Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Pascal 2021

(9e année – Secondaire III)

le mardi 23 février 2021
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 24 février 2021
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. Puisque Q est situé entre P et R, alors $PQ + QR = PR$.
   Puisque $PR = 12$ et $PQ = 3$, alors $QR = PR - PQ = 12 - 3 = 9$.

   Réponse : (D)

2. La fraction $\dfrac{4}{8}$ est équivalente à la fraction $\dfrac{1}{2}$.
   Donc, on devrait placer le nombre 4 dans le $\square$.

   Réponse : (C)

3. Hélène travaille pendant 4 heures et gagne 13,25 \$ de l'heure.
   Donc, elle gagnera un montant total de $4 \times 13{,}25$ \$ $= 53{,}00$ \$.

   Réponse : (E)

4. Chacun des carrés ayant des côtés de longueur 1 a un périmètre de $4 \times 1 = 4$.
   Puisque les 7 carrés dans la figure ont des périmètres qui ne se chevauchent pas, alors la figure entière a un périmètre de $7 \times 4 = 28$.

   Réponse : (D)

5. Puisqu'il y a 60 secondes dans 1 minute, alors il y a $1{,}5 \times 60 = 90$ secondes dans 1,5 minutes.
   Donc, Guillaume compléta son premier tour en 63 secondes, son deuxième tour en 60 secondes, son troisième tour en 90 secondes, son quatrième tour en 68 secondes et son cinquième tour en 57 secondes.
   Donc, lorsqu'on place ces temps de parcours en ordre croissant, on obtient 57, 60, 63, 68, 90.
   Donc, ces temps de parcours ont une médiane de 63 secondes.

   Réponse : (A)

6. Le rectangle initial a une aire de $13 \times 10 = 130$.
   Lorsque la longueur et la largeur du rectangle initial sont chacune augmentées de 2, on obtient un rectangle de dimensions 15×12.
   Le nouveau rectangle a une aire de $15 \times 12 = 180$. Donc, l'aire a augmenté de $180 - 130 = 50$.

   Réponse : (A)

7. *Solution 1*
   10 % de 500 est égal à $\frac{1}{10}$ de 500, soit à 50.
   Donc, 110 % de 500 est égal à $500 + 50$, soit à 550.

   Solution 2
   110 % de 500 est égal à $\dfrac{110}{100} \times 500 = 110 \times 5 = 550$.

   Réponse : (E)

8. *Solution 1*
   On annule chacune des opérations dans l'ordre inverse.
   Le résultat final, 85, a été obtenu en multipliant un nombre par 5. Ce nombre était $85 \div 5 = 17$.
   Le nombre 17 a été obtenu en soustrayant 2 de n. Donc, $n = 17 + 2 = 19$.

   Solution 2
   Lorsqu'on soustrait 2 de n, on obtient $n - 2$.
   Lorsque $n - 2$ est multiplié par 5, on obtient $5 \times (n - 2)$.
   D'après le problème, $5 \times (n-2) = 85$, d'où on a donc $5n - 10 = 85$, soit $5n = 95$ ou $n = \dfrac{95}{5} = 19$.

   Réponse : (B)

9. Puisque 2 cercles et 1 triangle s'équilibrent et que 1 triangle et 3 carrés s'équilibrent, alors 2 cercles et 3 carrés s'équilibrent.
Puisque 2 cercles et 3 carrés s'équilibrent, alors $2+2=4$ cercles et $3+3=6$ carrés s'équilibrent, ce qui correspond au choix de réponse (E).
(Pouvez-vous démontrer qu'aucun des autres choix n'équivaut à 6 carrés ?)
Réponse : (E)

10. Les entiers qui sont des multiples à la fois de 5 et de 7 sont ceux qui sont des multiples de 35.
Le plus petit multiple de 35 supérieur à 100 est $3 \times 35 = 105$. (Le multiple de 35 précédent étant $2 \times 35 = 70$.)
En comptant par bonds de 35 à partir de 105, on obtient 105, 140, 175, 210, 245, 280, 315.
Il y a 3 entiers dans cette liste qui sont entre 100 et 300 et qui ne sont pas des multiples de 10 (c.-à-d. ceux dont le chiffre des unités n'est pas 0). Ces entiers sont 105, 175 et 245.
Réponse : (C)

