Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatie 2021

Avril 2021
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

Avril 2021
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Le coût total de la location d'une voiture est de 180,00 \$.

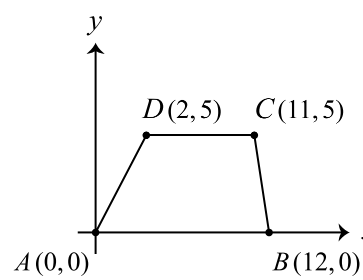
   Si 4 personnes louent une voiture, le coût par personne est de $\dfrac{180{,}00\ \$}{4} = 45{,}00\ \$$.

   (b) Étant donné que les membres du groupe partagent à parts égales le coût total de la location du véhicule, alors plus le groupe est petit, plus le coût par personne est élevé.
   Pour louer un VUS, le groupe doit comprendre un minimum de 5 passagers et le coût total est de 200,00 \$.

   Donc, le coût maximal possible par personne pour louer un VUS est de $\dfrac{200{,}00\ \$}{5} = 40{,}00\ \$$.

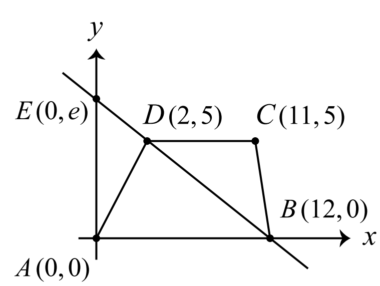
   (c) Soit f le coût total de la location d'une fourgonnette.
   Pour une location de fourgonnette, le coût maximal possible par personne se produit lorsqu'il y a 9 passagers (soit le plus petit nombre possible de passagers). Donc, le coût maximal possible par personne est égal à $\dfrac{f}{9}$.
   Le coût minimal possible par personne se produit lorsqu'il y a 12 passagers (soit le plus grand nombre possible de passagers). Donc, le coût minimal possible par personne est égal à $\dfrac{f}{12}$.
   Donc, $\dfrac{f}{9} - \dfrac{f}{12} = 6{,}00\ \$$ ou $\dfrac{4f-3f}{36} = 6{,}00\ \$$, d'où $f = 6{,}00\ \$ \times 36$.
   Donc, le coût total de la location d'une fourgonnette est de 216,00 \$.

2. (a) On trace le trapèze $ABCD$ comme dans la figure ci-contre.



   Les segments de droite AB et CD ont chacun une pente de 0 et sont donc parallèles.
   La longueur de AB est égale à la différence entre les abscisses de A et B, soit une différence de 12.
   La longueur de CD est égale à la différence entre les abscisses de C et D, soit une différence de $11 - 2 = 9$.
   La hauteur du trapèze est égale à la distance verticale entre AB et CD, soit 5.
   Le trapèze $ABCD$ a donc une aire de $\dfrac{5}{2}(AB + CD)$ ou $\dfrac{5}{2}(21) = \dfrac{105}{2}$.

   (b) La droite passant par B et D coupe l'axe des ordonnées en point E. Supposons que E a pour coordonnées $(0, e)$ comme on le voit dans la figure ci-contre.



   La droite passant par B et D a pour pente $\dfrac{5-0}{2-12} = -\dfrac{1}{2}$.

   Solution 1
   Puisque E,D et B sont tous situés sur la même droite, alors la pente de ED est égale à la pente de BD.
   Donc, $\dfrac{e-5}{0-2} = -\dfrac{1}{2}$ ou $\dfrac{e-5}{2} = \dfrac{1}{2}$, d'où $e - 5 = 1$ ou $e = 6$.
   Donc, le point E a pour coordonnées $(0, 6)$.

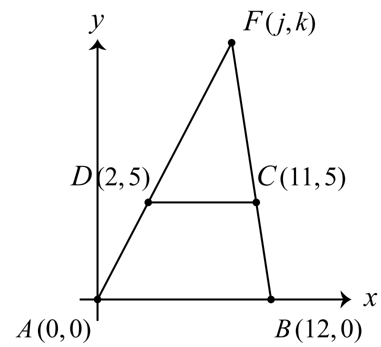
Solution 2
La droite passant par $B(12,0)$ et $D(2,5)$ a pour pente $-\frac{1}{2}$ et a donc pour équation $y-5=-\frac{1}{2}(x-2)$, d'où $y-5=-\frac{1}{2}x+1$ ou $y=-\frac{1}{2}x+6$. Puisque cette droite a une ordonnée à l'origine de 6, alors le point E a pour coordonnées $(0,6)$.

