



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Cayley

(10^e année – Sec. IV)

le mercredi 23 février 2022

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 24 février 2022

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)



UNIVERSITY OF
WATERLOO

Durée: 60 minutes

©2022 University of Waterloo

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Directives

1. Attendez le signal du surveillant ou de la surveillante avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponses. Au besoin, demandez à l'enseignante ou à l'enseignant d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur droite de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école et le nom de la ville.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats admissibles.**
6. Les parties A et B du concours sont composées de questions à choix multiple. Chacune de ces questions est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. La réponse juste à chaque question de la partie C est un entier de 0 à 99 inclusivement. Après avoir décidé de votre réponse, remplissez les deux cercles appropriés sur la feuille-réponse. Une réponse à un chiffre (p. ex. $\langle 7 \rangle$) doit être codée avec un zéro non significatif ($\langle 07 \rangle$).
8. Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C. Une réponse fautive n'est *pas* pénalisée. Chaque question laissée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 10 questions.
9. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui visuel seulement.
10. Après le signal du surveillant ou de la surveillante, vous aurez 60 minutes pour terminer.
11. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Pascal, Cayley ou Fermat.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca. Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

Notation: Une réponse fautive *n'est pas pénalisée*.

On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 10 questions.

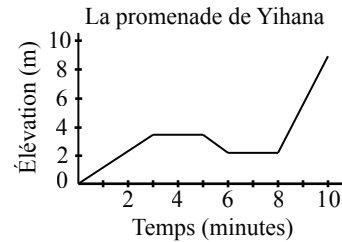
Partie A (5 points par bonne réponse)

- L'expression $2 + (0 \times 2^2)$ est égale à :
(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 5 (E) 6
- L'entier 119 est un multiple de :
(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 11
- Laquelle des fractions suivantes a la plus grande valeur ?
(A) $\frac{3}{10}$ (B) $\frac{4}{7}$ (C) $\frac{5}{23}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{1}{2}$
- La même séquence de figures, soit $\triangle, \square, \heartsuit, \diamond, \circ$, est répétée pour former la régularité suivante :

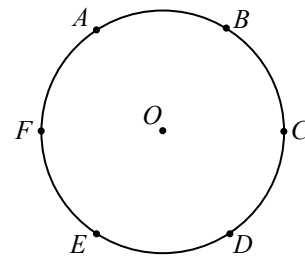
$\triangle, \square, \heartsuit, \diamond, \circ, \triangle, \square, \heartsuit, \diamond, \circ, \dots$

Quelle est la 22^e figure de la régularité ?

- (A) \square (B) \circ (C) \diamond (D) \triangle (E) \heartsuit
- L'expression $(5 \times 5) + (5 \times 5) + (5 \times 5) + (5 \times 5) + (5 \times 5)$ est égale à :
(A) 5 (B) 10 000 (C) 625 (D) 19 525 (E) 125
 - Yihana marche pendant 10 minutes. Le diagramme ci-contre représente son élévation (en mètres) en fonction du temps (en minutes). Pendant combien de temps a-t-elle marché en montée ?
(A) 5 minutes (B) 6 minutes (C) 4 minutes
(D) 7 minutes (E) 8 minutes



- Dans la figure ci-contre, les points A, B, C, D, E et F sont également espacés autour du cercle de centre O . Quelle est la mesure de l'angle AOC ?
(A) 90° (B) 150° (C) 144°
(D) 120° (E) 108°



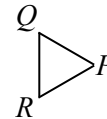
- Un rectangle a une aire de 24 et des côtés dont les longueurs sont des entiers strictement positifs. Le rectangle *ne peut pas* avoir un périmètre de :
(A) 20 (B) 22 (C) 28 (D) 50 (E) 36
- L'opération $a \nabla b$ est définie par $a \nabla b = \frac{a+b}{a-b}$ pour tous les entiers a et b tels que $a \neq b$. Par exemple, $2 \nabla 3 = \frac{2+3}{2-3} = -5$. Si $3 \nabla b = -4$, quelle est la valeur de b ?
(A) 5 (B) -7 (C) 7 (D) -5 (E) 3