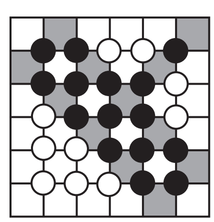
11. Puisque $a\nabla b = a^b \times b^a$, alors $2\nabla 3 = 2^3 \times 3^2 = 8 \times 9 = 72$.
Réponse : (B)

12. Puisque le triangle PQR est rectangle en Q, alors $\angle PRQ = 90^\circ - \angle QPR = 90^\circ - 54^\circ = 36^\circ$.
Puisque $\angle PRS = \angle QRS$, alors $\angle QRS = \frac{1}{2}\angle PRQ = \frac{1}{2}(36^\circ) = 18^\circ$.
Puisque le triangle RQS est rectangle en Q, alors $\angle RSQ = 90^\circ - \angle QRS = 90^\circ - 18^\circ = 72^\circ$.
Réponse : (E)

13. Puisque $m+1 = \dfrac{n-2}{3}$, alors $3(m+1) = n-2$.
On a donc $3m+3 = n-2$, d'où $3m-n = -2-3 = -5$.
Réponse : (B)

14. À partir de la case 38, le robot avance de 2 cases jusqu'à la case 36, se tourne de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre de manière à faire face à la case 29 et se déplace vers cette dernière.
À partir de la case 29, le robot avance de 2 cases jusqu'à la case 15, se tourne de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre de manière à faire face à la case 16 et se déplace vers cette dernière.
Réponse : (A)

15. Il y a 25 places possibles sur lesquelles on peut placer le cercle.
Dans la figure ci-dessous, ces places sont indiquées par un petit cercle noir si le cercle touche un nombre égal de carreaux ombrés et non ombrés (soit 2 de chaque) et par un petit cercle blanc s'il touche différents nombres de carreaux ombrés et non ombrés.

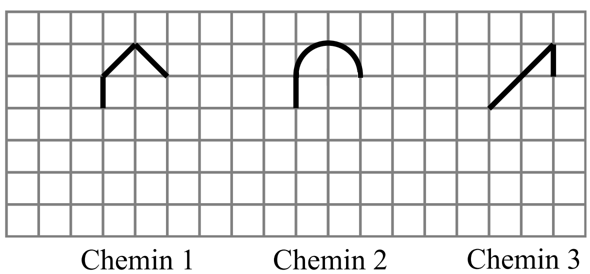


Donc, il y a 15 places où l'on peut placer le cercle de manière que ce dernier touche un nombre égal de carreaux ombrés et non ombrés.
On a donc une probabilité de $\frac{15}{25}$ (soit $\frac{3}{5}$) de placer le cercle de la manière souhaitée.
Réponse : (E)

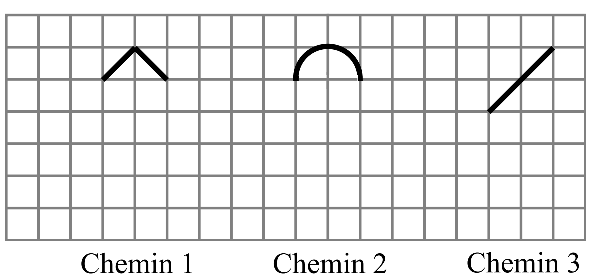
16. Lorsque l'on décompose un cube parfait en produit de facteurs premiers, le nombre de fois où chaque facteur premier parait est un multiple de 3 ; on peut donc séparer ces facteurs premiers en trois groupes identiques où le produit de chaque groupe est égal à la racine cubique du nombre initial.
En outre, si $n^3 = 2^4 \times 3^2 \times 5^5 \times k$, n étant un entier, alors l'entier n^3 admet les facteurs premiers 2, 3 et 5 un nombre de fois qui doit être un multiple de 3.
Puisque n^3 admet déjà quatre facteurs 2, alors k doit admettre au moins deux facteurs 2 supplémentaires afin que n^3 admette 2^6 comme facteur. (k pourrait également admettre plus de facteurs 2 à condition que le nombre total de facteurs 2 soit un multiple de 3.)
Puisque n^3 admet déjà deux facteurs 3, alors k doit admettre au moins un facteur 3 supplémentaire.
Puisque n^3 admet déjà cinq facteurs 5, alors k doit admettre au moins un facteur 5 supplémentaire.
Donc, k admet au moins deux facteurs 2, au moins un facteur 3 et au moins un facteur 5.
Cela signifie que la plus petite valeur possible de k est $2^2 \times 3 \times 5 = 60$. En principe, k pourrait admettre d'autres facteurs premiers. Or, puisque l'on veut la valeur la plus petite de k, on peut écarter cette idée.

