Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire 2022

le mercredi 16 novembre 2022
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 17 novembre 2022
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

Partie A

1. Puisqu'une face carrée du cube a une aire de 16 cm^2, la longueur des arêtes du cube est égale à $\sqrt{16\text{ cm}^2}$, soit 4 cm.
   Puisque les arêtes du cube ont une longueur de 4 cm, le cube a un volume de $(4\text{ cm})^3 = 4^3\text{ cm}^3 = 64\text{ cm}^3$.
   Donc, $V = 64$.

   Réponse : 64

2. Puisque le triangle ADC est isocèle avec $AD = DC$, on a $\angle DAC = \angle DCA = 40°$.
   Puisque la somme des mesures d'angles d'un triangle est égale à 180°, alors

   $$\angle ADC = 180° - \angle DAC - \angle DCA = 180° - 40° - 40° = 100°$$

   Puisque la mesure d'un angle plat est de 180°, on a

   $$\angle ADB = 180° - \angle ADC = 180° - 100° = 80°$$

   Puisque le triangle ADB est isocèle avec $AD = DB$, on a $\angle DAB = \angle DBA$, d'où

   $$\angle DAB = \tfrac{1}{2}(180° - \angle ADB) = \tfrac{1}{2}(180° - 80°) = 50°$$

   Donc, $\angle BAC = \angle DAB + \angle DAC = 50° + 40° = 90°$.

   Remarquons que les élèves qui saisissent la notion « d'angles extérieurs » pourraient abréger cette solution en notant par exemple que $\angle ADB = \angle DAC + \angle DCA = 40° + 40° = 80°$.
   De plus, certains élèves pourraient remarquer que puisque $DA = DB = DC$, alors D est le centre du cercle qui passe par les points A, B et C (soit le cercle circonscrit au triangle ABC). Puisque BC sera un diamètre de ce cercle avec le point A situé sur le cercle, alors $\angle BAC = 90°$.

   Réponse : 90°

3. Puisque Marie-Pascale résout 4 problèmes de mathématiques par jour et qu'elle résout 72 problèmes en tout, cela lui prend $72 \div 4 = 18$ jours.
   Puisque Karine résout 54 problèmes de plus que Marie-Pascale, elle résout $72 + 54 = 126$ problèmes.
   Puisque Karine résout x problèmes par jour pendant 18 jours et résout 126 problèmes au total, alors $x = \dfrac{126}{18} = 7$.

   Réponse : 7

4. *Solution 1*
   Puisque $\dfrac{c}{d} = \dfrac{7}{15}$, alors $c = \dfrac{7}{15}d$.
   Puisque $\dfrac{c}{b} = \dfrac{1}{5}$, alors $b = 5c = 5 \times \dfrac{7}{15}d = \dfrac{7}{3}d$.
   Puisque $\dfrac{a}{b} = \dfrac{2}{3}$, alors $a = \dfrac{2}{3}b = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{7}{3}d = \dfrac{14}{9}d$.
   Donc,

   $$\frac{ab}{cd} = \frac{(14/9)d \times (7/3)d}{(7/15)d \times d} = \frac{(98/27)d^2}{(7/15)d^2} = \frac{98}{27} \times \frac{15}{7} = \frac{14}{9} \times \frac{5}{1} = \frac{70}{9}$$

Solution 2
Supposons que $d = 45$.
Puisque $\frac{c}{d} = \frac{7}{15}$, alors $c = \frac{7}{15}d = \frac{7}{15} \times 45 = 21$.
Puisque $\frac{c}{b} = \frac{1}{5}$, alors $b = 5c = 5 \times 21 = 105$.
Puisque $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$, alors $a = \frac{2}{3}b = \frac{2}{3} \times 105 = 70$.
Donc, $\frac{ab}{cd} = \frac{70 \times 105}{21 \times 45} = \frac{10 \times 7}{3 \times 3} = \frac{70}{9}$.
Cette solution ne démontre pas que $\frac{70}{9}$ est la valeur de $\frac{ab}{cd}$ pour toutes telles valeurs de a, b, c et d. Cependant, l'énoncé du problème laisse entendre que cette valeur est la même pour tout choix de a, b, c et d qui satisfont aux restrictions. En revanche, la solution 1 démontre bien que $\frac{70}{9}$ est la valeur de $\frac{ab}{cd}$ pour tous les choix de a, b, c et d.

