Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur 2022

le mercredi 16 novembre 2022
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 17 novembre 2022
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

Partie A

1. Puisque $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$, alors $2^4 = 16$. Donc, $r = 4$.
   Puisque $5 \cdot 5 = 25$, alors $5^2 = 25$. Donc, $s = 2$.
   Donc, $r + s = 4 + 2 = 6$.

   Réponse : 6

2. *Solution 1*
   Puisque $\dfrac{x+y}{2} = 5$, alors $x + y = 2 \cdot 5 = 10$. Puisque $\dfrac{x-y}{2} = 2$, alors $x - y = 2 \cdot 2 = 4$.
   Donc, $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = 10 \cdot 4 = 40$.

   Solution 2
   Puisque $\dfrac{x+y}{2} = 5$ et $\dfrac{x-y}{2} = 2$, alors $\dfrac{x+y}{2} + \dfrac{x-y}{2} = 5 + 2$, que l'on simplifie pour obtenir $x = 7$.
   De plus, $\dfrac{x+y}{2} - \dfrac{x-y}{2} = 5 - 2$, que l'on simplifie pour obtenir $y = 3$.
   Donc, $x^2 - y^2 = 7^2 - 3^2 = 49 - 9 = 40$.

   Réponse : 40

3. Soit m et n les deux entiers.
   On sait que $m + n = 60$ et que $\text{PPCM}(m, n) = 273$.
   On remarque que $273 = 3 \cdot 91 = 3 \cdot 7 \cdot 13$.
   Puisque 273 est un multiple de m et de n, cela signifie que m et n sont tous deux des diviseurs de 273.
   Les diviseurs de 273 sont 1, 3, 7, 13, 21, 39, 91, 273.
   Parmi ces diviseurs, la seule paire dont la somme est égale à 60 est 21 et 39.
   Donc, les deux entiers sont 21 et 39.
   On remarque que puisque $21 = 3 \cdot 7$ et $39 = 3 \cdot 13$, alors un entier est un multiple commun de 21 et 39 quand il admet exactement 3, 7 et 13 comme facteurs premiers. Donc, le plus petit tel entier est $3 \cdot 7 \cdot 13 = 273$, d'où on a donc $\text{PPCM}(21, 39) = 273$.

   Réponse : 21 et 39

4. D'après le théorème de Pythagore,

$$CD^2 = AC^2 - AD^2 = 625^2 - 600^2 = 390\,625 - 360\,000 = 30\,625 = 175^2$$

   Puisque $CD > 0$, on a $CD = 175$.
   Soit $\angle DAC = \theta$. Donc, $\angle BAC = 2\angle DAC = 2\theta$.
   Dans le triangle ADC, on voit que $\sin\theta = \dfrac{CD}{AC} = \dfrac{175}{625} = \dfrac{7}{25}$ et $\cos\theta = \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{600}{625} = \dfrac{24}{25}$.
   Donc,

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2 \cdot \frac{7}{25} \cdot \frac{24}{25} = \frac{336}{625}$$

   Puisque $\sin(\angle BAC) = \dfrac{BC}{AC}$, alors

$$BC = AC\sin(\angle BAC) = 625\sin 2\theta = 625 \cdot \frac{336}{625}$$

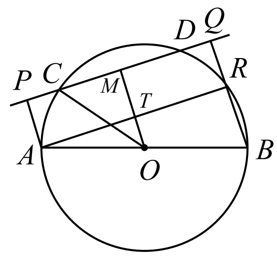
   soit $BC = 336$.

   Réponse : 336

5. Puisque le cercle a un diamètre de $2\sqrt{19}$, son rayon est égal à $\sqrt{19}$.
Soit $AP = 2x$. Donc, $BQ = 2AP = 4x$.
Soit $CD = 2y$ et M le milieu de CD. Donc, $CM = MD = y$.
On joint le point A au point R. Puisque AB est un diamètre, alors $\angle ARB = 90°$.
Puisque le quadrilatère $PQRA$ a des angles droits à P, Q et R, alors il doit avoir quatre angles droits, ce qui veut dire que c'est un rectangle.
Donc, $AR = PQ = PC + CD + DQ = 1 + 2y + 1 = 2y + 2$ et $RQ = AP = 2x$.
Puisque $BQ = 4x$, alors $RB = BQ - RQ = 4x - 2x = 2x$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ARB, on obtient

$$\begin{aligned} AR^2 + RB^2 &= AB^2 \\ (2y+2)^2 + (2x)^2 &= (2\sqrt{19})^2 \\ (y+1)^2 + x^2 &= 19 \end{aligned}$$

On joint O et M.