Réponse : (C)

17. On commence la comparaison des longueurs de ces chemins en supprimant les portions identiques. Plus précisément, on supprime de chaque chemin le segment de droite horizontal de longueur 2, un segment de droite vertical de longueur 1 de la gauche et le segment de droite vertical de longueur 4 de la droite pour obtenir la figure ci-dessous :

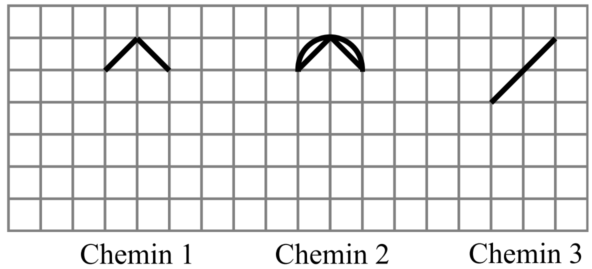


En supprimant les mêmes longueurs, on ne modifie pas les longueurs *relatives* des chemins. Chacun des chemins contient toujours un segment vertical de longueur 1, on supprime donc chacun de ces segments tout en conservant les longueurs relatives des chemins.



Chacun des Chemins 1 et 3 est désormais composé des diagonales de deux des carrés du quadrillage. Donc, les Chemins 1 et 3 étaient initialement de même longueur, d'où on a donc $x = z$. Cela signifie que le bon choix de réponse doit être (C) ou (E), selon que $x = z$ est inférieur à y ou supérieur à y.

Pour répondre à cette question, on trace les segments restants du Chemin 1 sous le Chemin 2 :



Puisque le chemin le plus court entre deux points est la ligne droite reliant ces deux, alors le demi-cercle a une longueur supérieure à la longueur totale des diagonales de deux des carrés du quadrillage.
Cela signifie que $x = z$ et que $z < y$.
(Une autre approche consisterait à déterminer la longueur de chacun des chemins initiaux et les comparer par la suite. Pouvez-vous le faire ?)

Réponse : (C)

18. La durée entre 10 h 10 et 10 h 55 est de quarante-cinq minutes.
La durée entre 10 h 55 et 11 h 58 est de une heure et trois minutes, soit soixante-trois minutes.
Étant donné que les trains arrivent toutes les x minutes, y compris à 10 h 10, à 10 h 55 et à 11 h 58, alors 45 et 63 sont tous deux des multiples de x. (Autrement dit, si l'on commence à 10 h 10 et que l'on compte par bonds de x minutes, on devrait tomber sur 10 h 55 et sur 11 h 58.)
Parmi les choix de réponse (9, 7, 5, 10, 11), 9 est le seul qui est un facteur commun de 45 et 63.