Solution 3
La droite passant par $B(12,0)$ et $D(2,5)$ a pour pente $-\frac{1}{2}$ et a donc pour équation $y-5=-\frac{1}{2}(x-2)$.

Cette droite passe par $E(0,e)$. Donc, $e-5=-\frac{1}{2}(0-2)$ ou $e=1+5=6$.

Le point E a donc pour coordonnées $(0,6)$.

(c) Dans la figure ci-contre, les côtés AD et BC sont prolongés de manière à se couper en point F.



Solution 1
Supposons que F a pour coordonnées (j,k).
Puisque A, D et F sont tous situés sur la même droite, alors la pente de AD est égale à la pente de AF.
Donc, $\frac{5}{2}=\frac{k}{j}$ ou $k=\frac{5}{2}j$.
Puisque B, C et F sont tous situés sur la même droite, alors la pente de BC est égale à la pente de BF.
Donc, $\frac{5-0}{11-12}=\frac{k-0}{j-12}$ ou $-5=\frac{k}{j-12}$, d'où $k=-5(j-12)$.
On reporte $k=\frac{5}{2}j$ dans l'équation pour obtenir $\frac{5}{2}j=-5(j-12)$ ou $j=-2(j-12)$, d'où $3j=24$ ou $j=8$.

Lorsque $j=8$, alors $k=\frac{5}{2}(8)=20$. Donc, F a pour coordonnées $(8,20)$.

Solution 2
La droite passant par $A(0,0)$ et $D(2,5)$ a pour pente $\frac{5}{2}$ et pour ordonnée à l'origine 0. La droite a donc pour équation $y=\frac{5}{2}x$.
La droite passant par $B(12,0)$ et $C(11,5)$ a pour pente -5 et a donc pour équation $y=-5(x-12)$.
Ces deux droites se coupent en F. Donc, on peut résoudre l'équation $\frac{5}{2}x=-5(x-12)$ pour obtenir les coordonnées de F. On obtient donc $x=-2(x-12)$ ou $3x=24$, d'où $x=8$.
Lorsque $x=8$, $y=\frac{5}{2}(8)=20$, d'où F a donc pour coordonnées $(8,20)$.

(d) Supposons que P a pour coordonnées (r, s).
De plus, supposons que AB est la base du triangle PAB.
Dans ce cas, si le triangle PAB a une hauteur de h, alors l'aire du triangle PAB est égale à $\frac{1}{2}(AB)h = 6h$.
Le triangle PAB a une aire de 42, d'où $6h = 42$ ou $h = 7$.
C'est-à-dire que la distance verticale entre $P(r, s)$ et la droite passant par A et B (qui est située sur l'axe des abscisses) est de 7 unités.
Il y a donc deux possibilités : soit $P(r, s)$ est situé 7 unités au-dessus de l'axe des abscisses (c.-à-d. sur la droite horizontale d'équation $y = 7$), soit $P(r, s)$ est situé 7 unités en dessous de l'axe des abscisses (c.-à-d. sur la droite horizontale d'équation $y = -7$).
Dans le premier cas, P a pour coordonnées $(r, 7)$. Dans le second cas, P a pour coordonnées $(r, -7)$.
Rappelons que P est situé sur la droite passant par B et D.
La droite passant par $B(12{,}0)$ et $D(2, 5)$ a pour pente $-\frac{1}{2}$ et a donc pour équation $y - 5 = -\frac{1}{2}(x - 2)$.
Si $P(r, 7)$ est situé sur cette droite, alors $7 - 5 = -\frac{1}{2}(r - 2)$ ou $-4 = r - 2$, d'où $r = -2$.
De même, si $P(r, -7)$ est situé sur cette droite, alors $-7 - 5 = -\frac{1}{2}(r - 2)$ ou $24 = r - 2$, d'où $r = 26$.
Donc, pour que le triangle PAB ait une aire de 42, le point P situé sur la droite passant par B et D peut avoir pour coordonnées $(-2, 7)$ ou $(26, -7)$.

