Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur

le mercredi 16 novembre 2022

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 17 novembre 2022

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 2 heures

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Le questionnaire est divisé en deux parties. Dans chaque partie, les questions sont à peu près en ordre croissant de difficulté. Les premiers problèmes de la partie B sont probablement plus faciles que les derniers de la partie A.

PARTIE A

1. Cette partie est composée de six questions de 5 points chacune.
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse.** Le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

PARTIE B

1. Cette partie est composée de trois questions de 10 points chacune.
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse.** Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Inscrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille insérée.
3. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, et le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca. Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur

Remarques :

1. Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Inscrire toutes les solutions dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.
4. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
5. Les figures ne sont pas dessinées à l'échelle. Elles servent d'aide seulement.
6. Aucun élève ne peut passer le Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur et le Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire la même année.

Renseignement utile :
Il peut s'avérer utile de savoir que $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ pour tout angle θ.

PARTIE A

Pour chaque problème dans la partie A, le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée pour du travail pertinent inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

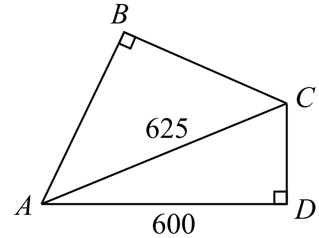
1. Si $2^r = 16$ et $5^s = 25$, quelle est la valeur de $r + s$?

2. Si $\dfrac{x+y}{2} = 5$ et $\dfrac{x-y}{2} = 2$, quelle est la valeur de $x^2 - y^2$?

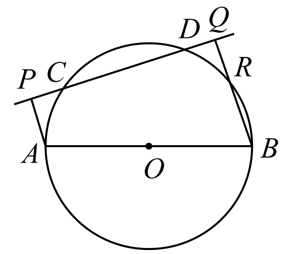
3. La somme de deux entiers strictement positifs est 60 et leur plus petit commun multiple est 273. Quels sont ces deux entiers ?

   (Le *plus petit commun multiple* de deux entiers strictement positifs est le plus petit entier strictement positif qui est un multiple des deux entiers.)

4. Dans la figure ci-contre, AB est perpendiculaire à BC tandis que CD est perpendiculaire à AD. De plus, $AC = 625$ et $AD = 600$. Si $\angle BAC = 2\angle DAC$, quelle est la longueur de BC ?



5. Dans la figure ci-contre, un cercle de centre O a un diamètre de $AB = 2\sqrt{19}$. Les points C et D sont situés sur la moitié supérieure du cercle. On trace une droite qui passe aux points C et D. Les points P et Q sont situés sur cette droite de manière que AP et BQ soient tous deux perpendiculaires à PQ. De plus, QB coupe le cercle au point R. Si $CP = DQ = 1$ et $2AP = BQ$, quelle est la longueur de AP ?



6. Un sac contient exactement 15 billes dont 3 sont rouges, 5 sont bleues et 7 sont vertes. Les billes sont choisies au hasard et retirées une par une du sac jusqu'à ce que toutes les billes aient été retirées. Quelle est la probabilité pour que la couleur rouge soit la première couleur dont il ne reste plus de billes dans le sac ?

PARTIE B

Pour chaque question dans la partie B, la solution doit être bien organisée et doit aussi présenter certains mots d'explication ou de justification. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

Renseignement utile pour la Partie B :

La somme des k premiers carrés parfaits est égale à $\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

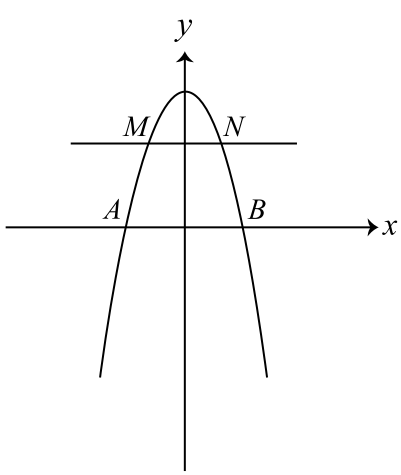
C'est-à-dire que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

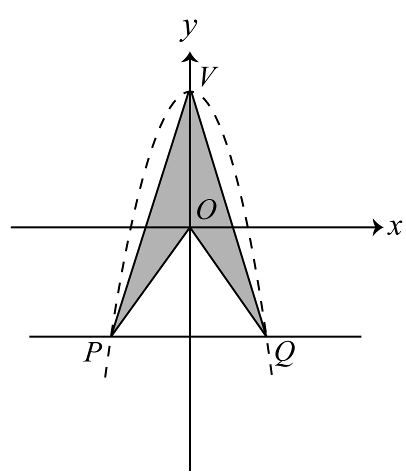
1. Dans la figure ci-dessous, la parabole d'équation $y = -x^2 + 16$ coupe l'axe des abscisses aux points A et B et coupe également la droite horizontale d'équation $y = 7$ aux points M et N.

   (a) Déterminer les coordonnées de A et de B.

   (b) Déterminer l'aire du trapèze $MNBA$.

   (c) Supposons que O soit l'origine et que V soit le sommet de la parabole. La droite d'équation $y = -33$ coupe la parabole aux points P et Q. Déterminer l'aire du quadrilatère $VPOQ$; soit le quadrilatère ombré dans la figure ci-dessous.





2. (a) Déterminer tous les nombres réels $a > 0$ qui vérifient $\sqrt{a^2 + a} = \frac{2}{3}$.

   (b) Pour chaque entier strictement positif m, déterminer la différence entre $(m + \frac{1}{2})^2 + (m + \frac{1}{2})$ et le carré parfait le plus près.

   (c) Pour tout entier strictement positif n, démontrer qu'il existe un nombre pair d'entiers strictement positifs c tels que $n < \sqrt{c + \sqrt{c}} < n + 1$.

3. Pour chaque entier strictement positif n, soit S_n l'ensemble qui contient les entiers de 1 à n. C'est-à-dire que $S_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.
   Pour chaque entier strictement positif $n \geq 4$, soit $f(n)$ le nombre de quadruplets (a, b, c, d) d'entiers distincts dans S_n tels que $a - b = c - d$.
   Par exemple, $f(4) = 8$ car on a les possibilités suivantes pour (a, b, c, d) :

$$(1, 2, 3, 4), (1, 3, 2, 4), (2, 1, 4, 3), (2, 4, 1, 3), (3, 1, 4, 2), (3, 4, 1, 2), (4, 2, 3, 1), (4, 3, 2, 1)$$

   (a) Déterminer la valeur de $f(6)$.

   (b) Déterminer la valeur de $f(40)$.

   (c) Déterminer deux entiers pairs strictement positifs $n < 2022$ pour lesquels 2022 est un diviseur de $f(n)$.