Réponse : (A)

19. *Solution 1*
On procède à rebours.
Il reste 1 bonbon à la fin du cinquième jour.
Puisque l'on a mangé $\frac{5}{6}$ des bonbons au cinquième jour, le bonbon à la fin du cinquième jour représente $\frac{1}{6}$ des bonbons restants à la fin du quatrième jour.
Donc, il restait $6 \times 1 = 6$ bonbons à la fin du quatrième jour.
Puisque l'on a mangé $\frac{4}{5}$ des bonbons au quatrième jour, ces 6 bonbons représentent $\frac{1}{5}$ des bonbons restants à la fin du troisième jour.
Donc, il restait $5 \times 6 = 30$ bonbons à la fin du troisième jour.
Puisque l'on a mangé $\frac{3}{4}$ des bonbons au troisième jour, ces 30 bonbons représentent $\frac{1}{4}$ des bonbons restants à la fin du deuxième jour.
Donc, il restait $4 \times 30 = 120$ bonbons à la fin du deuxième jour.
Puisque l'on a mangé $\frac{2}{3}$ des bonbons au deuxième jour, ces 120 bonbons représentent $\frac{1}{3}$ des bonbons restants à la fin du premier jour.
Donc, il restait $3 \times 120 = 360$ bonbons à la fin du premier jour.
Puisque l'on a mangé $\frac{1}{2}$ des bonbons au premier jour, ces 360 bonbons représentent $\frac{1}{2}$ des bonbons que contenait le sac initialement.
Donc, il y avait $2 \times 360 = 720$ bonbons dans le sac avant le premier jour.

Solution 2
Supposons qu'il y avait x bonbons dans le sac avant le premier jour.
Au premier jour, on a mangé $\frac{1}{2}$ des bonbons, cela signifie qu'il ne restait plus que $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ des bonbons.

Puisqu'il y avait x bonbons dans le sac avant le premier jour, il ne restait plus que $\frac{1}{2}x$ bonbons à la fin du premier jour.
Au deuxième jour, on a mangé $\frac{2}{3}$ des bonbons restants. Donc, des bonbons qu'il y avait au début du jour, il n'en reste plus que $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ à la fin du jour.
Puisqu'il y avait $\frac{1}{2}x$ bonbons au début du deuxième jour, il ne restait plus que $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}x = \frac{1}{6}x$ bonbons à la fin du deuxième jour.
Au troisième jour, on a mangé $\frac{3}{4}$ des bonbons restants. Donc, des bonbons qu'il y avait au début du jour, il n'en reste plus que $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ à la fin du jour.
Puisqu'il y avait $\frac{1}{6}x$ bonbons au début du troisième jour, il ne restait plus que $\frac{1}{4} \times \frac{1}{6}x = \frac{1}{24}x$ bonbons à la fin du troisième jour.
Au quatrième jour, on a mangé $\frac{4}{5}$ des bonbons restants. Donc, des bonbons qu'il y avait au début du jour, il n'en reste plus que $1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$ à la fin du jour.
Puisqu'il y avait $\frac{1}{24}x$ bonbons au début du quatrième jour, il ne restait plus que $\frac{1}{5} \times \frac{1}{24}x = \frac{1}{120}x$ bonbons à la fin du quatrième jour.
Au cinquième jour, on a mangé $\frac{5}{6}$ des bonbons restants. Donc, des bonbons qu'il y avait au début du jour, il n'en reste plus que $1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$ à la fin du jour.
Puisqu'il y avait $\frac{1}{120}x$ bonbons au début du cinquième jour, il ne restait plus que $\frac{1}{6} \times \frac{1}{120}x = \frac{1}{720}x$ bonbons à la fin du cinquième jour.
Puisqu'il ne reste qu'un seul bonbon, alors $\frac{1}{720}x = 1$, d'où $x = 720$. Donc, il y avait 720 bonbons dans le sac avant le premier jour.

Réponse : (B)

20. Dans le tableau ci-dessous, on dresse la liste des entiers possibles en déterminant leurs chiffres de gauche à droite. Dans chaque cas, on peut déterminer la divisibilité requise soit en effectuant la division ou en utilisant les critères de divisibilité suivants :
– Un entier est divisible par 3 lorsque la somme de tous ses chiffres est divisible par 3.
– Un entier est divisible par 4 lorsque le nombre formé par les deux derniers chiffres est divisible par 4.
– Un entier est divisible par 5 lorsque son chiffre des unités est 0 ou 5.