3. (a) Puisque $a_n = 2^n$ lorsque $n \geq 1$, alors $a_5 = 2^5 = 32$.
Puisque $b_2 = 1, b_3 = 3$ et $b_n = b_{n-1} + 2b_{n-2}$ lorsque $n \geq 3$, alors $b_4 = b_3 + 2b_2 = 3 + 2(1) = 5$ et $b_5 = b_4 + 2b_3 = 5 + 2(3) = 11$.
Donc, $a_5 = 32$ et $b_5 = 11$.

(b) Puisque $b_1 = p \cdot (a_1) + q \cdot (-1)^1$ et $a_1 = 2$, alors $b_1 = 2p - q$.
D'après la définition de la suite B, on sait que $b_1 = 1$. Donc, $2p - q = 1$.
Puisque $b_2 = p \cdot (a_2) + q \cdot (-1)^2$ et $a_2 = 2^2 = 4$, alors $b_2 = 4p + q$.
D'après la définition de la suite B, on sait que $b_2 = 1$. Donc, $4p + q = 1$.
On a donc un système de deux équations à deux inconnues, soit p et q.
On additionne les deux équations membre à membre pour obtenir $6p = 2$, d'où $p = \frac{1}{3}$.
On reporte cette valeur dans l'une des équations pour obtenir $2\left(\frac{1}{3}\right) - q = 1$ ou $q = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$.
Donc, les nombres réels p et q pour lesquels $b_n = p \cdot (a_n) + q \cdot (-1)^n$ pour tout n $(n \geq 1)$ sont $p = \frac{1}{3}$ et $q = -\frac{1}{3}$.

(c) À l'aide de manipulations algébriques et des définitions $a_n = 2^n$ et $b_n = \frac{1}{3}(a_n) - \frac{1}{3}(-1)^n$ (où $n \geq 1$ pour chacune), on obtient les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}
S_n &= b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n \\
&= \left(\tfrac{1}{3}(a_1) - \tfrac{1}{3}(-1)\right) + \left(\tfrac{1}{3}(a_2) - \tfrac{1}{3}(-1)^2\right) + \left(\tfrac{1}{3}(a_3) - \tfrac{1}{3}(-1)^3\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{3}(a_n) - \tfrac{1}{3}(-1)^n\right) \\
&= \tfrac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) - \tfrac{1}{3}((-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + \cdots + (-1)^n) \\
&= \tfrac{1}{3}(2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n) - \tfrac{1}{3}(-1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^n)
\end{aligned}$$

Considérons séparément chacune des deux expressions entre parenthèses.
L'expression $2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$ est égale à la somme des n termes d'une suite géométrique

de premier terme $a = 2$ et de raison $r = 2$.
Donc, $2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2\left(\dfrac{1-2^n}{1-2}\right) = -2(1-2^n)$.
L'expression $-1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^n$ est la somme alternée des termes -1 et 1.
Cette somme est égale à 0 s'il y a un nombre pair de termes (c'est-à-dire lorsque n est un nombre pair) ou à -1 si n est impair.
On a donc :

$$S_n = \begin{cases} \frac{1}{3}(-2(1-2^n)) \text{ , si } n \text{ est pair} \\ \\ \frac{1}{3}(-2(1-2^n)) + \frac{1}{3} \text{ , si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

que l'on simplifie pour obtenir :

$$S_n = \begin{cases} \frac{2}{3}(2^n-1) \text{ , si } n \text{ est pair} \\ \\ \frac{2}{3}(2^n-1) + \frac{1}{3} \text{ , si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

On veut déterminer le plus petit entier strictement positif n qui vérifie $S_n \geq 16^{2021}$. Remarquons que la valeur de S_n augmente à mesure que n augmente.
Puisque $16 = 2^4$, alors $16^{2021} = (2^4)^{2021} = 2^{8084}$. Donc, on veut déterminer le plus petit entier strictement positif n qui vérifie $S_n \geq 2^{8084}$.

Lorsque n est pair, on a

$$\begin{aligned} \tfrac{2}{3}(2^n-1) &\geq 2^{8084} \\ 2^n - 1 &\geq 3 \cdot 2^{8083} \\ 2^n &\geq 3 \cdot 2^{8083} + 1 \end{aligned}$$