Réponse : $\frac{70}{9}$

5. Lorsque trois nombres a, b, c sont tels que le nombre du milieu, b, est la moyenne des deux autres, alors $b = \frac{a+c}{2}$ nous dit que $2b = a + c$ ou $b + b = a + c$, d'où $b - c = a - b$.
Autrement dit, si $b - c = d$ (c'est-à-dire si $b = c + d$, d étant un nombre quelconque), on a $a - b = d$, d'où $a = b + d = (c + d) + d = c + 2d$.
On remarque que la raison d pourrait être positive ou négative.
Puisque les trois scores de Viswanathan ont cette propriété et qu'il a obtenu un score de 25 dans la troisième partie, alors on peut exprimer les scores qu'il a obtenus dans les deux premières parties sous la forme $25 + 2d$ et $25 + d$, comme dans le tableau ci-dessous :

	1re partie	2e partie	3e partie
Viswanathan	$25 + 2d$	$25 + d$	25
Magnus			

Puisque Viswanathan remporte soit la première partie, soit la deuxième partie, son score dans cette partie doit être d'au moins 25. Cela signifie que $d \geq 0$; puisque les scores sont tous distincts, il faut que $d > 0$.
Puisque les scores de Viswanathan dans ces parties sont tous deux supérieurs à 25, les scores de Magnus dans ces parties sont soit 2 de plus et 2 de moins que ceux de Viswanathan, soit 2 de moins et 2 de plus que ceux de Viswanathan, selon l'ordre dans lequel ils ont gagné ces parties.

Supposons que Viswanathan remporte la première partie et que Magnus remporte la deuxième partie. Alors le score de Magnus dans la première partie est 2 de moins que celui de Viswanathan (et donc égal à $23 + 2d$) et le score de Magnus dans la deuxième partie est 2 de plus que celui de Viswanathan (et donc égal à $27 + d$).

	1re partie	2e partie	3e partie
Viswanathan	$25 + 2d$	$25 + d$	25
Magnus	$23 + 2d$	$27 + d$	

Puisque des scores de a, b, c dans l'ordre des trois parties donnent $2b = a + c$, alors $c = 2b - a$. Dans ce cas, cela signifie que le score de Magnus dans la troisième partie serait égal à $2(27 + d) - (23 + 2d) = 31$, ce qui n'est pas possible puisqu'un score final de 31 à 25 n'est pas possible.

Supposons que Magnus remporte la première partie et que Viswanathan remporte la deuxième partie. Alors le score de Magnus dans la première partie est 2 de plus que celui de Viswanathan (et donc égal à $27 + 2d$) et le score de Magnus dans la deuxième partie est de 2 de moins que celui de Viswanathan (et donc égal à $23 + d$).

	1re partie	2e partie	3e partie
Viswanathan	$25 + 2d$	$25 + d$	25
Magnus	$27 + 2d$	$23 + d$	

Dans ce cas, cela signifie que le score de Magnus dans la troisième partie serait égal à $2(23 + d) - (27 + 2d) = 19$, ce qui est possible puisqu'un score final de 25 à 19 est possible.
Donc, Magnus a un score de 19 dans la troisième partie. Remarquons que cette réponse ne dépend pas de d, ce qui indique que ce score sera égal à 19 quelle que soit la valeur de $d > 0$.

Réponse : 19

6. Pour que le produit abc soit un multiple de 12, les entiers a, b et c doivent comprendre entre eux au moins un facteur 3 et deux facteurs 2.
Parmi les entiers de la liste, il y a cinq catégories en ce qui concerne la divisibilité par 2 et par 3 :
- (A) : 3 ne sont pas divisibles par 2 ou par 3 (soit 1, 5 et 37)
- (B) : 3 sont divisibles par 2 mais ne sont pas divisbles par 4 ou par 3 (soit 22, 46 et 50)
- (C) : 1 est divisible par 4 mais n'est pas divisible par 3 (soit 8)
- (D) : 4 sont divisibles par 3 mais ne sont pas divisbles par 2 (soit 21, 27, 33 et 39)
- (E) : 1 est divisible par 2 et par 3 (soit 30)

On procédera en évaluant deux possibilités : soit 30 est choisi, soit 30 n'est pas choisi. Il n'est pas nécessaire de savoir si 30 est a, b ou c puisqu'on peut placer les trois entiers en ordre croissant après qu'on les ait choisis.