$8R$	$8RS$	$N = 8RST$
81	812	8120
		8125
	816	8160
		8165
84	840	8400
		8405
	844	8440
		8445
	848	8480
		8485
87	872	8720
		8725
	876	8760
		8765

Dans la première colonne, on remarque que 81, 84 et 87 sont les entiers entre 80 et 89 qui sont des multiples de 3. Dans la deuxième colonne, on détermine les multiples de 4 entre 810 et 819, entre 840 et 849, et entre 870 et 879. Dans la troisième colonne, on ajoute les chiffres des unités

permis, soit 0 ou 5.
Cette analyse démontre qu'il y a 14 valeurs possibles de N.

RÉPONSE : (E)

21. Puisque les trois cubes ont un volume moyen de 700 cm^3, leur volume total est de 3×700 cm^3 ou 2100 cm^3.
Un cube ayant des arêtes de s cm a un volume de s^3 cm^3.
Donc, $3^3 + 12^3 + x^3 = 2100$, d'où $27 + 1728 + x^3 = 2100$ ou $x^3 = 345$.
Puisque $x^3 = 345$, alors $x \approx 7{,}01$, d'où on a donc que 7 est le choix de réponse le plus près.

RÉPONSE : (E)

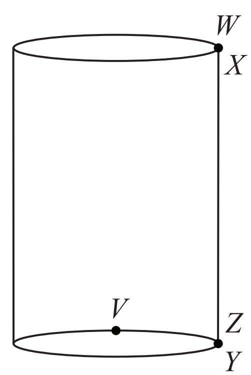
22. Chaque bloc a une hauteur de 2, de 3 ou de 6.
Donc, la hauteur totale d'une tour de quatre blocs est égale à la somme des hauteurs des 4 blocs.
Si les 4 blocs ont un hauteur de 6, alors la hauteur totale est égale à $4 \times 6 = 24$.
Si 3 blocs ont une hauteur de 6, le quatrième bloc a une hauteur de 3 ou de 2.
Donc, les hauteurs possibles sont $3 \times 6 + 3 = 21$ et $3 \times 6 + 2 = 20$.
Si 2 blocs ont une hauteur de 6, les troisième et quatrième blocs ont chacun une hauteur de 3 ou de 2.
Donc, les hauteurs possibles sont $2 \times 6 + 3 + 3 = 18$, $2 \times 6 + 3 + 2 = 17$ et $2 \times 6 + 2 + 2 = 16$.
Si 1 bloc a une hauteur de 6, les deuxième, troisième et quatrième blocs ont chacun une hauteur de 3 ou de 2.
Donc, les hauteurs possibles sont $6 + 3 + 3 + 3 = 15$, $6 + 3 + 3 + 2 = 14$, $6 + 3 + 2 + 2 = 13$ et $6 + 2 + 2 + 2 = 12$.
Si aucun des blocs n'a une hauteur de 6, les hauteurs possibles sont

$$3 + 3 + 3 + 3 = 12, 3 + 3 + 3 + 2 = 11, 3 + 3 + 2 + 2 = 10, 3 + 2 + 2 + 2 = 9, 2 + 2 + 2 + 2 = 8$$

Les hauteurs possibles sont donc $24, 21, 20, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8$.
Il y a 14 hauteurs possibles.

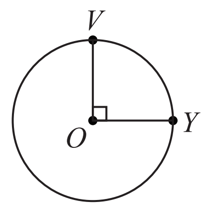
RÉPONSE : (B)

23. Lorsque le cylindre est créé, W touche X tandis que Z touche Y.



Cela signifie que WY est vertical et est donc perpendiculaire au plan de la base circulaire du cylindre.
Cela signifie que le triangle VYW est rectangle en Y.
D'après le théorème de Pythagore, $WV^2 = WY^2 + VY^2$.
Remarquons que WY est égal à la hauteur du rectangle, soit 3 (la longueur de WZ) et que VY est désormais mesuré *à travers* le cylindre et non le long du segment de droite ZY.
Soit O le centre de la base circulaire du cylindre.