Puisque M est le milieu de la corde CD, alors OM est perpendiculaire à CD.
Puisque AR est parallèle à CD (côtés opposés dans le rectangle $PQRA$), alors OM est également perpendiculaire à AR et coupe AR en T.
Considérons les triangles ATO et ARB. Ces triangles sont semblables puisqu'ils partagent un angle (l'angle au point A) et que chacun d'eux est rectangle (en T et en R respectivement).
Puisque $\dfrac{AO}{AB} = \dfrac{1}{2}$ (rayon et diamètre), alors $\dfrac{TO}{RB} = \dfrac{1}{2}$, d'où $TO = \dfrac{1}{2} \cdot RB = x$.
Donc, $OM = MT + TO = 2x + x = 3x$ car $MT = PA$ (puisque MT est parallèle au côté PA du rectangle $PQRA$ et que ses extrémités se trouvent sur les côtés opposés du rectangle).
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle OMC, on a

$$\begin{aligned} CM^2 + OM^2 &= CO^2 \\ y^2 + (3x)^2 &= (\sqrt{19})^2 \qquad \text{(puisque } CO \text{ est un rayon)} \\ y^2 + 9x^2 &= 19 \end{aligned}$$

Puisque $(y+1)^2 + x^2 = 19$, alors on multiplie chaque membre de l'équation pour obtenir $9(y+1)^2 + 9x^2 = 171$.
On soustrait, membre par membre, l'équation $y^2 + 9x^2 = 19$ de l'équation précédente pour obtenir

$$\begin{aligned} 9(y^2 + 2y + 1) - y^2 &= 171 - 19 \\ 8y^2 + 18y - 143 &= 0 \\ (4y - 13)(2y + 11) &= 0 \end{aligned}$$

Puisque $y > 0$, alors $y = \dfrac{13}{4}$. Donc, $x^2 = 19 - (y+1)^2 = 19 - \left(\dfrac{17}{4}\right)^2 = \dfrac{304}{16} - \dfrac{289}{16} = \dfrac{15}{16}$.
Puisque $x > 0$, alors $x = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$. Donc, $AP = 2x = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$.

Réponse : $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

6. On représente une bille rouge, une bille bleue et une bille verte par les lettres R, B et V, respectivement.
Puisqu'il y a 15 billes, dont 3 sont rouges, 5 sont bleues et 7 sont vertes, alors on peut retirer les 15 billes dans $\dfrac{15!}{3!5!7!}$ ordres différentes.
Si la couleur rouge est la première couleur dont il ne reste plus de billes dans le sac, cela veut dire que la dernière bille qui a été retirée devait être de couleur bleue ou verte. On examine ces deux cas.

Supposons que la dernière bille qui a été retirée est B.
Les 4 B restantes sont donc placées parmi les 14 premières billes, ce que l'on peut faire de $\dbinom{14}{4}$ façons.
Il reste donc 10 « places ». La dernière de ces 10 billes ne peut pas être R, sinon la dernière V serait choisie avant la dernière R. Donc, la dernière de ces 10 billes est V.
Les 6 V restantes sont donc placées parmi les 9 places restantes, ce que l'on peut faire de $\dbinom{9}{6}$ façons.
Les 3 R sont ensuite placées dans les 3 places restantes.
Donc, il y a $\dbinom{14}{4}\dbinom{9}{6}$ ordres lorsque la dernière bille est B.

Supposons que la dernière bille qui a été retirée est V.
Les 6 V restantes sont donc placées parmi les 14 premières billes, ce que l'on peut faire de $\dbinom{14}{6}$ façons.
Il reste donc 8 places. La dernière de ces 8 billes ne peut pas être R, sinon la dernière B serait choisie avant la dernière R. Donc, la dernière de ces 8 billes est B.
Les 4 B restantes sont donc placées parmi les 7 places restantes, ce que l'on peut faire de $\dbinom{7}{4}$ façons.
Les 3 R sont ensuite placées dans les 3 places restantes.
Donc, il y a $\dbinom{14}{6}\dbinom{7}{4}$ ordres lorsque la dernière bille est V.

Donc, le nombre total de façons dont on peut retirer les billes de manière que la couleur rouge soit la première couleur dont il ne reste plus de billes dans le sac est égal à $\dbinom{14}{4}\dbinom{9}{6}+\dbinom{14}{6}\dbinom{7}{4}$.

Cela signifie que la probabilité recherchée, p, est égale à

$$\begin{aligned}
p &= \frac{\binom{14}{4}\binom{9}{6} + \binom{14}{6}\binom{7}{4}}{\frac{15!}{3!5!7!}} \\
&= \frac{\frac{14!}{4!10!}\frac{9!}{6!3!} + \frac{14!}{6!8!}\frac{7!}{4!3!}}{\frac{15!}{3!5!7!}} \\
&= \frac{14!}{15!}\frac{9!}{10!}\frac{5!}{4!}\frac{7!}{6!}\frac{3!}{3!} + \frac{14!}{15!}\frac{7!}{8!}\frac{7!}{6!}\frac{5!}{4!}\frac{3!}{3!} \\
&= \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{10} \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1 + \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{8} \cdot 7 \cdot 5 \cdot 1 \\
&= \frac{7}{30} + \frac{7}{24} = \frac{28}{120} + \frac{35}{120} = \frac{63}{120} = \frac{21}{40}
\end{aligned}$$

Réponse : $\dfrac{21}{40}$

Partie B

1. (a) Les points A et B sont les abscisses à l'origine de la parabole.
Pour déterminer leurs coordonnées, on pose $y = 0$ que l'on reporte dans l'équation pour obtenir $0 = -x^2 + 16$ ou $x^2 = 16$, soit $x = \pm 4$.
Donc, A a pour coordonnées $(-4, 0)$ et B a pour coordonnées $(4, 0)$.

