Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Cayley 2022

(10e année – Secondaire IV)

le mercredi 23 février 2022
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 24 février 2022
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On a : $2 + (0 \times 2^2) = 2 + 0 = 2$.

Réponse : (B)

2. Le chiffre des unités de 119 n'est pas pair. Donc, 119 n'est pas un multiple de 2.
Le chiffre des unités de 119 n'est pas 0 ou 5, donc 119 n'est pas un multiple de 5.
Puisque $120 = 3 \times 40$, alors 119 est 1 de moins qu'un multiple de 3. Donc, 119 n'est pas un multiple de 3.
Puisque $110 = 11 \times 10$ et $121 = 11 \times 11$, alors 119 est situé entre deux multiples consécutifs de 11 et n'est donc pas lui-même un multiple de 11.
Finalement, $119 \div 7 = 17$. Donc, 119 est un multiple de 7.

Réponse : (D)

3. Les fractions $\frac{3}{10}$ et $\frac{5}{23}$ sont toutes deux inférieures à $\frac{1}{2}$ (soit le choix (E)). Donc, aucune d'elles ne peut être la plus grande valeur. (On remarque qu'on peut se servir du fait que $\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = \frac{11{,}5}{23}$ pour comparer ces deux fractions à $\frac{1}{2}$.)
Chacune des fractions $\frac{4}{7}$ et $\frac{2}{3}$ est supérieure à $\frac{1}{2}$. Donc, $\frac{1}{2}$ ne peut être la plus grande valeur.
Donc, la bonne réponse est soit $\frac{4}{7}$ ou $\frac{2}{3}$.
On écrit les deux fractions avec un dénominateur de $3 \times 7 = 21$. On a donc $\frac{4}{7} = \frac{12}{21}$ et $\frac{2}{3} = \frac{14}{21}$, d'où on voit que $\frac{2}{3}$ est la plus grande valeur parmi les cinq choix.
(On aurait également pu convertir les fractions en valeurs décimales et les comparer ainsi.)

Réponse : (D)

4. On répète la même séquence de 5 figures pour former la régularité.
C'est-à-dire que les 5^{e}, 10^{e}, 15^{e}, 20^{e} et 25^{e} figures de la régularité correspondent à la dernière figure de la séquence de 5 figures.
Cela signifie que la 22^{e} figure (soit la 2^{e} figure après la 20^{e} figure) correspond à la 2^{e} figure dans la séquence de 5 figures.
Donc, la 22^{e} figure de la régularité est $\square$.

Réponse : (A)

5. On a 5 termes dans l'expression, chacun étant égal à (5×5).
Donc, on peut récrire l'expression sous la forme $5 \times (5 \times 5)$, ce qui est égal à 5×25, soit 125.

Réponse : (E)

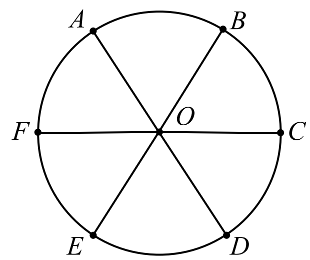
6. Yihana marche en montée exactement quand les segments du diagramme sont croissants (un segment est croissant lorsque sa pente est positive).
Les segments ont des pentes positives entre 0 et 3 minutes et entre 8 et 10 minutes, ce qui correspond respectivement à des durées de 3 minutes et de 2 minutes, soit un total de 5 minutes.

Réponse : (A)

7. *Solution 1*
Puisque les points A, B, C, D, E et F sont également espacés autour du cercle, alors chaque arc de cercle délimité par deux points consécutifs a une longueur égale à $\frac{1}{6}$ de la circonférence du cercle.
Donc, l'arc de cercle délimité par A et C correspond à $\frac{2}{6}$ (soit $\frac{1}{3}$) de la circonférence du cercle.
Puisque l'angle plein au centre d'un cercle a une mesure de 360°, alors $\frac{1}{3}$ d'un tour complet autour du cercle correspond à un angle de $\frac{1}{3} \times 360^\circ = 120^\circ$.
Donc, $\angle AOC = 120^\circ$.

Solution 2

On joint O à chacun des points A, B, C, D, E et F.



Puisque A, B, C, D, E et F sont également espacés autour du cercle, alors tous les arcs de cercle délimités par deux points consécutifs ont des angles au centre de même mesure. C'est-à-dire que

$$\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOF = \angle FOA$$

Puisque ces 6 angles forment un cercle complet, alors leurs mesures ont une somme de 360°. Donc,

$$\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOF = \angle FOA = \tfrac{1}{6} \times 360^\circ = 60^\circ$$

Cela signifie que $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$.