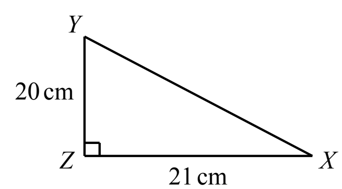
Lorsque n est impair, on a

$$\begin{aligned} \tfrac{2}{3}(2^n-1) + \tfrac{1}{3} &\geq 2^{8084} \\ \tfrac{2}{3}(2^n-1) &\geq 2^{8084} - \tfrac{1}{3} \\ 2^n - 1 &\geq 3 \cdot 2^{8083} - \tfrac{1}{2} \\ 2^n &\geq 3 \cdot 2^{8083} + \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Puisque 2^n est un entier pair, alors $3 \cdot 2^{8083} + 1$ est un entier impair et $3 \cdot 2^{8083} + \frac{1}{2}$ est entre un entier pair et un entier impair. Donc, les inéquations $2^n \geq 3 \cdot 2^{8083} + 1$ et $2^n \geq 3 \cdot 2^{8083} + \frac{1}{2}$ reviennent à dire que $2^n > 3 \cdot 2^{8083}$.

Puisque $3 \cdot 2^{8083} > 2 \cdot 2^{8083}$, alors on peut simplifier pour obtenir $3 \cdot 2^{8083} > 2^{8084}$.
Donc, on veut déterminer le plus petit entier strictement positif n qui vérifie $2^n > 3 \cdot 2^{8083} > 2^{8084}$.
L'inéquation n'est pas vérifiée lorsque $n \leq 8084$.
Lorsque $n = 8085$, on obtient $2^{8085} = 2^2 \cdot 2^{8083} = 4 \cdot 2^{8083}$, ce qui est supérieur à $3 \cdot 2^{8083}$, ce qu'il fallait démontrer.
Donc, $n = 8085$ est le plus petit entier strictement positif n qui vérifie $S_n \geq 16^{2021}$.

4. (a) Dans la figure ci-contre, $x = 20$, $y = 21$ et $\angle XZY = 90°$. D'après le théorème de Pythagore, $z = \sqrt{20^2 + 21^2} = 29$ (puisque $z > 0$).
Donc, la valeur de A est égale à



$$A = \frac{1}{2}(y)(x) = \frac{1}{2}(21)(20) = 210$$

tandis que la valeur de P est égale à

$$P = z + x + y = 29 + 20 + 21 = 70$$

(b) Lorsque $A = 336$, on a $\frac{1}{2}xy = 336$, d'où $xy = 672$.
D'après le théorème de Pythagore, $x^2 + y^2 = 50^2$. À l'aide de manipulations algébriques, on obtient les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{array}{rcl} x^2 + y^2 & = & 2500 \\ (x+y)^2 - 2xy & = & 2500 \\ (x+y)^2 & = & 2500 + 2xy \\ (x+y)^2 & = & 2500 + 2(672) \\ (x+y)^2 & = & 3844 \end{array}$$

Puisque $x + y > 0$, alors $x + y = \sqrt{3844} = 62$.
On a donc $P = x + y + z = 62 + 50 = 112$.
(Le triangle remplissant ces conditions a des côtés de longueurs 14 cm, 48 cm et 50 cm.)

(c) Puisque $A = 3P$, alors $\frac{1}{2}xy = 3(x + y + z)$, d'où $xy = 6(x + y + z)$.
À l'aide de manipulations algébriques, on transforme l'équation $xy = 6(x + y + z)$ pour obtenir les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{array}{rcl} xy & = & 6(x+y+z) \\ xy - 6x - 6y & = & 6z \\ (xy - 6x - 6y)^2 & = & (6z)^2 \\ (xy)^2 - 12x(xy) - 12y(xy) + 72xy + 36x^2 + 36y^2 & = & 36z^2 \\ (xy)^2 - 12x(xy) - 12y(xy) + 72xy + 36x^2 + 36y^2 & = & 36(x^2 + y^2) \quad (\text{car } x^2 + y^2 = z^2) \\ xy(xy - 12x - 12y + 72) & = & 0 \\ xy - 12x - 12y + 72 & = & 0 \quad (\text{car } xy \neq 0) \\ x(y-12) - 12y & = & -72 \\ x(y-12) - 12y + 144 & = & -72 + 144 \\ x(y-12) - 12(y-12) & = & 72 \\ (x-12)(y-12) & = & 72 \end{array}$$