(b) On détermine d'abord les coordonnées de M et N.
Ces points sont situés sur la droite horizontale d'équation $y = 7$ et sur la parabole d'équation $y = -x^2 + 16$. Donc, pour déterminer les points d'intersection, on pose l'égalité entre les y des équations (les membres de gauche) et on détermine les valeurs de x de l'équation qui en résulte. On obtient donc $7 = -x^2 + 16$ ou $x^2 = 9$, soit $x = \pm 3$.
Donc, M a pour coordonnées $(-3, 7)$ et N a pour coordonnées $(3, 7)$.
Les côtés MN et AB du trapèze $MNBA$ sont parallèles et horizontaux.
Leurs longueurs sont $MN = 3 - (-3) = 6$ et $AB = 4 - (-4) = 8$.
De plus, $MNBA$ a une hauteur de 7 puisque MN est situé le long de $y = 7$ et AB est situé le long de $y = 0$.
Donc, l'aire de $MNBA$ est égale à $\frac{1}{2}(6 + 8) \cdot 7 = 49$.

(c) L'origine O a pour coordonnées $(0, 0)$.
Étant donné que le sommet V de la parabole est situé sur l'axe des ordonnées, son abscisse est égal à $x = 0$. Donc, pour déterminer son ordonnée, on reporte $x = 0$ dans l'équation $y = -x^2 + 16$ pour obtenir $y = 16$. Le sommet V de la parabole a donc pour coordonnées $(0, 16)$.
Lorsqu'on reporte $y = -33$ dans l'équation de la parabole $y = -x^2+16$, on obtient $x^2 = 49$, soit $x = \pm 7$.
On peut déterminer l'aire du quadrilatère $VPOQ$ en additionnant les aires des triangles VOP et VOQ.
Supposons que la base de chacun des triangles est le côté vertical VO de longueur 16 et que la hauteur de chacun des triangles est mesurée le long de l'axe des abscisses.
Chacun des triangles a donc une hauteur de 7 puisque les points P et Q sont équidistants de l'axe des ordonnées (chacun des points étant situé à une distance de 7 de l'axe des ordonnées).
Donc, l'aire de $VPOQ$ est égale à $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 7 = 112$.

2. (a) Remarquons d'abord que $\sqrt{a^2 + a} = \frac{2}{3}$ est équivalent à $a^2 + a = \frac{4}{9}$.
On multiplie chaque membre de l'équation par 9 et on l'exprime sous forme générale pour obtenir l'équation équivalente $9a^2 + 9a - 4 = 0$.
On factorise pour obtenir $(3a - 1)(3a + 4) = 0$, d'où $a = \frac{1}{3}$ ou $a = -\frac{4}{3}$.
Puisque $a > 0$, alors $a = \frac{1}{3}$, que l'on reporte dans l'équation initiale pour obtenir

$$\sqrt{a^2 + a} = \sqrt{\left(\tfrac{1}{3}\right)^2 + \tfrac{1}{3}} = \sqrt{\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{3}} = \sqrt{\tfrac{4}{9}} = \tfrac{2}{3}$$

Donc, lorsque $a > 0$, l'équation admet une seule solution, soit $a = \frac{1}{3}$.

(b) On développe et simplifie pour obtenir

$$(m + \tfrac{1}{2})^2 + (m + \tfrac{1}{2}) = m^2 + m + \tfrac{1}{4} + m + \tfrac{1}{2} = m^2 + 2m + \tfrac{3}{4}$$

Puisque m est un entier strictement positif, alors $m^2 + 2m + \frac{3}{4} > m^2$.
De plus, $m^2 + 2m + \frac{3}{4} < m^2 + 2m + 1 = (m + 1)^2$.
Donc, $m^2 < m^2 + 2m + \frac{3}{4} < (m + 1)^2$ ce qui signifie que le carré parfait le plus près est soit

m^2, soit $(m+1)^2$.
La différence entre $m^2+2m+\frac{3}{4}$ et m^2 est égale à $2m+\frac{3}{4}$.
La différence entre $m^2+2m+\frac{3}{4}$ et $(m+1)^2$ est égale à $\frac{1}{4}$.
Puisque m est un entier strictement positif, alors $2m+\frac{3}{4}>\frac{1}{4}$. Donc, $(m+\frac{1}{2})^2+(m+\frac{1}{2})$ est plus près de $(m+1)^2$ et leur différence est égale à $\frac{1}{4}$.

(c) Un fait qui sera important tout au long de cette solution est que la valeur de l'expression $c+\sqrt{c}$ augmente à mesure que la valeur de c augmente.
Autrement dit, lorsque $0<c<d$, alors $c+\sqrt{c}<d+\sqrt{d}$.
Cette inéquation est vraie car lorsque $0<c<d$, alors $\sqrt{c}<\sqrt{d}$, d'où $c+\sqrt{c}<d+\sqrt{d}$.

Avant d'établir une généralisation, on détermine le nombre d'entiers strictement positifs c qui vérifient l'inéquation pour chacun de $n=1$, $n=2$ et $n=3$.