Dans le rectangle initial, $ZY = WX = 4$ et $ZV = 3$, d'où $VY = 1 = \frac{1}{4}ZY$.
Cela signifie que V est situé à un quart de la circonférence de la base circulaire en allant de Y à Z.



Donc, $\angle YOV = 90°$ puisque $90°$ est égal au quart de l'angle plein autour du centre.
Donc, le triangle YOV est rectangle en O.
D'après le théorème de Pythagore, $VY^2 = VO^2 + OY^2$.
Puisque YO et OV sont des rayons de la base circulaire, alors $VO = OY$, d'où $YV^2 = 2VO^2$.
Puisque la base circulaire a une circonférence de 4 (la longueur initiale de ZY), alors si la base a un rayon de r, on a $2\pi r = 4$, d'où $r = \dfrac{4}{2\pi} = \dfrac{2}{\pi}$.
Puisque $VO = r$, alors $YV^2 = 2VO^2 = 2\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^2 = \dfrac{8}{\pi^2}$.
Cela signifie que

$$WV^2 = WY^2 + YV^2 = 9 + \frac{8}{\pi^2} = \frac{9\pi^2 + 8}{\pi^2} = \frac{8 + 9\pi^2}{\pi^2}$$

d'où $WV = \sqrt{\dfrac{8 + 9\pi^2}{1 \cdot \pi^2}}$.
Puisque π^2 a un coefficient de 1 dans le dénominateur, il n'est pas possible de « reduire » davantage les valeurs de a, b et c. On a donc $a = 8$, $b = 9$ et $c = 1$, d'où $a + b + c = 18$.

Réponse : (C)

24. Commençons avec une liste de $66 = 2 \times 33$ éléments. Les éléments aux 33 premières positions

$$1, 2, 3, \ldots, 31, 32, 33$$

subissent un entremêlement et sont placés respectivement aux positions impaires de la nouvelle liste, soit aux positions

$$1, 3, 5, \ldots, 61, 63, 65.$$

Cela signifie qu'un élément à la position x $(1 \leq x \leq 33)$ est placé à la position $2x - 1$ après un entremêlement.
On peut constater l'efficacité de cette formule en déplaçant d'abord les éléments aux positions $1, 2, 3, \ldots, 31, 32, 33$ vers les positions paires $2, 4, 6, \ldots, 62, 64, 66$ (doublant ainsi les numéros de position initiales), puis en décalant chacun des éléments d'une position vers l'arrière à

$$1, 3, 5, \ldots, 61, 63, 65$$

De plus, les éléments aux 33 positions suivantes

$$34, 35, 36, \ldots, 64, 65, 66$$

subissent un entremêlement et sont placés respectivement aux positions paires de la nouvelle liste, soit aux positions

$$2, 4, 6, \ldots, 62, 64, 66.$$

Cela signifie qu'un élément à la position x ($34 \leq x \leq 66$) est placé à la position $2(x-33)$ après un entremêlement.
On peut constater l'efficacité de cette formule en décalant chacun des éléments aux positions $34, 35, 36, \ldots, 64, 65, 66$ en arrière de 33 positions, soit aux positions : $1, 2, 3, \ldots, 31, 32, 33$, puis en doublant leurs numéros de position pour obtenir $2, 4, 6, \ldots, 62, 64, 66$.

En résumé, lorsque l'élément à la position x subit un entremêlement, il est placé
– à la position $2x-1$ si $1 \leq x \leq 33$
– à la position $2(x-33)$ si $34 \leq x \leq 66$
Donc, l'entier 47 est déplacé successivement comme suit :

Liste	Position
1	47
2	$2(47-33)=28$
3	$2(28)-1=55$
4	$2(55-33)=44$
5	$2(44-33)=22$
6	$2(22)-1=43$
7	$2(43-33)=20$
8	$2(20)-1=39$
9	$2(39-33)=12$
10	$2(12)-1=23$
11	$2(23)-1=45$
12	$2(45-33)=24$
13	$2(24)-1=47$

