Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Pascal

(9^e année – Sec. III)

le mardi 23 février 2021

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 24 février 2021

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 60 minutes

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Directives

1. Attendez le signal du surveillant ou de la surveillante avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponses. Au besoin, demandez à l'enseignante ou à l'enseignant d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur droite de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école et le nom de la ville.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats admissibles.**
6. Le concours est composé de questions à choix multiple. Chaque question est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. Notation: Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C.
   Une réponse fautive n'est *pas* pénalisée.
   Chaque question laissée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 10 questions.
8. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui visuel seulement.
9. Après le signal du surveillant ou de la surveillante, vous aurez 60 minutes pour terminer.
10. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Pascal, Cayley ou Fermat.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

Notation: Une réponse fautive *n'est pas pénalisée.*
On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 10 questions.

Partie A (5 points par bonne réponse)

1. Dans la figure ci-contre, le point Q est situé sur un segment de droite délimité par les points P et R. Étant donné que $PR = 12$ et que $PQ = 3$, quelle est la longueur de QR ?

(A) 6 **(B)** 10 **(C)** 8
(D) 9 **(E)** 4

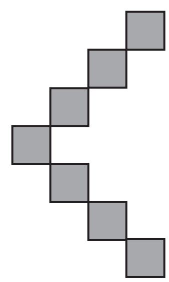
2. Quel nombre devrait-on placer dans le $\square$ afin que l'égalité $\frac{1}{2} = \frac{\square}{8}$ soit vérifiée ?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** 6 **(E)** 7

3. Hélène gagne 13,25 $ de l'heure en travaillant dans un magasin. Quelle somme d'argent gagnera-t-elle en 4 heures ?

(A) 54,00 $ **(B)** 56,25 $ **(C)** 52,25 $ **(D)** 51,00 $ **(E)** 53,00 $

4. Dans la figure ci-contre, des carrés ayant des côtés de longueur 1 se touchent les uns les autres en leurs sommets. Quel est le périmètre de cette figure ?



(A) 14 **(B)** 20 **(C)** 24
(D) 28 **(E)** 32

5. Guillaume est un coureur élite. Il vient de parcourir cinq tours de piste. Il compléta son premier tour en 63 secondes, son deuxième tour en 1 minute, son troisième tour en 1,5 minute, son quatrième tour en 68 secondes et son cinquième tour en 57 secondes. Quelle est la médiane de ces temps de parcours ?

(A) 63 secondes **(B)** 1 minute **(C)** 1,5 minute
(D) 68 secondes **(E)** 57 secondes

6. Un rectangle a une longueur de 13 et une largeur de 10. La longueur et la largeur du rectangle sont chacune augmentées de 2. De combien l'aire du rectangle augmente-t-elle ?

(A) 50 **(B)** 20 **(C)** 38 **(D)** 35 **(E)** 26

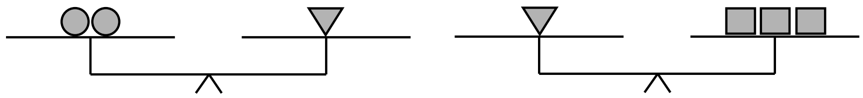
7. Parmi les nombres suivants, lequel est égal à 110 % de 500 ?

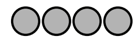
(A) 610 **(B)** 510 **(C)** 650 **(D)** 505 **(E)** 550

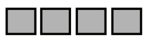
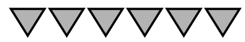
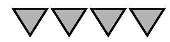
8. On soustrait 2 d'un entier n et on multiplie cette différence par 5. Si l'on obtient 85 comme résultat, quelle était la valeur de n ?

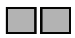
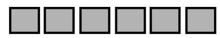
(A) 17 **(B)** 19 **(C)** 21 **(D)** 23 **(E)** 25

9. Les deux balances ci-dessous sont en équilibre.



Parmi les figures suivantes, laquelle a la même masse que  ?

(A)  **(B)**  **(C)** 

(D)  **(E)** 

10. Combien d'entiers entre 100 et 300 sont des multiples à la fois de 5 et de 7 mais ne sont pas des multiples de 10 ?

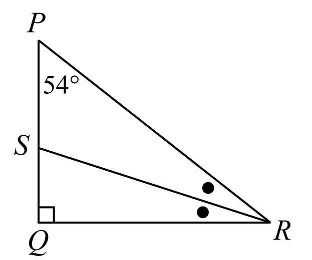
(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5

Partie B (6 points par bonne réponse)

11. Si a et b sont des entiers strictement positifs, l'opération ∇ est définie par $a \nabla b = a^b \times b^a$. Quelle est la valeur de $2 \nabla 3$?