Réponse : (D)

8. Puisque le rectangle a une aire de 24 et des côtés dont les longueurs sont des entiers strictement positifs, alors sa longueur et sa largeur doivent être une paire de facteurs positifs de 24. Donc, on pourrait avoir comme dimensions 24 × 1 ou 12 × 2 ou 8 × 3 ou 6 × 4. Comme le périmètre d'un rectangle est égal à 2 fois la somme de la longueur et la largeur, les périmètres possibles sont les suivants :

$$2(24 + 1) = 50 \qquad 2(12 + 2) = 28 \qquad 2(8 + 3) = 22 \qquad 2(6 + 4) = 20$$

Parmi les choix de réponse, le seul périmètre qui ne figure pas parmi les périmètres ci-dessus est 36, soit le choix (E).

Réponse : (E)

9. D'après la définition, $3\nabla b = \dfrac{3+b}{3-b}$.

En supposant que $b \neq 3$, les équations suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} 3\nabla b &= -4 \\ \frac{3+b}{3-b} &= -4 \\ 3 + b &= -4(3-b) \\ 3 + b &= -12 + 4b \\ 15 &= 3b \end{aligned}$$

d'où on a donc $b = 5$.

Réponse : (A)

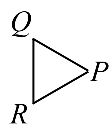
10. *Solution 1*
Puisque x est égal à 20 % de y, alors $x = \frac{20}{100}y = \frac{1}{5}y$.
Puisque x est égal à 50 % de z, alors $x = \frac{1}{2}z$.
Donc, $\frac{1}{5}y = \frac{1}{2}z$, soit $\frac{2}{5}y = z$.
Donc, $z = \frac{40}{100}y$, d'où z correspond à 40 % de y.

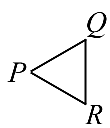
Solution 2
Puisque x est égal à 20 % de y, alors $x = 0{,}2y$.
Puisque x est égal à 50 % de z, alors $x = 0{,}5z$.
Donc, $0{,}2y = 0{,}5z$, d'où $0{,}4y = z$.
Donc, $z = 0{,}4y$, d'où z correspond à 40 % de y.

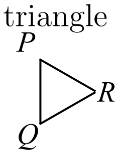
RÉPONSE : (D)

11. Le prix de 250 g de bonbons est de 7,50 \$, ce qui est égal à 750 cents.
Donc, 1 g de bonbons coûte $750 \div 250 = 3$ cents.
Puisque 1,80 \$ est égal à 180 cents, alors on peut acheter $180 \div 3 = 60$ g de bonbons.

RÉPONSE : (C)

12. La position initiale du triangle est 

. Lorsqu'on le retourne tout en gardant le côté QR sur la table, on obtient 

.
Ensuite, lorsqu'on retourne le triangle tout en gardant le côté PR sur la table, on obtient la position finale du triangle, soit 

.

RÉPONSE : (E)

13. Puisque $2 \times 2 \times 2 = 8$, alors un cube avec des côtés de longueur 2 a un volume de 8. (Remarquons également que $\sqrt[3]{8} = 2$.)
Donc, chacun des cubes avec un volume de 8 a une hauteur de 2.
Cela signifie que le grand cube a une hauteur de $2+2 = 4$ et a donc un volume de $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$.

RÉPONSE : (E)

14. Puisque 100 000 ne contient pas le bloc de chiffres 178, alors chaque entier entre 10 000 et 100 000 qui contient le bloc de chiffres 178 a 5 chiffres.
Un tel entier peut être de la forme $178xy$ ou de la forme $x178y$ ou de la forme $xy178$, x et y étant des entiers quelconques.
Le premier chiffre d'un entier de cinq chiffres a 9 valeurs possibles (soit tout chiffre de 1 à 9), tandis que chacun des 4 chiffres suivants a 10 valeurs possibles (soit tout chiffre de 0 à 9).
Cela signifie qu'il y a
– 100 entiers de la forme $178xy$ (x et y ont chacun 10 choix possibles et $10 \times 10 = 100$),
– 90 entiers de la forme $x178y$ (x et y ont chacun, respectivement, 9 et 10 choix possibles et $9 \times 10 = 90$) et
– 90 entiers de la forme $xy178$ (x et y ont chacun, respectivement, 9 et 10 choix possibles et $9 \times 10 = 90$).
En tout, il y a donc $100 + 90 + 90 = 280$ entiers entre 10 000 et 100 000 qui contiennent le bloc de chiffres 178.

Réponse : (A)

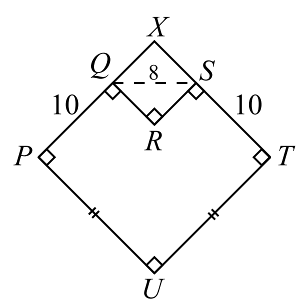
15. Puisque $a + 5 = b$, alors $a = b - 5$.
Puisque $a = b - 5$ et $c = 5 + b$ et $b + c = a$, alors

$$\begin{aligned} b + (5 + b) &= b - 5 \\ 2b + 5 &= b - 5 \\ b &= -10 \end{aligned}$$

(Si $b = -10$, alors $a = b - 5 = -15$ et $c = 5 + b = -5$ et $b + c = (-10) + (-5) = (-15) = a$, ce qu'il fallait.)