Comme l'entier 47 revient à la position 47 dans la liste 13, cela signifie que ses positions vont se répéter selon un cycle de longueur 12 :

$$47, 28, 55, 44, 22, 43, 20, 39, 12, 23, 45, 24$$

car la position vers laquelle un entier se déplace est entièrement déterminée par sa position précédente. Ainsi, la liste se répétera aussitôt qu'une position se répète.
On remarque que l'entier 47 est à la position 24 dans chaque 12e liste en commençant par la 12e liste.
Puisque $12 \times 83 = 996$ et $12 \times 84 = 1008$, le cycle se répète 83 fois et donc l'entier 47 est en 24e position dans 83 listes. Même si un 84e cycle débute, ce cycle ne se termine par et donc 47 ne parait pas en 24e position pour une 84e fois parmi les 1001 listes.

Réponse : (C)

25. Après que Yann ait supprimé 4 des n entiers de sa liste, la liste ne contient plus que $n-4$ entiers.
Supposons que les $n-4$ entiers restants ont une somme de T.
Ces $n-4$ entiers one une moyenne de $89{,}5625 = 89{,}5 + 0{,}0625 = 89 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = 89\frac{9}{16} = \frac{1433}{16}$.
Puisque les $n-4$ entiers ont une somme de T, alors $\frac{T}{n-4} = \frac{1433}{16}$, d'où $16T = 1433(n-4)$.
Puisque 1433 et 16 n'ont aucun diviseur commun supérieur à 1 (les diviseurs positifs de 16 sont 1, 2, 4, 8, 16, dont aucun autre que 1 n'est un diviseur de 1433), la valeur de $n-4$ est un multiple de 16.

Puisque $100 < p < q < r < s$, la liste initiale comprend plus de 100 nombres.
Puisque la liste initiale comprend des entiers consécutifs commençant à 1 et que seuls 4 nombres

sur plus de 100 sont supprimés, il semble probable que la moyenne de la liste initiale et la moyenne de la nouvelle liste soient assez rapprochées.
Puisque la nouvelle liste a une moyenne de 89,5625 (ce qui est près de 90), on peut suggérer avec grande confiance que la moyenne de la liste initiale est près de 90.
Puisque la liste initiale d'entiers strictement positifs commence à 1, alors on peut supposer que la liste initiale contient environ 180 entiers.
Autrement dit, n semblerait être près de 180.
On sait que $n-4$ est un multiple de 16. Les multiples de 16 les plus près de 180 sont 160, 176 et 192, ce qui correspond à $n = 164$, $n = 180$ et $n = 196$.

Supposons que $n = 180$, ce qui semble être la possibilité la plus probable. On montrera à la fin de la solution que celle-ci est la seule valeur possible de n.
À partir de l'équation $\dfrac{T}{n-4} = 89{,}5625$ on obtient $T = 176 \times 89{,}5625 = 15\,763$.
Les n entiers de la liste initiale ont une somme de

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-1) + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

Lorsque $n = 180$, les entiers $1, 2, 3, \ldots, 178, 179, 180$ ont une somme de $\frac{1}{2}(180)(181) = 16\,290$.
Puisque les nombres de la liste initiale ont une somme de 16 290 tandis que ceux de la liste ne contenant plus que $n-4$ entiers ont une somme de 15 763, les quatre entiers supprimés ont une somme de $16\,290 - 15\,763 = 527$.
Autrement dit, $p + q + r + s = 527$.