(A) 36 **(B)** 72 **(C)** 3125 **(D)** 7776 **(E)** 46656

12. Dans la figure ci-contre, le triangle PQR est rectangle en Q et on a $\angle QPR = 54°$. De plus, le point S est situé sur PQ tel que $\angle PRS = \angle QRS$. Quelle est la mesure de l'angle RSQ ?



(A) 36° **(B)** 54° **(C)** 108°

(D) 18° **(E)** 72°

13. Si $m + 1 = \dfrac{n-2}{3}$, quelle est la valeur de $3m - n$?

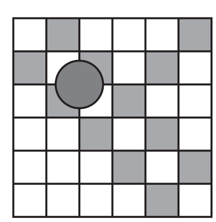
(A) -1 **(B)** -5 **(C)** -3 **(D)** -9 **(E)** -7

14. Un robot est placé sur le quadrillage illustré ci-contre. Le robot est initialement positionné sur la case 25 de manière à faire face à la case 32. Le robot (i) avance de 2 cases dans la direction à laquelle il fait face, (ii) tourne de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre et (iii) avance d'une case dans la nouvelle direction. Ainsi, le robot se déplace vers la case 39, se tourne de manière à faire face à la case 38 et se déplace vers cette dernière. Le robot répète la séquence de mouvements (i), (ii), (iii) deux fois de plus. Étant donné que le robot ne quitte jamais le quadrillage, sur quelle case finit-il ?

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

(A) 16 **(B)** 20 **(C)** 29 **(D)** 24 **(E)** 25

15. Nathan a un quadrillage composé de carreaux dont certains sont ombrés tandis que d'autres ne le sont pas. Chacun des carreaux est de dimensions 2 cm × 2 cm. Nathan place au hasard sur le quadrillage un cercle ayant un diamètre de 3 cm de manière que le centre du cercle soit situé au point où se touchent quatre carreaux. Quelle est la probabilité qu'il place le cercle de manière que ce dernier touche un nombre égal de carreaux ombrés et non ombrés ?

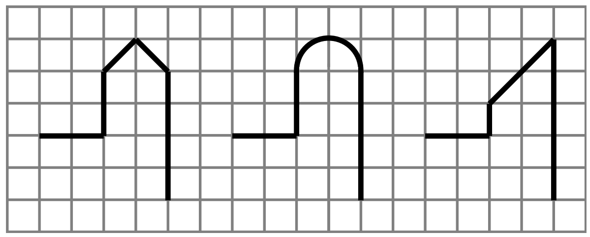


(A) $\frac{13}{25}$ **(B)** $\frac{17}{25}$ **(C)** $\frac{11}{25}$ **(D)** $\frac{21}{25}$ **(E)** $\frac{3}{5}$

16. L'entier m est un *cube parfait* uniquement lorsqu'il est égal à n^3, n étant un entier quelconque. Par exemple, 1000 est un cube parfait puisque $1000 = 10^3$. Quel est le plus petit entier strictement positif k pour lequel l'entier $2^4 \times 3^2 \times 5^5 \times k$ est un cube parfait ?

(A) 12 **(B)** 30 **(C)** 60 **(D)** 480 **(E)** 1620

17. Dans la figure ci-dessous, les Chemins 1, 2 et 3 sont tracés sur un quadrillage.



Les Chemins 1 et 3 sont entièrement composés de segments de droites. Le Chemin 2 est composé de segments de droites et d'un demi-cercle. Étant donné que le Chemin 1 a une longueur de x, que le Chemin 2 a une longueur de y et que le Chemin 3 a une longueur de z, lequel des choix de réponse suivants est vrai ?

(A) $x < y$ et $y < z$ **(B)** $x < z$ et $z < y$ **(C)** $x = z$ et $z < y$
(D) $z < x$ et $x < y$ **(E)** $y < z$ et $z = x$

18. Les trains arrivent à la gare Pascal toutes les x minutes, x étant un entier strictement positif. De plus, les trains arrivent à la gare plusieurs fois par jour, y compris à 10 h 10, à 10 h 55 et à 11 h 58. Parmi les nombres suivants, lequel est une valeur possible de x ?

(A) 9 **(B)** 7 **(C)** 10 **(D)** 5 **(E)** 11

19. Des amis se partagent un sac de bonbons.
Au premier jour, ils mangent $\frac{1}{2}$ des bonbons dans le sac.
Au deuxième jour, ils mangent $\frac{2}{3}$ des bonbons restants.
Au troisième jour, ils mangent $\frac{3}{4}$ des bonbons restants.
Au quatrième jour, ils mangent $\frac{4}{5}$ des bonbons restants.
Au cinquième jour, ils mangent $\frac{5}{6}$ des bonbons restants.
À la fin du cinquième jour, il reste 1 bonbon dans le sac.
Combien de bonbons y avait-il dans le sac avant le premier jour ?