Réponse : (C)

16. On prolonge PQ et TS pour qu'ils se touchent au point X.



Puisque le quadrilatère $QRSX$ a trois angles droits (à Q, R et S), alors son quatrième angle, X, est également droit.
Donc, $QRSX$ est un rectangle, d'où on a donc $XS = QR$ et $QX = RS$.
Donc, $PQRSTU$ a un périmètre de

$$\begin{aligned} PQ + QR + RS + ST + TU + UP &= PQ + XS + QX + ST + TU + UP \\ &= (PQ + QX) + (XS + ST) + TU + UP \\ &= PX + XT + TU + UP \end{aligned}$$

ce qui est égal au périmètre du quadrilatère $PXTU$.
Or, le quadrilatère $PXTU$ est un rectangle car il a quatre angles droits.
De plus, $PU = UT$, donc $PXTU$ est un carré et a donc un périmètre égal à $PXTU$

$$4 \times PX = 4 \times (PQ + QX) = 4 \times (10 + QX) = 40 + 4 \times QX$$

Enfin, $QX = PX - PQ = PX - 10 = XT - 10 = XT - ST = XS$. Cela signifie que le triangle QXS est isocèle et rectangle en X.
D'après le théorème de Pythagore, $QX^2 + XS^2 = QS^2$, donc $2 \times QX^2 = 8^2$ ou $QX^2 = 32$.
Puisque $QX > 0$, alors $QX = \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.
Donc, $PQRSTU$ a un périmètre de $40 + 4 \times 4\sqrt{2} = 40 + 16\sqrt{2} \approx 62{,}6$ (on aurait également pu l'exprimer sous la forme $40 + 4\sqrt{32} \approx 62{,}6$).
Parmi les choix de réponse, ce périmètre est plus près de 63.

Réponse : (C)

17. Zebadiah doit retirer au moins 3 chemises.
S'il retire 3 chemises, 2 d'entre elles pourraient être rouges et 1 pourrait être bleue.
S'il retire 4 chemises, 2 d'entre elles pourraient être rouges et 2 pourraient être bleues.
Par conséquent, s'il retire moins de 5 chemises, il n'est pas certain qu'il puisse retirer 3 chemises de la même couleur ou 3 chemises de couleurs différentes.
Supposons qu'il retire 5 chemises. Si 3 sont de la même couleur, les conditions sont remplies.
S'il n'y a pas 3 chemises de la même couleur parmi les 5 chemises, alors on a au plus 2 de chaque couleur (par exemple, 2 chemises rouges, 2 chemises bleues et 1 chemise verte). Cela signifie qu'il doit retirer des chemises de 3 couleurs, car s'il ne retirait que des chemises de 2 couleurs, il retirerait au plus $2 + 2 = 4$ chemises.
Autrement dit, en retirant 5 chemises, il est garanti d'obtenir soit 3 chemises de la même couleur, soit 3 chemises de couleurs différentes.
Donc, Zebadiah doit retirer au moins 5 chemises.

Réponse : (D)

18. Au début du premier jour, la boîte contient 1 boule noire et 1 boule dorée.
À la fin du premier jour, 2 boules noires et 1 boule dorée sont ajoutées. Donc, il y a 3 boules noires et 2 boules dorées dans la boîte à la fin du premier jour.
À la fin du deuxième jour, $2 \times 2 = 4$ boules noires et $2 \times 1 = 2$ boules dorées sont ajoutées. Donc, il y a 7 boules noires et 4 boules dorées dans la boîte à la fin du deuxième jour.
Dans le tableau ci-dessous, on ajoute 2 boules noires et 1 boule dorée à la fin de chaque jour :

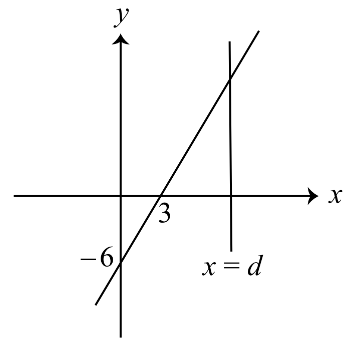
Fin du jour n°	Boules noires	Boules dorées
2	7	4
3	$7 + 4 \times 2 = 15$	$4 + 4 = 8$
4	$15 + 8 \times 2 = 31$	$8 + 8 = 16$
5	$31 + 16 \times 2 = 63$	$16 + 16 = 32$
6	$63 + 32 \times 2 = 127$	$32 + 32 = 64$
7	$127 + 64 \times 2 = 255$	$64 + 64 = 128$

Il y a donc $255 + 128 = 383$ boules dans la boîte à la fin du 7^e^ jour.