<u>1er cas : 30 est choisi</u>
Dans ce cas, au moins un des entiers restants est pair puisque 30 ne comprend qu'un seul facteur 2.

Si les deux entiers restants sont pairs, alors on choisit 2 des 4 entiers de (B) et (C), ce que l'on peut faire de 6 façons : 22 et 46 ; 22 et 50 ; 22 et 8 ; 46 et 50 ; 46 et 8 ; 50 et 8.
Donc, il y a 6 façons de choisir dans ce sous-cas.

Si un seul des entiers restants est pair, cet entier pair peut provenir soit de (B), soit de (C). Il y a 4 tels entiers.
Le troisième entier choisi doit être impair et doit donc provenir soit de (A), soit de (D). Ces derniers comprennent en tout 7 entiers.
Donc, dans ce sous-cas, il y a $4 \times 7 = 28$ façons de choisir ces deux entiers puisque chacun des 4 entiers pairs peut être apparié avec chacun des 7 entiers impairs.

<u>2e cas : 30 n'est pas choisi</u>
Dans ce cas, un ou deux des trois entiers choisis doivent provenir de (D) puisque abc doit comprendre au moins un facteur 3. (Si les trois provenaient de (D), il n'y aurait pas de facteurs 2.)

Si deux des entiers proviennent de (D), alors il y a 6 façons de choisir ces 2 entiers, soit 21 et 27 ; 21 et 33 ; 21 et 39 ; 27 et 33 ; 27 et 39 ; 33 et 39.
Le troisième entier choisi doit donc être un multiple de 4 pour que abc comprenne au moins

deux facteurs 2. Ainsi, le troisième entier est 8. Donc, il y a 6 façons de choisir dans ce sous-cas.

Si l'un des entiers provient de (D), il y a 4 façons de choisir cet entier.
Les deux autres entiers choisis doivent alors comprendre un multiple de 4 et un autre entier pair, ou un multiple de 4 et un entier impair non divisible par 3, ou deux entiers pairs qui ne sont pas des multiples de 4. (Pouvez-vous voir pourquoi ce cas sont tous les cas possibles ?)
Si ces entiers sont un multiple de 4 et un autre entier pair, le multiple de 4 doit être 8 et l'entier pair doit provenir des 3 entiers de (B).
Donc, il y a $4 \times 3 = 12$ façons de choisir dans ce sous-cas, puisque chacun des 4 entiers de (D) peut être apparié avec chacun des 3 entiers de (B).
Si les deux entiers sont un multiple de 4 et un entier impair non divisible par 3, le multiple de 4 doit être 8 et l'entier impair doit provenir des 3 entiers de (A).
Donc, il y a $4 \times 3 = 12$ façons de choisir dans ce sous-cas.
Si les deux entiers sont pairs et ne sont pas des multiples de 4, on doit choisir 2 des 3 entiers de (B), ce que l'on peut faire de 3 façons comme on l'a démontré précédemment.
Donc, il y a $4 \times 3 = 12$ façons de choisir dans ce sous-cas.

Au total, il y a $6 + 28 + 6 + 12 + 12 + 12 = 76$ façons de choisir les trois entiers.

Réponse : 76

Partie B

1. (a) Puisque les trois entiers de la colonne verticale de gauche ont une somme de 29, alors l'entier dans la case vide de cette colonne est $29 - 13 - 9 = 7$.
Puisque les trois entiers de la rangée horizontale ont une somme de 29, cela indique que les deux cases vides devraient contenir deux entiers dont la somme est égale à $29 - 9 = 20$.
Puisque les entiers disponibles sont 3, 5 et 15, alors les deux entiers que l'on doit placer dans les deux cases vides de cette rangée sont 5 et 15.
Cela signifie qu'on doit placer l'entier 3 dans la case du bas de la colonne verticale de droite, ce qui signifie que la case du milieu de la colonne verticale de droite doit contenir $29 - 11 - 3 = 15$. On doit donc placer l'entier 5 dans la case restante (soit celle du milieu de la rangée horizontale).