Lorsque $n=1$, l'inéquation est $1<\sqrt{c+\sqrt{c}}<2$.
Puisque chaque membre est positif, alors on peut élever chacun d'eux au carré pour obtenir l'inéquation équivalente $1<c+\sqrt{c}<4$.
On voit que $1+\sqrt{1}=2$ et que $3<2+\sqrt{2}<4$ (puisque la valeur de $\sqrt{2}$ est située entre 1 et 2) et $3+\sqrt{3}>4$ (puisque $\sqrt{3}>1$).
Donc, lorsque $n=1$, 2 valeurs de c vérifient l'inéquation.

Lorsque $n=2$, l'inéquation est $2<\sqrt{c+\sqrt{c}}<3$, ce qui est équivalent à $4<c+\sqrt{c}<9$.
On remarque que $2+\sqrt{2}<4$ (puisque $\sqrt{2}<2$), que $4<3+\sqrt{3}<5$ (puisque la valeur de $\sqrt{3}$ est située entre 1 et 2), que $8<6+\sqrt{6}<9$ (puisque la valeur de $\sqrt{6}$ est située entre 2 et 3) et que $9<7+\sqrt{7}$ (puisque $\sqrt{7}>2$).
Puisque $c+\sqrt{c}$ est croissant, l'inéquation $4<c+\sqrt{c}<9$ est uniquement vérifiée pour les entiers strictement positifs $c=3,4,5,6$ (puisqu'elle est vérifiée pour $c=3$ et $c=6$, elle est donc vérifiée pour tous les entiers entre $c=3$ et $c=6$).

Lorsque $n=3$, l'inéquation est $3<\sqrt{c+\sqrt{c}}<4$, ce qui est équivalent à $9<c+\sqrt{c}<16$.
En suivant le même raisonnement, on obtient que cette inégalité est vérifiée par les entiers strictement positifs $c=7,8,9,10,11,12$.

Donc, pour $n=1,2,3$, on obtient 2, 4 et 6 solutions.
D'après ces valeurs de n, on peut faire la supposition qu'il existe $2n$ valeurs de c qui vérifient l'inéquation pour une valeur générale de n. De plus, pour chaque n, la plus grande valeur de c qui vérifie l'inéquation semble être $c=n(n+1)$ tandis que la plus petite valeur de c qui vérifie l'inéquation semble être $c=n(n-1)+1$. (Vérifiez que ces conjectures sont bien validées par les cas spécifiques ci-dessus.)

D'après notre travail précédent, on sait que l'inéquation $n<\sqrt{c+\sqrt{c}}<n+1$ est équivalente à l'inéquation $n^2<c+\sqrt{c}<n^2+2n+1$.
Notre stratégie consiste maintenant à démontrer que l'inéquation

$$n^2<c+\sqrt{c}<n^2+2n+1$$

(I) n'est pas vérifiée lorsque $c=n(n-1)$, (II) est vérifiée lorsque $c=n(n-1)+1$, (III) est vérifiée lorsque $c=n(n+1)$ et (IV) n'est pas vérifiée lorsque $c=n(n+1)+1$.
Puisque l'expression $c+\sqrt{c}$ est croissante, ces faits vont démontrer que les entiers strictement positifs c qui vérifient l'inéquation sont exactement les valeurs de c qui vérifient $n(n-1)+1\le c\le n(n+1)$, dont il y en a

$$n(n+1)-(n(n-1)+1)+1=n^2+n-(n^2-n+1)+1=2n$$

et donc le nombre de c sera pair, ce qu'il fallait.

Étape (I)

On remarque que lorsque $n \geq 1$, on a $n(n-1) = n^2 - n < n^2$, d'où $\sqrt{n(n-1)} < \sqrt{n^2} = n$.
Donc, lorsque $c = n(n-1)$, on voit que

$$c + \sqrt{c} = n(n-1) + \sqrt{n(n-1)} = n^2 - n + \sqrt{n(n-1)} < n^2 - n + n = n^2$$

et dont l'inéquation $n^2 < c + \sqrt{c} < n^2 + 2n + 1$ n'est pas vérifiée.

Étape (II)

Ensuite, on remarque que lorsque $n \geq 1$, on a $n(n-1) + 1 = n^2 - n + 1 > n^2 - 2n + 1$, d'où $\sqrt{n(n-1)+1} > \sqrt{n^2 - 2n + 1} = n - 1$.
De plus, lorsque $n \geq 1$, on a $n(n-1)+1 = n^2-n+1 \leq n^2$, d'où $\sqrt{n(n-1)+1} \leq \sqrt{n^2} = n$.
Donc, lorsque $c = n(n-1) + 1$, on voit que

$$c+\sqrt{c} = n(n-1)+1+\sqrt{n(n-1)+1} = n^2-n+1+\sqrt{n(n-1)+1} > n^2-n+1+(n-1) = n^2$$

De plus, lorsque $c = n(n-1) + 1$, on voit que

$$c + \sqrt{c} = n(n-1) + 1 + \sqrt{n(n-1)+1} \leq n^2 - n + 1 + n = n^2 + 1 < n^2 + 2n + 1$$

Donc, l'inéquation $n^2 < c + \sqrt{c} < n^2 + 2n + 1$ est vérifiée.