Réponse : (E)

19. La droite d'équation $y = 2x - 6$ a pour ordonnée à l'origine -6.
De plus, l'abscisse à l'origine de $y = 2x - 6$ a pour ordonnée $y = 0$, on a donc $0 = 2x - 6$ ou $2x = 6$, d'où $x = 3$.
Donc, le triangle borné par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $y = 2x - 6$ a une base de 3, une hauteur de 6 et a donc une aire égale à $\frac{1}{2} \times 3 \times 6 = 9$.
Puisque cette aire représente le quart de l'aire du triangle borné par l'axe des abscisses, la droite d'équation $y = 2x - 6$ et la droite verticale d'équation $x = d$, alors l'aire de ce deuxième triangle est égale à 36.

Cela signifie que $x = d$ est situé à droite du point $(3, 0)$ car cette nouvelle aire est plus grande. Autrement dit, $d > 3$.



Le triangle a une base dont la longueur est égale à $d - 3$ et une hauteur égale à $2d - 6$ (puisque la hauteur est mesurée le long de la droite verticale d'équation $x = d$).
Donc, on veut $\frac{1}{2}(d - 3)(2d - 6) = 36$ ou $(d - 3)(d - 3) = 36$, soit $(d - 3)^2 = 36$.
Puisque $d - 3 > 0$, alors $d - 3 = 6$, d'où $d = 9$.
On aurait pu aussi remarquer que si les aires de deux triangles semblables sont dans un rapport de $4 : 1$, alors les longueurs de deux côtés correspondants dans ces triangles sont dans un rapport de $\sqrt{4} : 1$ ou $2 : 1$.
Puisque les deux triangles sont semblables (tous deux sont rectangles et ont des angles de même mesure au point $(3, 0)$), alors le grand triangle a une base dont la longueur est égale à $2 \times 3 = 6$, donc $d = 3 + 6 = 9$.

Réponse : (A)

20. Puisque $3m^3$ est un multiple de 3, alors $5n^5$ est un multiple de 3.
Puisque 5 n'est pas un multiple de 3 et que 3 est un nombre premier, alors n^5 est un multiple de 3.
Puisque n^5 est un multiple de 3 et que 3 est un nombre premier, alors n est un multiple de 3. Cela signifie que $5n^5$ admet au moins 5 facteurs 3.
Puisque $5n^5$ admet au moins 5 facteurs 3, alors $3m^3$ admet au moins 5 facteurs 3. Cela signifie que m^3 est un multiple de 3, d'où on a donc que m est un multiple de 3.
À l'aide d'une analyse semblable, on voit que m et n sont tous deux des multiples de 5.
Donc, on peut écrire $m = 3^a 5^b s$, a, b et s étant des entiers strictement positifs et on peut écrire $n = 3^c 5^d t$, c, d et t étant des entiers strictement positifs tels que ni s ni t ne sont des multiples de 3 ou de 5. (Autrement dit, on a regroupé tous les facteurs 3 et 5 dans chacun de m et n.)
À partir de l'équation donnée,

$$\begin{aligned} 3m^3 &= 5n^5 \\ 3(3^a 5^b s)^3 &= 5(3^c 5^d t)^5 \\ 3 \times 3^{3a} 5^{3b} s^3 &= 5 \times 3^{5c} 5^{5d} t^5 \\ 3^{3a+1} 5^{3b} s^3 &= 3^{5c} 5^{5d+1} t^5 \end{aligned}$$

Puisque s et t ne sont pas des multiples de 3 ou 5, on doit avoir $3^{3a+1} = 3^{5c}$ et $5^{3b} = 5^{5d+1}$ et $s^3 = t^5$.
Puisque s et t sont positifs et que m et n doivent être aussi petits que possible, on pose $s = t = 1$, ce qui vérifie $s^3 = t^5$.
Puisque $3^{3a+1} = 3^{5c}$ et $5^{3b} = 5^{5d+1}$, alors $3a + 1 = 5c$ et $3b = 5d + 1$.
Puisque m et n doivent être aussi petits que possible, on veut trouver les plus petits entiers strictement positifs a, b, c, d tels que $3a + 1 = 5c$ et $3b = 5d + 1$.

Lorsque $a = 1$ ou $a = 2$, on ne peut obtenir une valeur de $3a + 1$ qui soit un multiple de 5. Cependant, lorsque $a = 3$, alors $c = 2$.
De même, lorsque $b = 1$, on ne peut obtenir une valeur de $3b$ qui soit égale à $5d + 1$ pour tout entier strictement positif d. Cependant, lorsque $b = 2$, alors $d = 1$.
Donc, les plus petites valeurs possibles de m et n sont $m = 3^3 5^2 = 675$ et $n = 3^2 5^1 = 45$, d'où $m + n = 720$.
(On peut vérifier par substitution que $m = 675$ et $n = 45$ satisfont à l'équation $3m^3 = 5n^5$.)