13		11
9	5	15
7		3

(b) Les sommes des colonnes de gauche et de droite sont égales. Donc,

$$\begin{aligned} 15 + (t + 1) + 11 &= (2t - 3) + 10 + 14 \\ t + 27 &= 2t + 21 \\ 6 &= t \end{aligned}$$

Si $t = 6$, alors on remplit les cases du H afin de s'assurer que les entiers sont tous différents :

15		9
7	16	10
11		14

(c) Puisque les trois sommes sont égales, on a $a + 12 + c = 12 + 9 + 7 = b + 7 + 11$ ou $a + c + 12 = 28 = b + 18$, d'où $a + c = 16$ et $b = 10$.
Puisque $a + c = 16$ et a et c sont des entiers strictement positifs tels que $a < c$, alors on a les possibilités suivantes :

- $a = 1$ et $c = 15$; les 7 entiers sont différents dans ce cas
- $a = 2$ et $c = 14$; les 7 entiers sont différents dans ce cas
- $a = 3$ et $c = 13$; les 7 entiers sont différents dans ce cas
- $a = 4$ et $c = 12$; ceci n'est pas possible car il y aurait deux 12.
- $a = 5$ et $c = 11$; ceci n'est pas possible car il y aurait deux 11.
- $a = 6$ et $c = 10$; ceci n'est pas possible car il y aurait deux 10.
- $a = 7$ et $c = 9$; ceci n'est pas possible car il y aurait deux 7 (et deux 9)

Donc, les valeurs possibles de a sont 1, 2 et 3, d'où on a donc les figures suivantes :

1		10
12	9	7
15		11

2		10
12	9	7
14		11

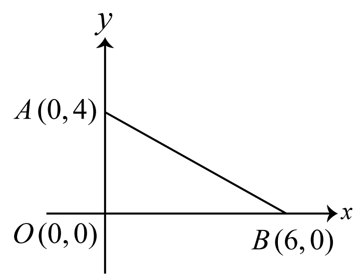
3		10
12	9	7
13		11

(d) Puisque les trois sommes sont égales, on a $7 + 10 + k = 10 + n + 18 = (n + 6) + 18 + 4$, d'où $k + 17 = n + 28 = n + 28$ ou $k = n + 11$.
Puisque k est entre 4 et 18 inclusivement et $k = n + 11$, alors on doit avoir $n \leq 7$. Puisque n est entre 4 et 18 inclusivement, alors on a également $n \geq 4$.
On voit donc que n peut égaler 4, 5, 6 ou 7, d'où on a donc respectivement 15, 16, 17 ou 18 comme valeurs de k et 10, 11, 12 ou 13 comme valeurs de $n + 6$.
Puisque la figure contient déjà 10 et 18, on ne peut avoir $k = 18$ ou $n + 6 = 10$, ce qui signifie que $n \neq 7$ et $n \neq 4$.
Cela signifie que les valeurs possibles de k sont 16 et 17, d'où on a donc les figures suivantes :

7		11
10	5	18
16		4

7		12
10	6	18
17		4

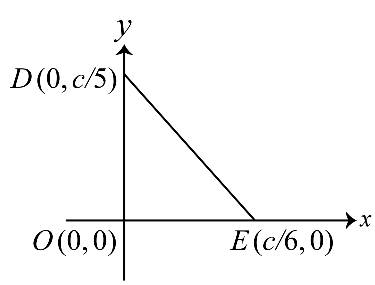
2. (a) Lorsque $x = 0$, l'équation $2x + 3y = 12$ devient $3y = 12$, d'où $y = 4$. Donc, A a pour coordonnées $(0, 4)$.
Lorsque $y = 0$, l'équation $2x + 3y = 12$ devient $2x = 12$, d'où $x = 6$. Donc, B a pour coordonnées $(6, 0)$.
Donc, les sommets du triangle AOB sont $A(0, 4)$, $O(0, 0)$ et $B(6, 0)$.



