Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire

le mercredi 16 novembre 2022

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 17 novembre 2022

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 2 heures

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Le questionnaire est divisé en deux parties. Dans chaque partie, les questions sont à peu près en ordre croissant de difficulté. Les premiers problèmes de la partie B sont probablement plus faciles que les derniers de la partie A.

PARTIE A

1. Cette partie est composée de six questions de 5 points chacune.
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse.** Le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

PARTIE B

1. Cette partie est composée de trois questions de 10 points chacune.
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse.** Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Inscrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille insérée.
3. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, et le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca. Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire

Remarques :

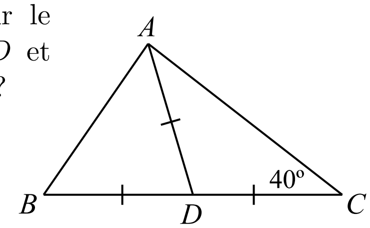
1. Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Inscrire toutes les solutions dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.
4. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
5. Les figures ne sont pas dessinées à l'échelle. Elles servent d'aide seulement.
6. Aucun élève ne peut passer le Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur et le Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire la même année.

PARTIE A

Pour chaque problème dans la partie A, le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée pour du travail pertinent inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

1. L'une des faces d'un cube a une aire de 16 cm^2. Ce cube a un volume de V cm^3. Quelle est la valeur de V ?

2. Dans la figure ci-contre, le point D est situé sur le côté BC du triangle ABC. Si $BD = CD = AD$ et $\angle ACD = 40°$, quelle est la mesure de l'angle BAC ?



3. Marie-Pascale résout 4 problèmes de mathématiques par jour. Karine résout x problèmes de mathématiques par jour. En l'espace d'un certain nombre de jours, Marie-Pascale résout un total de 72 problèmes. Sur le même nombre de jours, Karine résout 54 problèmes de plus que Marie-Pascale. Quelle est la valeur de x ?

4. Si a, b, c et d vérifient $\dfrac{a}{b} = \dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{c}{b} = \dfrac{1}{5}$ et $\dfrac{c}{d} = \dfrac{7}{15}$, quelle est la valeur de $\dfrac{ab}{cd}$?

5. Magnus et Viswanathan jouent à un jeu dans lequel ils s'affrontent en trois parties :
   - Dans chaque partie, le score de chaque joueur est un entier strictement positif. Les scores des joueurs à la fin des trois parties sont six entiers distincts.
   - Dans chaque partie, le score du gagnant est d'au moins 25 points. Si le gagnant a un score de 25, son adversaire doit avoir un score d'au plus 23 points. Si le gagnant a un score supérieur à 25, son adversaire doit avoir un score qui est exactement 2 points de moins que le score du gagnant.
   - Viswanathan gagne soit la première partie, soit la deuxième partie, mais pas les deux.
   - Viswanathan gagne la troisième partie avec un score de 25.
   - Le score de chaque joueur dans la deuxième partie est égal à la moyenne de ses scores dans les première et troisième parties.

   Quel était le score de Magnus dans la troisième partie ?
6. Combien de façons y a-t-il de choisir des entiers a, b et c avec $a < b < c$ parmi les entiers de la liste 1, 5, 8, 21, 22, 27, 30, 33, 37, 39, 46, 50 pour que le produit abc soit un multiple de 12 ?

PARTIE B

Pour chaque question dans la partie B, la solution doit être bien organisée et doit aussi présenter certains mots d'explication ou de justification. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

1. Dans chaque partie de ce problème, sept entiers strictement positifs distincts seront placés dans les sept cases de la figure en forme de « H ». Les entiers doivent être placés de manière que les trois entiers de la colonne verticale de gauche, les trois entiers de la colonne verticale de droite et les trois entiers de la seule rangée aient tous la même somme. Par exemple, dans le « H » ci-contre, $8 + 11 + 12 = 31$ et $11 + 19 + 1 = 31$ et $27 + 1 + 3 = 31$.