Réponse : (C)

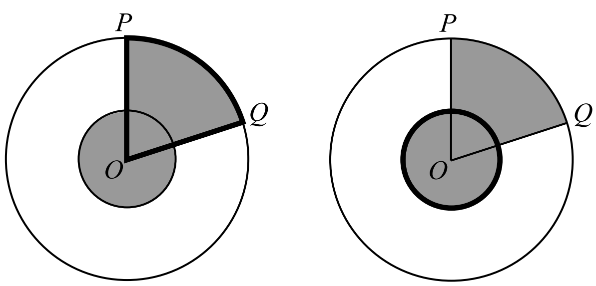
21. Puisque $20x + 11y = 881$, alors $20x = 881 - 11y$ et $11y = 881 - 20x$.
Puisque x est un entier, alors $20x$ est un multiple de 10. Donc, $20x$ a 0 pour chiffre des unités, d'où $881 - 20x$ a donc 1 pour chiffre des unités et $11y$ a 1 pour chiffre des unités.
Puisque $11y$ a 1 pour chiffre des unités, alors y a 1 pour chiffre des unités.
Puisque $20x$ est positif, alors $11y = 881 - 20x$ est inférieur à 881. Cela signifie que $11y < 881$, soit $y < \frac{881}{11} \approx 80{,}1$.
Donc, les valeurs possibles de y sont 1, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71.
On vérifie chacune des valeurs dans le tableau ci-dessous :

y	$11y = 881 - 20x$	$20x$	x
1	11	870	N'est pas un entier
11	121	760	38
21	231	650	N'est pas un entier
31	341	540	27
41	451	430	N'est pas un entier
51	561	320	16
61	671	210	N'est pas un entier
71	781	100	5

Donc, parmi les valeurs permises de y, la plus grande valeur et la plus petite valeur ont une somme de $11 + 71 = 82$.

Réponse : 82

22. Puisque les deux régions ombrées ont des aires égales, alors lorsqu'on ombre la région non ombrée du petit cercle, on constate que l'aire du secteur entièrement ombré du grand cercle est égale à l'aire du petit cercle.



Le petit cercle a un rayon de 1. Son aire est donc égale à $\pi \times 1^2 = \pi$.
Le grand cercle a un rayon de 3. Son aire est donc égale à $\pi \times 3^2 = 9\pi$.
Cela signifie que l'aire du secteur entièrement ombré du grand cercle est égale à π, d'où on comprend donc que ce secteur représente $\frac{1}{9}$ du grand cercle.
Cela signifie que l'angle POQ doit également représenter $\frac{1}{9}$ d'un angle plein. Donc, $\angle POQ = \frac{1}{9} \times 360° = 40°$.
Donc, $x = 40$.

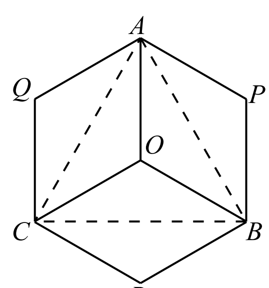
Réponse : 40

23. Supposons qu'André, Boyu, Callista et Diane choisissent, respectivement, les entiers a, b, c et d. Pour chacun de a, b, c et d, on a 9 choix. Donc, le nombre total de quadruplets (a, b, c, d) est égal à $9^4 = 6561$.
Parmi les 9 choix, 5 sont impairs $(1, 3, 5, 7, 9)$ et 4 sont pairs $(2, 4, 6, 8)$.
S'il y a N quadruplets (a, b, c, d) dont la somme des quatre entiers $a + b + c + d$ est paire (c'est-à-dire que la somme de leurs choix est paire), alors la probabilité pour que la somme de leurs quatre entiers soit paire est égale à $\frac{N}{6561}$, soit la forme souhaitée.
Donc, on compte le nombre de quadruplets (a, b, c, d) tels que la somme $a + b + c + d$ soit paire.
Parmi les quatre entiers a, b, c, d, on a soit 0, 1, 2, 3, ou 4 de ces entiers qui sont pairs, les entiers restants étant impairs.
Donc, pour a, b, c, d,
– si aucun d'entre eux n'est pair (les quatre sont donc impairs), leur somme sera paire,
– si l'un d'entre eux est pair (trois sont donc impairs), leur somme sera impaire,
– si deux d'entre eux sont pairs (deux sont donc impairs), leur somme sera paire,
– si trois d'entre eux sont pairs (l'un d'eux est donc impair), leur somme sera impaire,
– si les quatre sont pairs (aucun d'eux n'est donc impair), leur somme sera paire,
Donc, on doit compter le nombre de quadruplets (a, b, c, d) dont 0, 2 ou 4 des entiers sont pairs.