On relie (I) et (II) à (III) et (IV)

On a démontré que, pour tous les entiers $n \geq 1$,

$$n(n-1) + \sqrt{n(n-1)} < n^2$$

et

$$n^2 < (n(n-1)+1) + \sqrt{n(n-1)+1} < n^2 + 2n + 1$$

Cela signifie que, pour tous les entiers $m \geq 1$,

$$m(m-1) + \sqrt{m(m-1)} < m^2$$

et

$$m^2 < (m(m-1)+1) + \sqrt{m(m-1)+1} < (m+1)^2$$

On pose $m = n + 1$ et on restreint $n \geq 1$ (d'où $m \geq 2$) pour obtenir

$$n(n+1) + \sqrt{n(n+1)} < (n+1)^2 \qquad (*)$$

et

$$(n+1)^2 < (n(n+1)+1) + \sqrt{n(n+1)+1} < (n+2)^2$$

Ces dernières inéquations démontrent que $n^2 < c+\sqrt{c} < (n+1)^2$ n'est pas vérifiée lorsque $c = n(n+1) + 1$, ce qui est le point (IV).
Puisque $n(n+1) > n^2$, on change $(*)$ à

$$n^2 < n(n+1) + \sqrt{n(n+1)} < (n+1)^2$$

ce qui est le point (III).

On a démontré les inéquations recherchées pour $c = n(n-1)$, $c = n(n-1)+1$, $c = n(n+1)$, et $c = n(n+1) + 1$. Donc, cela signifie que le nombre d'entiers strictement positifs c qui vérifient l'inéquation pour une valeur donnée de n est égal à une valeur paire, soit $2n$, ce qu'il fallait démontrer.

3. (a) On remarque que si $(a, b, c, d) = (A, B, C, D)$ vérifie l'équation $a - b = c - d$ (donc si $A - B = C - D$), alors $(a, b, c, d) = (B, A, D, C)$ et $(a, b, c, d) = (C, D, A, B)$ et $(a, b, c, d) = (D, C, B, A)$ vérifient également l'équation puisque

$$B - A = D - C \qquad C - D = A - B \qquad D - C = B - A$$

Soit $g(n)$ le nombre de quadruplets (a, b, c, d) d'entiers distincts dans S_n tels que $a-b = c-d$ avec $a < b$ et $c < d$ et $a < c$.
Alors $f(n) = 4g(n)$ puisque chacun des quadruplets comptés dans $g(n)$ peut être transformé en quatre quadruplets comptés dans $f(n)$ en utilisant les quatre arrangements ci-dessus.
On remarque que chaque quadruplet compté dans $f(n)$ a soit $a < b$ et $c < d$, soit $a > b$ et $c > d$ (puisque $a - b = c - d$ et donc $a - b$ et $c - d$ ont les mêmes signes) et a soit $a < c$, soit $a > c$ (puisque $a \neq c$).
Donc, les quadruplets comptés dans $f(n)$ peuvent être regroupés en ensembles de quatre quadruplets dont exactement un seul vérifie $a < b$ et $c < d$ et $a < c$.

Pour déterminer la valeur de $f(6)$, il faut d'abord déterminer la valeur de $g(6)$.
Pour déterminer la valeur de $g(6)$, on considère les couples (a, b) possibles tels que $a < b$ et on compte le nombre de couples (c, d) possibles pour chacun d'entre eux.
On considère les couples (a, b) en procédant par valeur croissante de $b-a$ (en se rappelant que $c < d$ et $a < c$) :

- $(a, b) = (1, 2)$: les possibilités pour (c, d) sont $(3, 4)$, $(4, 5)$, $(5, 6)$
- $(a, b) = (2, 3)$: les possibilités pour (c, d) sont $(4, 5)$, $(5, 6)$
- $(a, b) = (3, 4)$: la seule possibilité pour (c, d) est $(5, 6)$
- $(a, b) = (1, 3)$: les possibilités pour (c, d) sont $(2, 4)$, $(4, 6)$
- $(a, b) = (2, 4)$: la seule possibilité pour (c, d) est $(3, 5)$
- $(a, b) = (3, 5)$: la seule possibilité pour (c, d) est $(4, 6)$
- $(a, b) = (1, 4)$: les possibilités pour (c, d) sont $(2, 5)$, $(3, 6)$
- $(a, b) = (2, 5)$: la seule possibilité pour (c, d) est $(3, 6)$
- $(a, b) = (1, 5)$: la seule possibilité pour (c, d) est $(2, 6)$

Puisqu'il y a donc $3+2+1+2+1+1+2+1+1 = 14$ quadruplets (a, b, c, d), alors on a $g(6) = 14$ et donc $f(6) = 56$.

(b),(c) Pour répondre aux parties (b) et (c), on doit élaborer une expression explicite qui définit $g(n)$ (et donc $f(n)$) en fonction de n. Avec cette information en main, ont peut alors répondre aux questions.
Supposons que n est un entier pair strictement positif. On écrit $n = 2m$, m étant un entier strictement positif tel que $m \geq 1$.
Pour élaborer une expression qui définit $g(2m)$, on compte le nombre de quadruplets (a, b, c, d) d'entiers distincts dans S_n tels que $a - b = c - d$ avec $a < b$ et $c < d$ et $a < c$.
Puisque $a < b$ et $a < c$ et $b \neq c$, alors soit $b < c$, soit $b > c$.
On a donc deux cas pour l'ordre de a, b, c, d : le premier étant $a < b < c < d$ et le second étant $a < c < b < d$. Remarquons que $d > b$ dans les deux cas car « l'écart » entre a et b est égal à l'écart entre c et d.