10. Sachant que x est égal à 20 % de y et que x est égal à 50 % de z , alors z correspond à quel pourcentage de y ?
- (A) 70 % (B) 10 % (C) 30 % (D) 40 % (E) 60 %

Partie B (6 points par bonne réponse)

11. Un magasin vend des bonbons à un prix fixe par gramme. Le prix de 250 g de bonbons est de 7,50 \$. Quelle masse de bonbons peut-on acheter pour 1,80 \$?
- (A) 6 g (B) 54 g (C) 60 g (D) 120 g (E) 190 g

12. Un triangle équilatéral est fait de carton et repose sur une table. Paola se tient devant la table et voit le triangle dans la position illustrée dans la figure ci-contre. Elle retourne le triangle tout en gardant le côté QR sur la table pendant la durée de la manœuvre. À partir de cette position, Paola retourne à nouveau le triangle, cette fois en gardant le côté PR sur la table pendant la durée de la manœuvre. Du point de vue de Paola, quelle est la position finale du triangle ?



- (A) (B) (C) (D) (E)

13. Deux petits cubes identiques sont placés l'un sur l'autre à côté d'un grand cube. Chacun des deux petits cubes a un volume de 8. La hauteur combinée des petits cubes est égale à la hauteur du grand cube. Quel est le volume du grand cube ?

- (A) 16 (B) 32 (C) 125 (D) 48 (E) 64

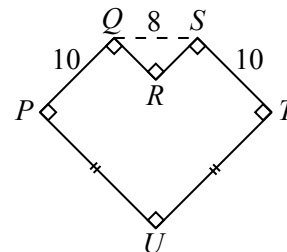
14. L'entier 48 178 contient le bloc de chiffres 178. Les trois entiers 51 870, 19 728 et 38 717 ne contiennent pas le bloc de chiffres 178. Combien d'entiers entre 10 000 et 100 000 contiennent le bloc de chiffres 178 ?

- (A) 280 (B) 300 (C) 270 (D) 310 (E) 260

15. Les entiers a , b et c vérifient les équations $a + 5 = b$, $5 + b = c$ et $b + c = a$. Quelle est la valeur de b ?

- (A) -30 (B) -20 (C) -10 (D) 0 (E) 5

16. Dans la figure ci-contre, l'hexagone $PQRSTU$ a des angles intérieurs mesurant chacun 90° aux sommets P , Q , S , T et U ; et un angle extérieur mesurant 90° au sommet R . De plus, $PU = UT$, $PQ = ST = 10$ et $QS = 8$. Le périmètre de $PQRSTU$ est plus près de :



- (A) 48 (B) 56 (C) 63
(D) 71 (E) 72

17. Zebadiah a 3 chemises rouges, 3 chemises bleues et 3 chemises vertes dans un tiroir. Sans regarder, il retire au hasard les chemises une par une. Il voudrait un ensemble de chemises comprenant soit 3 chemises de la même couleur, soit 3 chemises de couleurs différentes. Quel est le nombre minimum de chemises que Zebadiah doit retirer pour *garantir* qu'il ait un tel ensemble ?
- (A) 4 (B) 3 (C) 6 (D) 5 (E) 7
18. Au début du premier jour, une boîte contient 1 boule noire, 1 boule dorée et aucune autre boule. À la fin de chaque jour et pour chaque boule dorée dans la boîte, 2 boules noires et 1 boule dorée sont ajoutées à la boîte ; cela signifie qu'il y a 5 boules dans la boîte à la fin du premier jour. Si aucune boule n'est retirée de la boîte, combien de boules y aura-t-il dans la boîte à la fin du septième jour ?
- (A) 395 (B) 371 (C) 389 (D) 377 (E) 383
19. L'aire de la région triangulaire bornée par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $y = 2x - 6$ est égale au quart de l'aire de la région triangulaire bornée par l'axe des abscisses et par les droites d'équations $y = 2x - 6$ et $x = d$ ($d > 0$). Quelle est la valeur de d ?
- (A) 9 (B) 6 (C) 8 (D) $3 + 3\sqrt{2}$ (E) 15
20. Sachant que m et n sont des entiers strictement positifs qui vérifient l'équation $3m^3 = 5n^5$, quelle est la plus petite valeur possible de $m + n$?
- (A) 900 (B) 450 (C) 720 (D) 810 (E) 630

Partie C (8 points par bonne réponse).