Puisque le triangle AOB est rectangle en O, son aire est égale à :

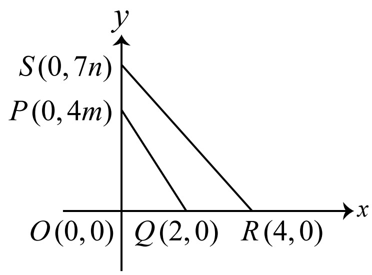
$$\tfrac{1}{2} \times AO \times BO = \tfrac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12$$

(b) Lorsque $x = 0$, l'équation $6x + 5y = c$ devient $5y = c$, d'où $y = \frac{1}{5}c$. Donc, D a pour coordonnées $(0, \frac{1}{5}c)$.
Lorsque $y = 0$, l'équation $6x + 5y = c$ devient $6x = c$, d'où $x = \frac{1}{6}c$. Donc, E a pour coordonnées $(\frac{1}{6}c,0)$.
Donc, les sommets du triangle DOE sont $D(0, \frac{1}{5}c)$, $O(0, 0)$ et $E(\frac{1}{6}c, 0)$.



Puisque le triangle DOE est rectangle en O, son aire est égale à $\frac{1}{2} \times DO \times EO = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}c \times \frac{1}{6}c$.
Puisque l'aire du triangle DOE est égale à 240, on obtient $\frac{1}{2} \times \frac{1}{5}c \times \frac{1}{6}c = 240$, d'où $\frac{1}{60}c^2 = 240$.
Donc, $c^2 = 60 \times 240 = 14\,400$. Puisque $c > 0$, alors $c = 120$.

(c) Lorsque $x = 0$, l'équation $(2m)x + y = 4m$ devient $y = 4m$. Donc, P a pour coordonnées $(0, 4m)$.
Lorsque $y = 0$, l'équation $(2m)x + y = 4m$ devient $(2m)x = 4m$, d'où $x = 2$. (Remarquons que $100 \leq m < n$. Donc, ni m ni n ne peuvent égaler 0.) Donc, Q a pour coordonnées $(2, 0)$.
Lorsque $x = 0$, l'équation $(7n)x + 4y = 28n$ devient $4y = 28n$, d'où $y = 7n$. Donc, S a pour coordonnées $(0, 7n)$.
Lorsque $y = 0$, l'équation $(7n)x + 4y = 28n$ devient $(7n)x = 28n$, d'où $x = 4$. Donc, R a pour coordonnées $(4, 0)$.
Puisque $n > m$ et $7 > 4$, alors $7n > 4m$. Donc, la distance entre S et l'origine est supérieure à celle entre P et l'origine.



Pour calculer l'aire du quadrilatère $PQRS$, on soustrait l'aire du triangle POQ de l'aire du triangle SOR.
Donc,

$$\begin{aligned}
2022 &= \tfrac{1}{2} \times SO \times RO - \tfrac{1}{2} \times PO \times QO \\
2022 &= \tfrac{1}{2} \times 7n \times 4 - \tfrac{1}{2} \times 4m \times 2 \\
2022 &= 14n - 4m \\
1011 &= 7n - 2m
\end{aligned}$$

On veut déterminer deux couples (m, n) d'entiers strictement positifs ($100 \leq m < n$) qui vérifient $7n - 2m = 1011$.
Lorsque $m = 100$, on obtient $7n - 200 = 1011$, d'où $7n = 1211$ ou $n = 173$. Le couple $(m, n) = (100, 173)$ remplit les conditions.
À partir de $7 \times 173 - 2 \times 100 = 1011$, on additionne et on soustrait 14 pour obtenir

$$7 \times 173 + 14 - 2 \times 100 - 14 = 1011$$

ou

$$7 \times 173 + 7 \times 2 - 2 \times 100 - 2 \times 7 = 1011$$

d'où

$$7 \times 175 - 2 \times 107 = 1011$$

Donc, $(m, n) = (107, 175)$ est un second couple qui remplit les conditions.