On veut déterminer le nombre de façons dont on peut choisir p, q, r, s tels que

$$100 < p < q < r < s \leq 180$$

que $p + q + r + s = 527$ et qu'au moins trois parmi les entiers p, q, r, s soient consécutifs.
Le quatrième de ces entiers est au moins 101 et au plus 180, ce qui signifie que la somme des trois entiers consécutifs est supérieure ou égale à $527 - 180 = 347$ et inférieure ou égale à $527 - 101 = 426$.
Cela signifie que les entiers consécutifs sont au moins $115, 116, 117$ (dont la somme est de 348) puisque $114 + 115 + 116 = 345$ (ce qui est trop petit et des entiers inférieurs à ces derniers auront des sommes encore plus petites).
Si p, q et r égalent 115, 116 et 117, alors $s = 527 - 348 = 179$.
Les entiers consécutifs sont au plus $141, 142, 143$ (dont la somme est de 426) puisque la somme $142 + 143 + 144 = 429$ (ce qui est trop grand et des entiers supérieurs à ces derniers auront des sommes encore plus grandes).
Si p, q, et r égalent 141, 142 et 143, alors $s = 527 - 426 = 101$.
Si l'on augmente chacun des trois entiers consécutifs de 1, on peut maintenir une somme constante en diminuant le quatrième entier de 3.
De tout cela, on obtient les listes p, q, r, s suivantes :

$$115, 116, 117, 179 \quad ; \quad 116, 117, 118, 176 \quad ; \quad \ldots \quad ; \quad 130, 131, 132, 134$$

$$128, 132, 133, 134 \quad ; \quad 125, 133, 134, 135 \quad ; \quad \ldots \quad ; \quad 101, 141, 142, 143$$

Remarquez qu'on ne peut utiliser 131, 132, 133, 131, puisque p, q, r, s doivent être distincts.
Il y a 26 listes d'entiers que l'on peut supprimer (16 dans le premier ensemble et 10 dans le

second ensemble).
Les valeurs correspondantes de s sont :

$$179, 176, 173, 170, 167, 164, 161, 158, 155, 152, 149, 146, 143, 140, 137, 134$$

$$134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143$$

Puisque les deux listes ont 4 valeurs de s en commun, alors il y a $26 - 4 = 22$ valeurs possibles de s.

Pourquoi $n = 180$ est-elle la seule valeur possible de n ?
Pour le voir, on utilise le fait que la moyenne d'une liste d'entiers consécutifs commençant par a et se terminant par b est égale à la moyenne de a et b, ou $\frac{a+b}{2}$. (Cela est vrai car les entiers de la liste ont une différence constante et sont donc uniformément répartis, ce qui signifie que la moyenne des premier et dernier entiers sera égale à la moyenne de tous les entiers de la liste.)
La liste initiale d'entiers est $1, 2, \ldots, n-1, n$. Ces derniers ont une moyenne de $\frac{n+1}{2}$.
Si l'on supprime les quatre entiers les plus grands de la liste, les entiers de la nouvelle liste sont $1, 2, \ldots, n-5, n-4$, dont la moyenne est de $\frac{n-3}{2}$.
Si l'on supprime les quatre entiers les plus petits de la liste, les entiers de la nouvelle liste sont $5, 6, \ldots, n-1, n$, dont la moyenne est de $\frac{n+5}{2}$.
Si l'on supprime n'importe quels quatre entiers de la liste, la somme des entiers restants est supérieure ou égale à celle des entiers $1, 2, \ldots, n-5, n-4$ et inférieur ou égale à celle des entiers $5, 6, \ldots, n-1, n$. Puisque le dénominateur dans le calcul de la moyenne demeure constant, alors n'importe quelle liste dont on a supprimé les quatre entiers a une moyenne supérieure ou égale à $\frac{n-3}{2}$ et inférieure ou égale à $\frac{n+5}{2}$.

Cela signifie que la vraie moyenne (soit 89,5625) est supérieure ou égale à $\frac{n-3}{2}$ et inférieure ou égale à $\frac{n+5}{2}$.

Puisque $89{,}5625 \geq \frac{n-3}{2}$, alors $n - 3 \leq 179{,}125$, d'où $n \leq 182{,}125$.

Puisque $89{,}5625 \leq \frac{n+5}{2}$, alors $n + 5 \geq 179{,}125$, d'où $n \geq 174{,}125$.

Puisque n est un entier, alors $175 \leq n \leq 182$, d'où $171 \leq n - 4 \leq 178$.
Puisque $n - 4$ est un multiple de 16, alors $n - 4 = 176$, d'où $n = 180$, ce qu'il fallait démontrer.

Réponse : 22

(La bonne réponse ne figurait pas parmi les choix de réponse de la version initiale du problème.)