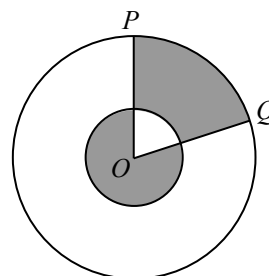
Chaque bonne réponse est un entier de 0 à 99 inclusivement.

Une réponse à un chiffre (p. ex. « 7 ») doit être codée avec un zéro non significatif (« 07 »).

Remarque: L'entier formé par les deux chiffres les plus à droite de 12 345 est 45. L'entier formé par les deux chiffres les plus à droite de 6307 est 7, que l'on code 07.

21. Il y a exactement quatre couples (x, y) d'entiers strictement positifs qui vérifient l'équation $20x + 11y = 881$. Mehdi écrit les quatre valeurs de y et additionne la plus petite et la plus grande de ces valeurs. Quelle somme obtient-il ?

22. Dans la figure ci-contre, deux cercles ont pour centre O . Le petit cercle a un rayon de 1 tandis que le grand cercle a un rayon de 3. Les points P et Q sont placés sur le grand cercle de manière que les deux régions ombrées aient des aires égales. Si $\angle POQ = x^\circ$, quelle est la valeur de x ?



23. André, Boyu, Callista et Diane choisissent chacun au hasard un entier de 1 à 9. Chacun de leurs choix est indépendant des autres entiers choisis et le même entier peut être choisi par plus d'une personne. La probabilité pour que la somme de leurs quatre entiers soit paire est égale à $\frac{N}{6561}$, N étant un entier strictement positif. Quelle est la somme des carrés des chiffres de N ?

24. Un cube ayant des arêtes de longueur 8 est posé en équilibre sur l'un de ses sommets sur une table horizontale de manière que la diagonale partant de ce sommet et traversant l'intérieur du cube jusqu'au sommet le plus éloigné soit verticale. Lorsque le soleil est situé directement au-dessus du sommet supérieur, l'ombre du cube sur la table est un hexagone régulier. On peut écrire l'aire de cette ombre sous la forme $a\sqrt{b}$, a et b étant des entiers strictement positifs et b n'admettant aucun carré parfait supérieur à 1 comme diviseur. Quelle est la valeur de $a + b$?

25. Il y a J jetons disposés dans un cercle, J étant un entier strictement positif quelconque. En se déplaçant dans le sens des aiguilles d'une montre autour du cercle, les jetons sont numérotés, en ordre, de 1 à J . En partant du jeton 1, Évariste :

- (i) Supprime le jeton à la position actuelle.
- (ii) Se déplace dans le sens des aiguilles d'une montre jusqu'au jeton restant suivant.
- (iii) Se déplace à nouveau dans le sens des aiguilles d'une montre jusqu'au jeton restant suivant.
- (iv) Répète les étapes (i) à (iii) jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un seul jeton.

Lorsque $J = 337$, le dernier jeton restant porte le nombre D . Il existe d'autres entiers J pour lesquels le dernier jeton restant porte également le nombre D . Quels sont les deux chiffres les plus à droite de la plus petite valeur possible de J ?



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Cayley de 2022! Chaque année, plus de 265 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignante ou votre enseignant à vous inscrire au concours Galois qui aura lieu en avril.

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- plus d'information à propos du concours Galois
- des copies gratuites des concours précédents
- des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
- des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- inscrire vos élèves aux concours Fryer, Galois et Hypatie qui auront lieu en avril
- jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne
- vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
- vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
- vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
- trouver les résultats de vos élèves dans les concours