Si aucun des entiers n'est pair et que les 4 entiers sont donc impairs, alors il y a 5 choix pour chacun des entiers. Il y a donc $5^4 = 625$ tels quadruplets.
Si les quatre entiers sont pairs et qu'aucun d'entre eux n'est donc impair, alors il y a 4 choix pour chacun des entiers. Il y a donc $4^4 = 256$ tels quadruplets.
Si deux entiers sont pairs et deux entiers sont impairs, alors il y a 4 choix pour chacun des entiers pair, 5 choix pour chacun des entiers impairs et 6 paires d'emplacements possibles pour les entiers pairs (ab, ac, ad, bc, bd, cd). Cela signifie que les entiers impairs sont placés dans les deux emplacements restants après que les emplacements des entiers pairs aient été choisis. Donc, il y a $4^2 \cdot 5^2 \cdot 6 = 2400$ tels quadruplets.
En tout, cela signifie qu'il y a $625 + 256 + 2400 = 3281$ quadruplets. Donc, $N = 3281$.
La somme des carrés des chiffres de N est égale à $3^2 + 2^2 + 8^2 + 1^2 = 9 + 4 + 64 + 1 = 78$.

RÉPONSE : 78

24. Soit O le sommet du cube le plus éloigné de la table.
Soit A, B et C les sommets du cube reliés à O par des arêtes.
Puisque le cube a une longueur d'arête de 8, alors $OA = OB = OC = 8$.
Remarquons que $\angle AOB = \angle AOC = \angle BOC = 90°$, ce qui signifie que chacun des triangles AOB, AOC et BOC est un triangle rectangle isocèle. On a donc $AB = \sqrt{2}AO = 8\sqrt{2}$, d'où $AB = AC = BC = 8\sqrt{2}$.
Soit P, Q et R les sommets qui complètent les faces carrées $PAOB$, $QAOC$ et $RBOC$.
Vu d'en haut, le cube ressemble à ceci :



Lorsque le soleil est situé directement au-dessus du sommet supérieur, l'ombre du cube ressemble exactement à l'hexagone « plat » $APBRCQ$. En mathématiques, cela est ce qu'on appelle une *projection.*

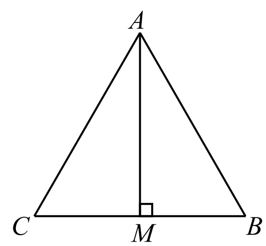
Pour déterminer l'aire de cette figure, il nous faut quelques longueurs. Or, il faut être prudent car certaines des arêtes de la figure ci-dessus ne sont pas « plates ».

On sait que les points A, B et C sont tous situés sur le même plan horizontal et on sait également que $AB = AC = BC = 8\sqrt{2}$. Cela signifie que ces longueurs sont les distances « réelles » entre les points.

On remarque que le quadrilatère plat $PAOB$ est divisé en deux régions de même aire par AB. De même, $QAOC$ est divisé en deux régions de même aire par AC, et $RBOC$ est divisé en deux régions de même aire par BC.

Autrement dit, l'aire du triangle ABC est égale à la moitié de l'aire de l'hexagone $APBRCQ$. Donc, pour trouver l'aire de $APBRCQ$, on double l'aire du triangle ABC.

Il faut donc calculer l'aire du triangle équilatéral ABC. Ce dernier a des côtés de longueur $8\sqrt{2}$. Soit M le milieu de BC. Donc, $BM = CM = 4\sqrt{2}$.



Puisque le triangle ABC est équilatéral, alors AM et BC sont perpendiculaires.

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle AMC,

$$AM = \sqrt{AC^2 - MC^2} = \sqrt{(8\sqrt{2})^2 - (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{128 - 32} = \sqrt{96}$$

Donc, l'aire du triangle ABC est égale à

$$\tfrac{1}{2} \cdot CB \cdot AM = \tfrac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} \cdot \sqrt{96} = 4\sqrt{192} = 4\sqrt{64 \cdot 3} = 4 \cdot 8\sqrt{3} = 32\sqrt{3}$$

Cela signifie que l'aire de l'ombre hexagonale est égale à $64\sqrt{3}$.

Puisque cette valeur est exprimée sous la forme $a\sqrt{b}$, a et b étant des entiers strictement positifs et b n'admettant aucun carré parfait supérieur à 1 comme diviseur, alors $a = 64$ et $b = 3$, d'où on a donc $a + b = 67$.

Réponse : 67

25. Examinons d'abord ce qui se passe lorsque $J = 337$.

On commence avec 337 jetons numérotés en ordre de 1 à 337 et disposés en cercle. Soit, $1, 2, 3, \ldots, 335, 336, 337$.