(A) 512 **(B)** 720 **(C)** 1024 **(D)** 1440 **(E)** 2048

20. Soit R, S et T des chiffres et soit N un entier strictement positif de quatre chiffres représenté par $8RST$. Autrement dit, N a 8 pour chiffre des milliers, R pour chiffre des centaines, S pour chiffre des dizaines et T pour chiffre des unités, d'où on a donc $N = 8000 + 100R + 10S + T$. De plus, supposons que chacune des conditions suivantes est remplie :
- L'entier de deux chiffres représenté par $8R$ est divisible par 3.
- L'entier de trois chiffres représenté par $8RS$ est divisible par 4.
- L'entier de quatre chiffres représenté par $8RST$ est divisible par 5.
- Les chiffres de N ne sont pas tous forcément différents.

Combien y a-t-il de valeurs possibles pour l'entier N ?

(A) 8 **(B)** 16 **(C)** 12 **(D)** 10 **(E)** 14

Partie C (8 points par bonne réponse)

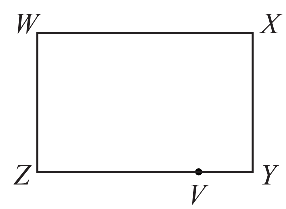
21. Trois cubes ont des arêtes de 3 cm, de 12 cm et de x cm. Les trois cubes ont un volume moyen de 700 cm^3. Quelle est la valeur de x à l'unité près ?

(A) 6 **(B)** 10 **(C)** 8 **(D)** 9 **(E)** 7

22. Azmi a quatre blocs, chacun ayant la forme d'un prisme droit à base rectangulaire et chacun étant de dimensions $2 \times 3 \times 6$. Elle empile les quatre blocs soigneusement les uns sur les autres sur une surface plane de manière à former une tour de quatre blocs de haut. Quel est le nombre de hauteurs possibles que peut avoir cette tour ?

(A) 13 **(B)** 14 **(C)** 15 **(D)** 16 **(E)** 17

23. Le rectangle $WXYZ$ a $WX = 4$, $WZ = 3$ et $ZV = 3$. Le rectangle est courbé de manière que les côtés WZ et XY se touchent sans se chevaucher afin de créer un cylindre. Autrement dit, W touche X tandis que Z touche Y. La distance la plus courte qui relie W et V et qui passe par l'intérieur du cylindre peut être exprimée sous la forme $\sqrt{\dfrac{a+b\pi^2}{c\pi^2}}$, a, b et c étant des entiers strictement positifs. Quelle est la plus petite valeur possible de $a+b+c$?



(A) 12 **(B)** 26 **(C)** 18
(D) 19 **(E)** 36

24. Soit $k \geq 2$ un entier strictement positif. On peut *entremêler* une liste de $2k$ éléments afin de produire une nouvelle liste de $2k$ éléments de la manière suivante :
- Les k premiers éléments de la liste initiale sont placés dans les positions impaires de la nouvelle liste dans le même ordre que celui dans lequel ils paraissaient dans la liste initiale.
- Les k éléments restants de la liste initiale sont placés dans les positions paires de la nouvelle liste dans le même ordre que celui dans lequel ils paraissaient dans la liste initiale.

Par exemple, lorsqu'on entremêle les éléments de la liste $P\ Q\ R\ S\ T\ U$, on obtient la nouvelle liste $P\ S\ Q\ T\ R\ U$. Un deuxième entremêlement produit la liste $P\ T\ S\ R\ Q\ U$. Ping a une liste des 66 entiers de 1 à 66, classés par ordre croissant. Il entremêle cette liste 1000 fois tout en enregistrant la nouvelle liste créée après chaque entremêlement. Dans combien de ces 1001 listes le nombre 47 parait-il en 24$^{\text{e}}$ position ?

(A) 90 **(B)** 71 **(C)** 83 **(D)** 72 **(E)** 84

25. Yann écrit les n premiers entiers strictement positifs consécutifs, $1, 2, 3, 4, \ldots, n-1, n$. Il supprime quatre entiers différents p, q, r, s de cette liste. Parmi les quatre entiers supprimés, au moins trois sont consécutifs et $100 < p < q < r < s$. Les entiers restants de la liste ont une moyenne de 89,5625. Combien y a-t-il de valeurs possibles de s ?

(A) 25 **(B)** 23 **(C)** 21 **(D)** 20 **(E)** 22

(La version d'origine de ce problème manquait la bonne réponse.)

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Pascal de 2021! Chaque année, plus de 265 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignante ou votre enseignant à vous inscrire au concours Fryer qui aura lieu en avril.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
- plus d'information à propos du concours Fryer
- des copies gratuites des concours précédents
- des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
- des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
- inscrire vos élèves aux concours Fryer, Galois et Hypatie qui auront lieu en avril
- jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne
- vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
- vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
- vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
- trouver les résultats de vos élèves dans les coucours