Puisque x et y sont des entiers strictement positifs, alors $x - 12$ et $y - 12$ est un couple de facteurs de 72.
Le produit $(x-12)(y-12)$ est positif (car $72 > 0$), d'où on a donc $x - 12 < 0$ et $y - 12 < 0$ ou $x - 12 > 0$ et $y - 12 > 0$.
Si $x - 12 < 0$ et $y - 12 < 0$, alors $x < 12$ et $y < 12$.
Il y a exactement deux triplets de Pythagore (x, y, z) où $x < 12$ et $y < 12$.
Dans le premier cas, $(x, y, z) = (3, 4, 5)$, d'où $A = \frac{1}{2}(3)(4) = 6$ et $P = 3+4+5 = 12$. Donc, $A \neq 3P$.
Dans le second cas, $(x, y, z) = (6, 8, 10)$, d'où $A = \frac{1}{2}(6)(8) = 24$ et $P = 6 + 8 + 10 = 24$. Donc, $A \neq 3P$.
Donc, $x - 12 > 0$ et $y - 12 > 0$, d'où x et y sont chacun supérieurs à 12.
Dans le tableau ci-dessous, on détermine toutes les valeurs entières possibles de x, y et z à l'aide des couples de facteurs positifs de 72.
De plus, on suppose que $x \leq y$, tout en constatant que les valeurs de x et y peuvent être interchangées l'une avec l'autre grâce à la symétrie de l'équation et, ce faisant, on obtiendrait la même valeur de z et le même triangle.

Couple de facteurs	$x-12$	$y-12$	x	y	$z=\sqrt{x^2+y^2}$	(x,y,z)
1 et 72	1	72	13	84	85	(13,84,85) ou (84,13,85)
2 et 36	2	36	14	48	50	(14,48,50) ou (48,14,50)
3 et 24	3	24	15	36	39	(15,36,39) ou (36,15,39)
4 et 18	4	18	16	30	34	(16,30,34) ou (30,16,34)
6 et 12	6	12	18	24	30	(18,24,30) ou (24,18,30)
8 et 9	8	9	20	21	29	(20,21,29) ou (21,20,29)

Remarquons qu'au lieu de factoriser l'équation $xy - 12x - 12y + 72 = 0$, on aurait pu choisir de la récrire sous la forme :

$$\begin{aligned} x(y-12) &= 12y - 72 \\ x &= \frac{12y-72}{y-12} \\ x &= \frac{12(y-12)+144-72}{y-12} \\ x &= 12 + \frac{72}{y-12} \end{aligned}$$

et puisque x est un entier strictement positif, alors on aurait pu supposer que $y - 12$ est un diviseur de 72.

(d) Puisque $A = kP$, alors $\frac{1}{2}xy = k(x+y+z)$, d'où $xy = 2k(x+y+z)$.
À l'aide de manipulations algébriques, on transforme l'équation $xy = 2k(x+y+z)$ pour obtenir les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} xy &= 2k(x+y+z) \\ xy - 2kx - 2ky &= 2kz \\ (xy-2kx-2ky)^2 &= (2kz)^2 \\ (xy)^2 - 4kx(xy) - 4ky(xy) + 8k^2xy + 4k^2x^2 + 4k^2y^2 &= 4k^2z^2 \\ (xy)^2 - 4kx(xy) - 4ky(xy) + 8k^2xy + 4k^2x^2 + 4k^2y^2 &= 4k^2(x^2+y^2) \quad (\because x^2+y^2=z^2) \\ xy(xy - 4kx - 4ky + 8k^2) &= 0 \\ xy - 4kx - 4ky + 8k^2 &= 0 \quad (\text{car } xy \neq 0) \\ x(y-4k) - 4ky &= -8k^2 \\ x(y-4k) - 4ky + 16k^2 &= -8k^2 + 16k^2 \\ x(y-4k) - 4k(y-4k) &= 8k^2 \\ (x-4k)(y-4k) &= 8k^2 \end{aligned}$$

Puisque x, y et k sont des entiers strictement positifs, alors $x-4k$ et $y-4k$ sont un couple de facteurs de $8k^2$.
Supposons d'abord que $k = 2$.
Lorsqu'on reporte cette valeur dans l'équation $(x-4k)(y-4k) = 8k^2$, on obtient $(x-8)(y-8) = 32$.
Le produit $(x-8)(y-8)$ est positif (car $32 > 0$), d'où on a donc $x - 8 < 0$ et $y - 8 < 0$ ou $x - 8 > 0$ et $y - 8 > 0$.
Si $x - 8 < 0$ et $y - 8 < 0$, alors $x < 8$ et $y < 8$, ce qui n'est pas possible puisque $P = 510$.
Donc, $x - 8 > 0$ et $y - 8 > 0$.
Si $(x-8)(y-8) = 32$ et $x \leq y$, alors $x - 8$ est égal à 1, 2 ou 4 (d'où on aurait donc