On supprime le premier jeton (1), on se déplace de 2 positions dans le sens des aiguilles d'une montre et on supprime le jeton (3), on se déplace de 2 positions dans le sens des aiguilles d'une montre et on supprime le jeton (5) et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on supprime les jetons 335 et 337.

Il nous reste donc les jetons $2, 4, 6, \ldots, 332, 334, 336$. Ces jetons diffèrent de 2.

Avant de commencer le deuxième tour, on a les jetons $2, 4, 6, \ldots, 332, 334, 336$.

Ces jetons diffèrent de 2.

Puisque le dernier jeton (337) a été supprimé lors du premier tour, le premier jeton n'est pas supprimé lors du deuxième tour, ce qui signifie qu'on doit supprimer un jeton sur deux en commençant par le jeton 4.

Cela signifie que les jetons restants sont $2, 6, 10, \ldots, 326, 330, 334$. Ces jetons diffèrent de 4.

Avant de commencer le troisième tour, on a les jetons $2, 6, 10, \ldots, 326, 330, 334$.
Ces jetons diffèrent de 4.
Puisque le dernier jeton (336) a été supprimé lors du tour précédent, on doit supprimer un jeton sur deux en commençant par le jeton 6.
Cela signifie que les jetons restants sont $2, 10, 18, \ldots, 314, 322, 330$. Ces jetons diffèrent de 8.

Avant de commencer le quatrième tour, on a les jetons $2, 10, 18, \ldots, 314, 322, 330$.
Ces jetons diffèrent de 8.
Puisque le dernier jeton (334) a été supprimé lors du tour précédent, on doit supprimer un jeton sur deux en commençant par le jeton 10.
Cela signifie que les jetons restants sont $2, 18, 34, \ldots, 290, 306, 322$. Ces jetons diffèrent de 16.

Avant de commencer le cinquième tour, on a les jetons $2, 18, 34, \ldots, 290, 306, 322$.
Ces jetons diffèrent de 16.
Puisque le dernier jeton (330) a été supprimé lors du tour précédent, on doit supprimer un jeton sur deux en commençant par le jeton 18.
Cela signifie que les jetons restants sont $2, 34, 66, 98, 130, 162, 194, 226, 258, 290, 322$. Ces jetons diffèrent de 32.

Avant de commencer le sixième tour, on a les jetons $2, 34, 66, 98, 130, 162, 194, 226, 258, 290, 322$.
Ces jetons diffèrent de 32.
Puisque l'avant-dernier jeton (306) a été supprimé lors du tour précédent, on doit supprimer un jeton sur deux en commençant par le jeton 2.
Cela signifie que les jetons restants sont $34, 98, 162, 226, 290$. Ces jetons diffèrent de 64.

Avant de commencer le septième tour, on a les jetons $34, 98, 162, 226, 290$.
Ces jetons diffèrent de 64.
Puisque le dernier jeton (322) a été supprimé lors du tour précédent, on doit supprimer un jeton sur deux en commençant par le jeton 98.
Cela signifie que les jetons restants sont $34, 162, 290$. Ces jetons diffèrent de 128.

Au huitième tour, on doit supprimer un jeton sur deux en commençant par le jeton 34. Cela signifie qu'il ne reste plus que le jeton 162.

Cela signifie que la plus petite valeur possible de J est d'au moins 162 et d'au plus 337.

Ensuite, on va démontrer que le dernier jeton restant porte également le nombre 162 lorsque $J = 209$. (Ici, la manière dont on *découvre* la réponse est très probablement différente de la manière dont on la *justifie*.)
Avant le premier tour :

$$1, 2, 3, \ldots, 207, 208, 209$$

Après le premier tour (en supprimant un jeton sur deux en commençant par le jeton 1) :

$$2, 4, 6, \ldots, 204, 206, 208$$

Après le deuxième tour (en supprimant un jeton sur deux en commençant par le jeton 4) :

$$2, 6, 10, \ldots, 198, 202, 206$$

Après le troisième tour (en supprimant un jeton sur deux en commençant par le jeton 6) :

$$2, 10, 18, \ldots, 186, 194, 202$$

Après le quatrième tour (en supprimant un jeton sur deux en commençant par le jeton 10) :

$$2, 18, 34, \ldots, 162, 178, 194$$

Après le cinquième tour (en supprimant un jeton sur deux en commençant par le jeton 18) :

$$2, 34, 66, 98, 130, 162, 194$$

Après le sixième tour (en supprimant un jeton sur deux en commençant par le jeton 2) :

$$34, 98, 162$$

Après le septième tour (en supprimant le jeton 98) :

$$34, 162$$

Il restera donc le jeton 162 après le huitième tour (car le jeton 34 aura été supprimé).
Donc, lorsque $J = 209$ et lorsque $J = 337$, le dernier jeton est 162.