<u>1^{er} cas : $a < b < c < d$</u>

Supposons que $b - a = d - c = t$, t étant un entier strictement positif quelconque.
Puisque $d - a = d - c + c - a > d - c + b - a = 2t$ et $d - a \leq 2m - 1$, alors $2t \leq 2m - 1$, ce qui signifie que $t \leq m - \frac{1}{2}$. Puisque t et m sont des entiers, alors $t \leq m - 1$.
On compte le nombre de quadruplets (a, b, c, d) tels que $a < b < c < d$ pour chaque valeur de t de 1 à $m - 1$.
Supposons que $t = 1$.
Dans ce cas, $b = a + 1$ et le couple (c, d) peut être aussi petit que $(a + 2, a + 3)$ et aussi grand que $(2m - 1, 2m)$.
Pour le couple $(a, b) = (a, a + 1)$, il y a $2m - (a + 3) + 1 = 2m - a - 2$ couples (c, d).
Puisque a peut prendre n'importe quelle valeur de 1 à $2m-3$ (ce dernier donne le quadruplet $(2m - 3, 2m - 2, 2m - 1, 2m)$), il y a

$$(2m - 3) + (2m - 4) + \cdots + 2 + 1 = \tfrac{1}{2}(2m - 3)(2m - 2)$$

quadruplets (a, b, c, d) en tout dans le cas $t = 1$.

De façon plus générale, supposons que $1 \leq t \leq m - 1$.
Dans ce cas, $b = a + t$ et le couple (c, d) peut être aussi petit que $(a + t + 1, a + 2t + 1)$ et aussi grand que $(2m - t, 2m)$.
Pour le couple $(a, b) = (a, a + t)$, il y a donc $2m - (a + 2t + 1) + 1 = 2m - a - 2t$ couples (c, d).
Puisque a peut prendre n'importe quelle valeur de 1 à $2m - 2t - 1$ (ce dernier donne le quadruplet $(2m - 2t - 1, 2m - t - 1, 2m - t, 2m)$), il y a

$$(2m - 2t - 1) + (2m - 2t - 2) + \cdots + 2 + 1 = \tfrac{1}{2}(2m - 2t - 1)(2m - 2t)$$

quadruplets (a, b, c, d) pour chaque t avec $1 \leq t \leq m - 1$.

On remarque que

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(2m - 2t - 1)(2m - 2t) &= (2m - 2t - 1)(m - t)\\ &= 2m^2 - 2mt - 2mt + 2t^2 - m + t\\ &= 2t^2 + t(-4m + 1) + (2m^2 - m)\end{aligned}$$

D'après le renseignement utile, lorsqu'on additionne $2t^2$ pour chaque t de 1 à $m - 1$, on obtient $2 \cdot \dfrac{(m - 1)m(2m - 1)}{6}$.
Le fait d'additionner $t(-4m+1)$ pour chaque t de 1 à $m-1$ est équivalent au fait de multiplier $(-4m + 1)$ par la somme des entiers de 1 à $m - 1$, ce qui donne $(-4m + 1) \cdot \frac{1}{2}(m - 1)m$.
Lorsqu'on additionne $(2m^2 - m)$ pour chaque t de 1 à $m-1$, on obtient $(m-1)(2m^2 - m)$.
En additionnant ces sommes partielles, on obtient le nombre total de triplets dans ce cas, ce qui est

$$\begin{aligned}&2 \cdot \frac{(m - 1)m(2m - 1)}{6} + (-4m + 1) \cdot \tfrac{1}{2}(m - 1)m + (m - 1)(2m^2 - m)\\ &\qquad = m(m - 1)\left(\frac{2m - 1}{3} + \frac{-4m + 1}{2} + (2m - 1)\right)\\ &\qquad = m(m - 1)\left(\frac{4m - 2}{6} + \frac{-12m + 3}{6} + \frac{12m - 6}{6})\right)\\ &\qquad = m(m - 1) \cdot \frac{4m - 5}{6}\end{aligned}$$

<u>2e cas : $a < c < b < d$</u>
Supposons que $b - a = d - c = t$, t étant un entier strictement positif quelconque.
Puisque $2m \geq d \geq b + 1$, alors $t = b - a \leq 2m - 1 - 1 = 2m - 2$. Puisque $a < c < b$, alors $b \geq a + 2$, ce qui signifie que $t \geq 2$.
Donc, t peut prendre n'importe quelle valeur dans l'intervalle $2 \leq t \leq 2m - 1$.
Pour chaque couple de valeurs (a, b), la valeur de c peut, en théorie, aller de $a + 1$ jusqu'à $b - 1$ avec la restriction que $d = c + t$ doit toujours être au plus égal à $2m$.

Notre stratégie est de considérer les valeurs possibles de t, en commençant dans chaque cas avec $a = 1$ pour établir les quadruplets possibles dans ce cas lorsque $a = 1$, puis à compter le nombre de façons dont ces positions relatives pour (a, b, c, d) peuvent être « glissées » jusqu'à ce que d atteigne $2m$.