3. (a) *Solution 1*

Puisque 10 minutes équivaut à $\frac{1}{6}$ d'une heure, lorsque Béatrice marche à une vitesse de 5 km/h pendant 10 minutes, elle parcourt une distance de 5 km/h $\times$ $\frac{1}{6}$ h $=$ $\frac{5}{6}$ km.

Puisque Hieu fait du vélo à une vitesse de 15 km/h tandis que Béatrice marche à une vitesse de 5 km/h, alors Hieu rattrape Béatrice à une vitesse de 15 km/h $-$ 5 km/h $=$ 10 km/h.

Autrement dit, Hieu parcourt la distance qui les sépare (soit $\frac{5}{6}$ km) à une vitesse de 10 km/h. Cela lui prendra donc $\dfrac{\frac{5}{6}\text{ km}}{10\text{ km/h}}$, ou $\dfrac{5}{60}$ h, soit 5 minutes.

Solution 2

Lorsque Béatrice marche à une vitesse de 5 km/h pendant 10 minutes, elle parcourt une distance de 5 km/h $\times$ $\frac{1}{6}$ h ou $\frac{5}{6}$ km.

Supposons que Hieu rattrape Béatrice en t heures.

Puisque Hieu fait du vélo à une vitesse de 15 km/h, il parcourt en tout 15 km/h $\times$ t h $= 15t$ km au cours de ces t heures.

En suivant un raisonnement semblable, Béatrice parcourt $5t$ km après le $\frac{5}{6}$ km qu'elle avait initialement parcouru.

Lorsque Hieu rattrape Béatrice, ils ont parcouru exactement la même distance, donc $15t = 5t + \frac{5}{6}$, d'où $10t = \frac{5}{6}$ ou $t = \frac{5}{60}$.

Donc, Hieu rattrape Béatrice après $\frac{5}{60}$ h, ce qui équivaut à 5 minutes.

(b) (i) Il y a 60 entiers dans l'intervalle de 0 à 59.

Cela signifie qu'il y a 60 valeurs possibles pour b et 60 valeurs possibles pour h.

Puisque b et h sont choisis aléatoirement et indépendamment, alors il y a $60 \times 60 = 3600$ paires de valeurs possibles pour b et h.

On dit que Béatrice et Hieu se rencontrent s'ils sont au même endroit sur le chemin au même moment, y compris s'ils commencent ou finissent ensemble.

Pour déterminer la probabilité que Béatrice et Hieu se rencontrent, on compte le nombre de paires de valeurs de b et h pour lesquelles ils se rencontrent, puis on divise ce total par 3600.

Puisque le chemin fait 2 km de long et que Béatrice marche à une vitesse de 5 km/h, alors Béatrice met $\dfrac{2\text{ km}}{5\text{ km/h}}$ ou $\dfrac{2}{5}$ h ou 24 minutes pour parcourir tout le chemin.

Puisque le chemin fait 2 km de long et que Hieu fait du vélo à une vitesse de 15 km/h, alors Hieu met $\dfrac{2\text{ km}}{15\text{ km/h}}$ ou $\dfrac{2}{15}$ h ou 8 minutes pour parcourir tout le chemin.

Puisque Béatrice parcourt le chemin à pied en 24 minutes et que Hieu le parcourt à vélo en 8 minutes, alors Béatrice et Hieu se rencontreront sur le chemin chaque fois que $h - b$ est supérieur ou égal à 0 et inférieur ou égal à $24 - 8 = 16$. Voici pourquoi cela est vrai :

- Supposons que Hieu commence à parcourir le chemin avant Béatrice (c'est-à-dire que $h < b$). Puisque Hieu voyage plus rapidement que Béatrice, alors Béatrice ne pourra pas rattraper Hieu et donc ils ne se rencontreront jamais sur le chemin.
- Si Hieu commence à parcourir le chemin en même temps que Béatrice (c'est-à-dire que $h = b$), alors ils se rencontreront au début du chemin.
- Supposons que Hieu commence à parcourir le chemin après Béatrice (c'est-à-dire que $h > b$) mais avant que 16 minutes se soient écoulées depuis le départ de Béatrice (c'est-à-dire que $h - b < 16$).