8		27
11	19	1
12		3

   (a) Placer les entiers 3, 5, 7, 15 dans la figure de manière que chacune des trois sommes soit égale à 29.

13		11
9		

   (b) Il existe une valeur de t telle que la figure ci-contre ait trois sommes égales et contienne sept entiers distincts. Déterminer cette valeur de t.

15		$2t - 3$
$t + 1$	16	10
11		14

   (c) Sept entiers strictement positifs distincts sont placés dans la figure ci-contre de manière que les trois sommes soient égales. Si $a < c$, déterminer toutes les valeurs possibles de a.

a		b
12	9	7
c		11

   (d) Chacun des entiers k et n est un entier de 4 à 18. La figure contient sept entiers distincts et les trois sommes sont égales. Déterminer toutes les valeurs possibles de k.

7		$n + 6$
10	n	18
k		4

2. Une droite qui n'est ni horizontale ni verticale coupe l'axe des ordonnées lorsque $x = 0$ et coupe l'axe des abscisses lorsque $y = 0$. Par exemple, la droite d'équation $4x + 5y = 40$ coupe l'axe des ordonnées à $(0, 8)$ (puisque $4 \times 0 + 5y = 40$ donne $y = 8$) et l'axe des abscisses à $(10, 0)$ (puisque $4x + 5 \times 0 = 40$ donne $x = 10$).

   (a) La droite d'équation $2x + 3y = 12$ coupe l'axe des ordonnées au point A et l'axe des abscisses au point B. Si O est l'origine, déterminer l'aire du triangle AOB.

   (b) Supposons que $c > 0$. La droite d'équation $6x+5y = c$ coupe l'axe des ordonnées au point D et l'axe des abscisses au point E. Étant donné que O est l'origine et que l'aire du triangle DOE est égale à 240, déterminer la valeur de c.

   (c) Supposons que m et n sont des entiers tels que $100 \leq m$ et $m < n$. La droite d'équation $(2m)x + y = 4m$ coupe l'axe des ordonnées au point P et l'axe des abscisses au point Q. La droite d'équation $(7n)x + 4y = 28n$ coupe l'axe des ordonnées au point S et l'axe des abscisses au point R. Si l'aire du quadrilatère $PQRS$ est égale à 2022, déterminer deux couples (m, n) possibles.

3. Un chemin rectiligne a une longueur de 2 km. Béatrice marche du début du chemin jusqu'à la fin du chemin à une vitesse constante de 5 km/h. Hieu fait du vélo du début du chemin jusqu'à la fin du chemin à une vitesse constante de 15 km/h.

   (a) Supposons que Hieu commence à parcourir le chemin 10 minutes après le départ de Béatrice. Déterminer le nombre de minutes qu'il lui faudra pour rattraper Béatrice.

   (b) Supposons qu'il est exactement b minutes après 9 h au moment de départ de Béatrice et qu'il est exactement h minutes après 9 h au moment de départ de Hieu, b et h étant chacun un entier de 0 à 59 choisi aléatoirement et indépendamment.

      (i) Déterminer la probabilité pour qu'il y ait un moment où Béatrice et Hieu se trouvent au même endroit sur le chemin. (Béatrice et Hieu sont au même endroit à un moment donné s'ils commencent en même temps ou finissent en même temps ou s'ils se trouvent au même endroit en même temps à un point quelconque entre le début et la fin du chemin).

      (ii) Un jour, Béatrice utilise un scooter et parcourt tout le chemin à une vitesse constante de x km/h (x étant tel que $x > 5$ et $x < 15$). Hieu, quant à lui, parcourt tout le chemin à vélo à une vitesse constante de 15 km/h. Si la probabilité pour qu'il y ait un moment où Béatrice et Hieu se trouvent au même endroit sur le chemin est égale à $\frac{13}{200}$, déterminer l'intervalle des valeurs possibles de x.