Supposons que $t = 2$ et $a = 1$. Dans ce cas, $b = a + t = 3$. Puisque $a < c < b$, alors $c = 2$. On a donc $d = 4$.
Le quadruplet de base $(a, b, c, d) = (1, 3, 2, 4)$ peut voir chacune de ses composantes augmentée de 1 jusqu'à ce que l'on obtienne le plus grand quadruplet possible avec ce positionnement relatif, ce qui est $(a, b, c, d) = (2m - 3, 2m - 1, 2m - 2, 2m)$.
Il y a $2m - 4 + 1 = 2m - 3$ quadruplets dans ce cas.

Supposons que $t = 3$ et $a = 1$. Dans ce cas, $b = 4$, d'où on a donc $c = 2$ ou $c = 3$.
On obtient les quadruplets de base $(a, b, c, d) = (1, 4, 2, 5)$ et $(a, b, c, d) = (1, 4, 3, 6)$.
Il y a $2m - 4$ et $2m - 5$ quadruplets possibles de ces deux formes.

Considérons ensuite une valeur générale de t avec $2 \leq t \leq m$, ainsi que $a = 1$.
Dans ce cas, $b = t + 1$. On a donc $2 \leq c \leq t$.
Cela donne les quadruplets de base $(a, b, c, d) = (1, t + 1, c, c + t)$ pour $2 \leq c \leq m$.
Pour chacune de ces valeurs de c, la valeur correspondante de d vérifie $d \leq 2m$, puisque $d = c + t \leq m + m = 2m$.
Pour une valeur donnée de c, il existe $2m - (c + t) + 1 = 2m - c - t + 1$ tels quadruplets.
À mesure que c augmente de 2 à t, on voit qu'il y a

$$(2m - t - 1) + (2m - t - 2) + \cdots + (2m - 2t + 2) + (2m - 2t + 1)$$

quadruplets. Il y a $t - 1$ termes dans cette somme.
On peut réécrire cette somme comme suit

$$\begin{aligned}
&(2m - t - 1) + (2m - t - 2) + \cdots + (2m - 2t + 2) + (2m - 2t + 1)\\
&\quad = ((2m - 2t) + (t - 1)) + ((2m - 2t) + (t - 2)) + \cdots + ((2m - 2t) + 2) + ((2m - 2t) + 1)\\
&\quad = (t - 1)(2m - 2t) + (1 + 2 + \cdots + (t - 2) + (t - 1))\\
&\quad = (t - 1)(2m - 2t) + \tfrac{1}{2}t(t - 1)\\
&\quad = 2mt - 2t^2 - 2m + 2t + \tfrac{1}{2}t^2 - \tfrac{1}{2}t\\
&\quad = -\tfrac{3}{2}t^2 + t(2m + \tfrac{3}{2}) - 2m
\end{aligned}$$

Lorsque $t = 1$, cette expression est égale à 0.
Donc, on peut additionner ces expressions pour $t = 1$ à $t = m$ et obtenir la même somme qu'en additionnant celles de $t = 2$ à $t = m$.

Cette somme est donc égale à

$$\begin{aligned}
-\tfrac{3}{2}(1^2+2^2+\cdots+m^2)&+(1+2+\cdots+m)(2m+\tfrac{3}{2})-2m\cdot m \\
&=-\frac{3}{2}\cdot\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}+\frac{4m+3}{2}\cdot\frac{m(m+1)}{2}-2m^2 \\
&=-\frac{m(m+1)(2m+1)}{4}+\frac{m(m+1)(4m+3)}{4}-2m^2 \\
&=\frac{m(m+1)(2m+2)}{4}-2m^2 \\
&=\frac{m}{2}((m+1)^2-4m) \\
&=\frac{m}{2}(m^2-2m+1) \\
&=\frac{m(m-1)^2}{2}
\end{aligned}$$

Enfin, considérons une valeur générale de t avec $m+1 \leq t \leq 2m-2$.
De nouveau, $(a,b,c,d)=(1,t+1,c,c+t)$ et $2 \leq c \leq t$, mais $c+t \leq 2m$ signifie que $c \leq 2m-t \leq 2(t-1)-t=t-2$, ce qui est strictement inférieur à la limite supérieure provenant de la valeur de b.
Autrement dit, lorsque t est suffisamment grand, quelques-unes des valeurs de c comprises entre 2 et t produiront des valeurs admissibles de d tandis que d'autres valeurs de c dans cet intervalle produiront des valeurs inadmissibles de d.
Comme dans nos démarches ci-dessus, il y a $2m-c-t+1$ triplets qui fonctionnent pour une valeur donnée de c, mais la limite supérieure de c est différente.
À mesure que c augmente de 2 à $2m-t$, on voit qu'il y a

$$(2m-t-1)+(2m-t-2)+\cdots+2+1$$

quadruplets, ce qui est égal à $\frac{1}{2}(2m-t-1)(2m-t)$.
On doit donc additionner ces expressions pour $t=m+1$ à $t=2m-2$.
On pose $s=2m-1-t$, ce qui veut dire qu'on doit additionner $\frac{1}{2}s(s+1)=\frac{1}{2}s^2+\frac{1}{2}s$ pour $s=1$ à $s=m-2$.
On a donc