  On remarque que Hieu finit de parcourir le chemin $h + 8$ minutes après 9 h et que

Béatrice finit de parcourir le chemin $b + 24$ minutes après 9 h.
Puisque $h - b < 16$, alors $h < b + 16$, d'où $h + 8 < b + 24$, ce qui signifie que Hieu finit de parcourir le chemin avant Béatrice.
Puisque Hieu commence à parcourir le chemin après Béatrice et finit de le parcourir avant elle, alors Hieu croisera Béatrice sur le chemin (c'est-à-dire qu'ils se rencontreront).

- Si Hieu commence à parcourir le chemin exactement 16 minutes après le départ de Béatrice (c'est-à-dire que $h - b = 16$), alors Hieu et Béatrice arriveront à la fin du chemin en même temps (car $h+8 = b+24$) et se croiseront donc à la fin du chemin.
- Si Hieu commence à parcourir le chemin plus de 16 minutes après le départ de Béatrice (c'est-à-dire que $h-b > 16$), alors Hieu ne rattrapera pas Béatrice (puisque lorsqu'il avait commencé à parcourir le chemin exactement 16 minutes après le départ de Béatrice, il avait finit par la rattraper au dernier moment possible, soit à la toute fin du chemin).

On doit donc compter le nombre de paires de valeurs entières de h et b (h et b étant des valeurs dans l'intervalle de 0 à 59) telles que $h - b \geq 0$ et $h - b \leq 16$.
Pour ce faire, on considère les valeurs de b de 0 à 59, en déterminant dans chaque cas le nombre de valeurs de h qui satisfont aux restrictions.
Si $b = 0$, alors h peut prendre n'importe quelle valeur de 0 à 16. Il y a 17 telles valeurs.
Si $b = 1$, alors h peut prendre n'importe quelle valeur de 1 à 17. Il y a 17 telles valeurs.
En général, si $b \geq 0$ et $b \leq 43$, alors h peut prendre n'importe quelle valeur de b à $b + 16$. De plus, puisque $b \leq 43$, on a $b + 16 \leq 59$, ce qui signifie que chacune de ces 17 valeurs remplit les conditions nécessaires. Remarquons qu'on a 44 valeurs de b et que cela correspond à 17 valeurs de h.
Si $b = 44$, alors h peut prendre n'importe quelle valeur de 44 à 59. Remarquons que malgré le fait que $h = 60$ est 16 de plus que $b = 44$, 60 n'est pas une valeur admissible de h. Dans ce cas, il y a 16 valeurs de h.
Si $b = 45$, alors h peut prendre n'importe quelle valeur de 45 à 59. Il y a 15 valeurs de h.
À mesure que la valeur de b augmente de 1 dans l'intervalle de 45 à 59, le nombre de valeurs de h diminue de 1 dans chaque cas, puisque la valeur maximale de h ne change pas alors que sa valeur minimale augmente de 1.
Lorsque $b = 59$, il y a 1 valeur de h (soit $h = 59$) qui remplit les conditions.
Donc, si N est le nombre de paires de valeurs de h et b qui remplissent les conditions données, alors

$$\begin{aligned} N &= 44 \times 17 + 16 + 15 + 14 + \cdots + 3 + 2 + 1 \\ &= 44 \times 17 + (16 + 1) + (15 + 2) + \cdots + (10 + 7) + (9 + 8) \\ &= 44 \times 17 + 8 \times 17 \\ &= 52 \times 17 \\ &= 884 \end{aligned}$$

Donc, cela signifie que la probabilité pour qu'il y ait un moment où Béatrice et Hieu se trouvent au même endroit sur le chemin est égale à $\dfrac{N}{3600}$ ou $\dfrac{884}{3600}$, soit $\dfrac{221}{900}$.

(ii) Comme dans la partie (i), il y a 3600 paires de valeurs possibles pour b et h.
Si M de ces paires aboutissent à la rencontre de Hieu et Béatrice, alors la probabilité pour qu'ils se rencontrent est égale à $\dfrac{M}{3600}$.