Enfin on va montrer que si l'on commence avec J jetons et que le dernier jeton est 162, alors $J \geq 209$, d'où on a alors que la plus petite valeur de J est 209.
Supposons que $J \leq 209$ et que le jeton restant après le dernier tour est celui portant le nombre 162.
Avant chaque tour, les jetons restants diffèrent par une puissance de 2 ; car on supprime un jeton sur deux d'une liste qui diffère de 1, puis un jeton sur deux d'une liste qui diffère de 2 et ainsi de suite.
Les plus petites puissances de 2 sont 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256.

Puisqu'il reste 162 après le dernier tour (qui s'avérera être le huitième tour), les jetons restants devaient différer de 128 avant le huitième tour et étaient donc 34, 162. (Puisque $J \leq 209$, alors on ne pouvait avoir un jeton portant le nombre $162 + 128 = 290$.) De plus, si les jetons différaient de 64 avant le huitième tour, il y aurait eu les jetons 34 et 98 qui auraient tous deux été supprimés. Donc, avant le huitième tour, les jetons étaient 34, 162. Le jeton 34 a été supprimé après le huitième tour.

Avant le septième tour, les jetons différaient de 64.
Donc, ces jetons étaient 34, 98, 162. On remarque que le dernier jeton n'a pas été supprimé lors de ce tour et que le premier jeton est donc supprimé lors du huitième tour, comme prévu.
De plus, on ne pouvait avoir un jeton portant le nombre $162 + 64 = 226$ puisque $J \leq 209$.

Avant le sixième tour, les jetons différaient de 32.
Donc, ces jetons étaient 2, 34, 66, 98, 130, 162, 194. Le dernier jeton n'aurait pas pu être 162 puisque le dernier jeton doit être supprimé lors de ce tour afin que le deuxième jeton (98) soit supprimé lors du septième tour. Donc, le dernier jeton doit être $162 + 32 = 194$. (Remarquons qu'on a déjà rejeté 226.)

Avant le cinquième tour, les jetons différaient de 16.
Puisque le premier jeton (2) a été supprimé lors du sixième tour, le dernier jeton n'est pas supprimé lors du cinquième tour.
Donc, avant ce tour, on avait les jetons suivants :

$$2, 18, 34, 50, 66, 82, 98, 114, 130, 146, 162, 178, 194$$

Lors de ce tour, 178 est le dernier jeton que l'on supprime. (Remarquons que $194 + 16 = 210$ est trop grand.)

Avant le quatrième tour, les jetons différaient de 8.
Puisque le deuxième jeton (18) a été supprimé lors du cinquième tour, le dernier jeton est supprimé lors du quatrième tour.
Donc, avant ce tour, on avait les jetons suivants :

$$2, 10, 18, \ldots, 162, 170, 178, 186, 194, 202$$

On doit ajouter le jeton 202 puisque le jeton 194 est là au cinquième tour. (Remarquons que $202 + 8 = 210$ est trop grand.)

Avant le troisième tour, les jetons différaient de 4.
Puisque le deuxième jeton (10) a été supprimé lors du quatrième tour, le dernier jeton est supprimé lors du troisième tour.
Donc, avant ce tour, on avait les jetons suivants :

$$2, 6, 10, 14, 18, \ldots, 186, 190, 194, 198, 202, 206$$

On doit ajouter le jeton 206 puisque le jeton 202 est là au quatrième tour. (Remarquons que $206 + 4 = 210$ est trop grand.)

Avant le deuxième tour, les jetons différaient de 2.
Puisque le deuxième jeton (6) a été supprimé lors du troisième tour, le dernier jeton est supprimé lors du deuxième tour.
Donc, avant ce tour, on avait les jetons suivants :

$$2, 4, 6, 8, \ldots, 198, 200, 202, 204, 206, 208$$

On doit ajouter le jeton 208 puisque le jeton 206 est là au troisième tour. (Remarquons que $208 + 2 = 210$ est trop grand.)

Avant le premier tour, les jetons différaient de 1.
Puisque le deuxième jeton (4) a été supprimé lors du deuxième tour, le dernier jeton est supprimé lors du premier tour.
Donc, avant ce tour, on avait les jetons suivants :

$$1, 2, 3, 4, \ldots, 204, 205, 206, 207, 208, 209$$

On doit ajouter le jeton 209 puisque le jeton 208 est là au deuxième tour. (Remarquons que $209 + 1 = 210$ est trop grand.)

Donc, on doit avoir au moins 209 jetons pour que le dernier jeton soit 162. Donc, la plus petite valeur possible de J est 209, dont les deux chiffres les plus à droite sont 09.

Réponse : 09