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(1^2+2^2+\cdots(m-2)^2)&+\tfrac{1}{2}(1+2+\cdots+(m-2)) \\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{(m-2)(m-1)(2m-3)}{6}+\frac{1}{2}\frac{(m-2)(m-1)}{2} \\
&=\frac{(m-2)(m-1)}{4}\left(\frac{2m-3}{3}+1\right) \\
&=\frac{(m-2)(m-1)}{4}\cdot\frac{2m}{3} \\
&=\frac{(m-2)(m-1)m}{6}
\end{aligned}$$

Cela signifie que

$$\begin{aligned} g(2m) &= m(m-1)\cdot\frac{4m-5}{6}+\frac{m(m-1)^2}{2}+\frac{(m-2)(m-1)m}{6} \\ &= \frac{m(m-1)}{6}\cdot((4m-5)+3(m-1)+m-2) \\ &= \frac{m(m-1)}{6}\cdot(8m-10) \\ &= \frac{m(m-1)(4m-5)}{3} \end{aligned}$$

d'où on a donc $f(2m)=4g(2m)=\dfrac{4m(m-1)(4m-5)}{3}$.
D'après cette formule,

- lorsque $m=1$, on obtient $f(2)=0$,
- lorsque $m=2$, on obtient $f(4)=\dfrac{4\cdot 2\cdot 1\cdot 3}{3}=8$ et
- lorsque $m=3$, on obtient $f(6)=\dfrac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 7}{3}=56$,

ce qui correspond à nos résultats précédents.
Donc, $f(40)=\dfrac{4\cdot 40\cdot 39\cdot 155}{3}=322\,400$, ce qui est la réponse à la partie (b).
(Remarquons qu'on aurait pu déterminer cette valeur en calculant directement la valeur de $g(40)$.)

Enfin, on doit trouver deux entiers pairs strictement positifs $n=2m$ (avec $n<2022$ et donc avec $m<1011$) pour lesquels 2022 est un diviseur de $f(n)=f(2m)$.
Pour ce faire, on remarque d'abord que $2022=2\cdot 1011=2\cdot 3\cdot 337$ et que 337 est un nombre premier. (Comment pouvez-vous vérifier que 337 est bel et bien un nombre premier ?)
Donc, on doit trouver deux entiers strictement positifs $m<1011$ pour lesquels $\dfrac{4m(m-1)(4m-5)}{3}$ est un multiple de 2, de 3 et de 337.
On peut supposer que $m\geq 3$, on peut donc écrire m comme l'un de $m=3q$ ou $m=3q+1$ ou $m=3q+2$, q étant un entier strictement positif quelconque.
Lorsque $m=3q$, on a

$$\frac{4m(m-1)(4m-5)}{3}=\frac{4(3q)(3q-1)(12q-5)}{3}=4q(3q-1)(12q-5)$$

Lorsque $m=3q+1$, on a

$$\frac{4m(m-1)(4m-5)}{3}=\frac{4(3q+1)(3q)(12q-1)}{3}=4q(3q+1)(12q-1)$$

Lorsque $m=3q+2$, on a

$$\frac{4m(m-1)(4m-5)}{3}=\frac{4(3q+2)(3q+1)(12q+3)}{3}=4(3q+1)(3q+2)(4q+1)$$

Chacune de ces expressions est un entier strictement positif étant donné qu'il s'agit d'un produit d'entiers strictement positifs.
Chacune de ces expressions est paire car elles contiennent toutes un facteur 4.

Donc, on doit déterminer 2 valeurs suffisamment petites de q pour lesquelles l'une de ces expressions est divisible par 3 et par 337.
Puisque 337 est le nombre premier le plus grand parmi les deux, on cherchera d'abord les facteurs de 337, puis ensuite les facteurs de 3.

Les deux premiers multiples positifs de 337 sont 337 et 674.
En examinant les facteurs de chacune de ces trois expressions, on remarque qu'il n'est pas possible que l'un des facteurs soit égal à 337 et qu'un autre facteur de la même expression soit un multiple de 3.
Lorsque $q = 224$, on obtient $3q + 2 = 674$ (ce qui est un multiple de 337) et $4q + 1 = 897$ (ce qui est un multiple de 3).
Donc, lorsque $q = 224$, l'expression $4(3q+1)(3q+2)(4q+1)$ est un multiple de 2022. Donc, lorsqu'on pose $m = 3 \cdot 224 + 2 = 674$, cela nous indique que $f(1348)$ est un multiple de 2022.
Lorsque $q = 225$, on obtient $3q - 1 = 674$ (ce qui est un multiple de 337) et $q = 225$ (ce qui est un multiple de 3).
Donc, lorsque $q = 225$, l'expression $4q(3q - 1)(12q - 5)$ est un multiple de 2022. Donc, lorsqu'on pose $m = 3 \cdot 225 = 675$, cela nous indique que $f(1350)$ est un multiple de 2022.
On a donc la réponse pour la partie (c) : les deux entiers pairs strictement positifs n ($n < 2022$) pour lesquels $f(n)$ est un multiple de 2022 sont $n = 1348$ et $n = 1350$.