Selon l'énoncé du problème, cette probabilité est égale à $\frac{13}{200}$, d'où on a donc $\frac{M}{3600} = \frac{13}{200}$, ce qui signifie que M est égal à $\frac{13 \times 3600}{200} = 13 \times 18 = 234$.
Comme dans la partie (i), Hieu met 8 minutes pour parcourir le chemin à vélo.
Puisque Béatrice utilise un scooter et parcourt le chemin à une vitesse constante de x km/h (x étant tel que $x > 5$ et $x < 15$), alors il lui faut $\frac{2 \text{ km}}{x \text{ km/h}} = \frac{2}{x}$ h $= \frac{120}{x}$ min pour parcourir le chemin.
Puisque $x > 5$, alors $\frac{120}{x} < 24$. Donc, Hieu voyage plus rapidement que Béatrice.
Puisque $x < 15$, alors $\frac{120}{x} > 8$.
D'après une analyse semblable à celle de la partie (i), Hieu et Béatrice se rencontrent chaque fois que $h - b$ est supérieur ou égal à 0 et inférieur ou égal à $\frac{120}{x} - 8$.
Cela signifie qu'il faut déterminer l'intervalle des valeurs possibles de x pour lequel il existe 234 paires de valeurs entières de h et b (h et b étant des valeurs dans l'intervalle de 0 à 59) telles que $h - b \geq 0$ et $h - b \leq \frac{120}{x} - 8$.
Puisque h et b sont des entiers, alors $h - b$ est un entier.
Soit t le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{120}{x} - 8$.
Remarquons que puisque t est le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{120}{x} - 8$, alors $t + 1$ est supérieur à $\frac{120}{x} - 8$.
Remarquons également que $\frac{120}{x} - 8$ est supérieur à 0 et inférieur à 16, ce qui signifie que t peut prendre une valeur de 0 à 15. Donc, lorsqu'on prend en compte les restrictions sur les valeurs de h et b, $h - b$ peut prendre une valeur de 0 à t.
Comme dans la partie (i), on compte le nombre de paires de valeurs de h et b en procédant de manière systématique à travers les valeurs de b.
Lorsque $b = 0$, alors il y a $t + 1$ valeurs possibles de h, soit les entiers de 0 à t.
Lorsque $b = 1$, alors il y a $t + 1$ valeurs possibles de h, soit les entiers de 1 à $t + 1$.
De même, lorsque $b \leq 59 - t$, il y a $t + 1$ valeurs possibles de h. Puisque ces valeurs de b sont les entiers de 0 à $59 - t$, alors il y a $60 - t$ telles valeurs de b.
Lorsque $b = (59 - t) + 1 = 60 - t$, la plus grande valeur possible de h est toujours 59 (ce qui correspond à $h - b = t - 1$). Il y a donc t valeurs possibles de h.
Comme dans la partie (i), le nombre de valeurs possibles de h diminue de 1 chaque fois que b augmente de 1 jusqu'à ce que $b = 59$.
Puisqu'il y a en tout 234 paires de valeurs de b et h, alors

$$\begin{aligned}
234 &= (60 - t)(t + 1) + t + (t - 1) + \cdots + 2 + 1 \\
234 &= (60 - t)(t + 1) + \tfrac{1}{2}t(t + 1) \\
468 &= 2(60 - t)(t + 1) + t(t + 1) \\
468 &= (120 - 2t)(t + 1) + t(t + 1) \\
468 &= (120 - t)(t + 1)
\end{aligned}$$

Lorsque $t = 3$, le membre de droite de l'équation est égal à 117×4, soit 468.
Lorsqu'on développe le membre de droite, on obtient $468 = -t^2 + 119t + 120$, ce qui

est équivalent à $t^2 - 119t + 348 = 0$.
On factorise pour obtenir $(t-3)(t-116) = 0$.
Puisque t est entre 0 et 15 inclusivement, alors $t = 3$.

Puisque t est égal à 3, alors 3 est le plus grand entier inférieur ou égal à $\dfrac{120}{x} - 8$.
Cela signifie que $\dfrac{120}{x} - 8 \geq 3$ et que $\dfrac{120}{x} - 8 < 4$.
Donc, $\dfrac{120}{x} \geq 11$ et $\dfrac{120}{x} < 12$, d'où on a donc $10 < x \leq \dfrac{120}{11}$, ce qui est l'intervalle des valeurs possibles de x.