pour choisir un entier de 1 à 99 de sorte que la probabilité qu'il choisisse l'entier x est égale à $\log_{100}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$. Supposons que la probabilité que $81 \leq x \leq 99$ est égale au double de la probabilité que $x = n$, n étant un entier. Quelle est la valeur de n ?

(b) Dans la figure ci-contre, C est situé sur le côté BD du triangle ABD. De plus, $BC = 2$, $CD = 1$, $\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{3}{4}$ et $\cos(\angle ACD) = -\dfrac{3}{5}$. Déterminer la longueur de AB.



8. (a) Supposons que $a > \frac{1}{2}$ et que la parabole d'équation $y = ax^2 + 2$ a pour sommet V. La parabole coupe la droite d'équation $y = -x + 4a$ aux points B et C, comme on le voit dans la figure ci-contre. Si le triangle VBC a une aire de $\frac{72}{5}$, déterminer la valeur de a.



(b) Considérer la proposition suivante :

> Il existe un triangle non équilatéral dont les longueurs des côtés forment une suite géométrique et dont les mesures des angles forment une suite arithmétique.

Démontrer la véracité de cette proposition en trouvant un tel triangle ou réfuter la proposition en démontrant qu'il ne peut y avoir un tel triangle.

9. Soit m ($m \geq 2$) et n des entiers strictement positifs. Une *suite en dents de scie* (m, n) est une suite d'entiers consécutifs de premier terme 1 dont le nombre de dents est égal à n. Chaque dent commence à 2, monte jusqu'à m et redescend à 1. Par exemple, la suite en dents de scie $(3, 4)$ est

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} & & 3 & & & & 3 & & & & 3 & & & & 3 & & \\ & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & \\ 1 & & & & 1 & & & & 1 & & & & 1 & & & & 1 \end{array}$$

La suite en dents de scie $(3, 4)$ comprend 17 termes dont la moyenne est égale à $\frac{33}{17}$.

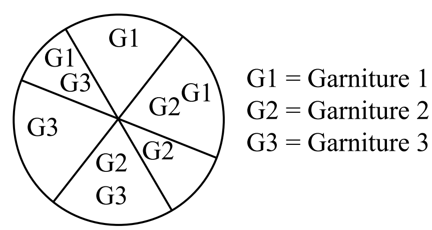
(a) Déterminer la somme des termes de la suite en dents de scie $(4, 2)$.

(b) Pour chaque entier strictement positif $m \geq 2$, déterminer une expression simplifiée représentant la somme des termes de la suite en dents de scie $(m, 3)$.

(c) Déterminer tous les couples (m, n) tels que les termes de la suite en dents de scie (m, n) ont une somme de 145.

(d) Pour tous les couples (m, n) d'entiers strictement positifs ($m \geq 2$), démontrer que la moyenne des termes de la suite en dents de scie (m, n) n'est pas un entier.

10. Dans le restaurant de pizza d'Alexis, les pizzas sont en forme de cercle et les garnitures y sont placées de manière aléatoire. Pour chaque pizza, chaque garniture est placée sur une moitié demi-circulaire choisie au hasard et le demi-cercle de chaque garniture est choisi indépendamment. Pour placer chaque garniture, Alexis dessine d'abord un diamètre dont l'angle formé avec l'horizontale est choisi au hasard et uniformément. Cela divise la pizza en deux demi-cercles. Ensuite, on choisit l'une des deux moitiés au hasard pour y placer la garniture.



(a) Pour une pizza à deux garnitures, déterminer la probabilité pour qu'au moins $\frac{1}{4}$ de la pizza soit couverte par les deux garnitures.

(b) Pour une pizza à trois garnitures, déterminer la probabilité pour qu'une région de la pizza ayant une aire non nulle soit couverte par toutes les trois garnitures. (Dans la figure ci-dessus, on voit une pizza dont aucune région n'est couverte par les trois garnitures à la fois.)

(c) Soit N un entier strictement positif. Pour une pizza à N garnitures, déterminer la probabilité, en fonction de N, qu'une région de la pizza ayant une aire non nulle soit couverte par les N garnitures à la fois.

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Euclide de 2022! Chaque année, plus de 260 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Si vous terminez l'école secondaire, nous vous souhaitons bon succès. Si vous retournez à l'école secondaire l'an prochain, encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2022.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
— des copies gratuites des concours précédents
— des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
— des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
— obtenir des renseignements au sujet des concours de 2022/2023
— jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne
— vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
— vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
— vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
— trouver les résultats de vos élèves dans les concours