respectivement $x = 9, 10, 12$) tandis que $y - 8$ est égal à $32, 16$, ou 8 (d'où on aurait donc respectivement $y = 40, 24, 16$).
D'après le théorème de Pythagore, on obtient donc respectivement $z = 41, 26, 20$.
Pour chacune des trois possibilités, $P = x + y + z \neq 510$. On conclut donc que $k \neq 2$.
On peut montrer d'une manière semblable que k ne peut égaler 3. Donc, $k \geq 5$ (puisque k est un nombre premier).
Puisque k est un nombre premier et que $k \geq 5$, les couples de facteurs positifs de $8k^2$ sont :

$$(1, 8k^2), (2, 4k^2), (4, 2k^2), (8, k^2), (k, 8k), (2k, 4k)$$

tandis que les couples de facteurs négatifs de $8k^2$ sont

$$(-1, -8k^2), (-2, -4k^2), (-4, -2k^2), (-8, -k^2), (-k, -8k), (-2k, -4k)$$

Par exemple, si $x - 4k = -1$ et $y - 4k = -8k^2$, alors $y = 4k - 8k^2$, ce qui est inférieur à zéro pour tout k ($k \geq 5$).
Cela n'est pas possible car $y > 0$.
Si l'on suppose que $x \leq y$, alors on peut montrer d'une manière semblable que $y \leq 0$ pour toutes valeurs de k ($k \geq 5$) lorsque $x - 4k$ et $y - 4k$ sont égaux à un couple de facteurs négatifs de $8k^2$.
Donc, $x - 4k$ et $y - 4k$ doivent être égaux à un couple de facteurs positifs de $8k^2$.

En partant du fait que le triangle a un périmètre de 510 cm, on obtient les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}
x + y + z &= 510 \\
x + y &= 510 - z \\
x^2 + 2xy + y^2 &= 510^2 - 1020z + z^2 \quad \text{(on a elevé chaque membre au carré)} \\
2xy &= 510^2 - 1020z \quad (\text{car } x^2 + y^2 = z^2) \\
4A &= 510^2 - 1020z \quad (A = \tfrac{1}{2}xy, \text{ d'où } 4A = 2xy) \\
4(510k) &= 510^2 - 1020z \quad (\text{car } A = kP \text{ et } P = 510) \\
2k &= 255 - z \\
2k &= 255 - (510 - x - y) \\
x + y - 2k &= 255
\end{aligned}$$

On obtient $x - 4k = 1$ et $y - 4k = 8k^2$ à partir du premier couple de facteurs. On a donc $(x, y) = (1 + 4k, 8k^2 + 4k)$ (en supposant que $x \leq y$).
On reporte $x = 1 + 4k$ et $y = 8k^2 + 4k$ dans l'équation $x + y - 2k = 255$ et on simplifie pour obtenir $8k^2 + 6k = 254$ ou $k(4k + 3) = 127$, ce qui n'admet aucune solution car 127 est un nombre premier.

On analyse les 5 couples de facteurs restants dans le tableau ci-dessous.
Comme précédemment, on suppose que $x \leq y$, tout en constatant que les valeurs de x et y peuvent être interchangées l'une avec l'autre et, ce faisant, on obtiendrait la ou les mêmes valeurs de k.

Couple de facteurs	x	y	$x+y-2k=255$ simplifié	Valeur(s) de k
$2, 4k^2$	$2+4k$	$4k^2+4k$	$4k^2+6k=253$	Aucune valeur de k (le membre de gauche est pair tandis que le membre de droite est impair)
$4, 2k^2$	$4+4k$	$2k^2+4k$	$2k^2+6k=251$	Aucune valeur de k (le membre de gauche est pair tandis que le membre de droite est impair)
$8, k^2$	$8+4k$	k^2+4k	$k(k+6)=247$	$k=13$
$k, 8k$	$5k$	$12k$	$15k=255$	$k=17$
$2k, 4k$	$6k$	$8k$	$12k=255$	Aucune valeur de k (le membre de gauche est pair tandis que le membre de droite est impair)

Donc, les valeurs de k qui remplissent les conditions sont $k=13$ et $k=17$.