Le CENTRE d'ÉDUCATION

en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Gauss 2021

(7e et 8e années – Secondaire I et II)

le mercredi 12 mai 2021

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 13 mai 2021

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

Personnel du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

Ed Anderson
Jeff Anderson
Terry Bae
Jacquelene Bailey
Shane Bauman
Jenn Brewster
Ersal Cahit
Diana Castañeda Santos
Sarah Chan
Ashely Congi
Serge D'Alessio
Fiona Dunbar
Mike Eden
Sandy Emms
Barry Ferguson
Steve Furino
Lucie Galinon
Robert Garbary
Rob Gleeson
Sandy Graham
Conrad Hewitt
Angie Hildebrand
Carrie Knoll
Wesley Korir
Judith Koeller
Laura Kreuzer
Bev Marshman
Paul McGrath
Jen Nelson
Ian Payne
J.P. Pretti
Alexandra Rideout
Nick Rollick
Kim Schnarr
Ashley Sorensen
Ian VanderBurgh
Troy Vasiga
Christine Vender
Heather Vo
Bonnie Yi

Comité du concours Gauss

Ashley Sorensen (présidente), University of Waterloo, Waterloo, ON
Kevin Grady (président adjoint), Cobden District P.S., Cobden, ON
Sarah Garrett, Mitchell Woods P.S., Guelph, ON
Kora Lee Gallant, Madeline Symonds M.S., Hammonds Plains, NS
JoAnne Halpern, Thornhill, ON
Clay Kellough, Fort Richmond C.I., Winnipeg, MB
David Matthews, Waterloo, ON
John McLoughlin, University of New Brunswick, Fredericton, NB
Nick Rollick, University of Waterloo, Waterloo, ON
David Switzer, Scott Central P.S., Sandford, ON
Rachael Verbruggen, University of Waterloo, Waterloo, ON
Robert Wong, Edmonton, AB
Chris Wu, Ledbury Park E. and M.S., Toronto, ON
Lori Yee, William Dunbar P.S., Pickering, ON

7e année

1. Lorsqu'on place les cinq nombres en ordre du plus grand au plus petit, on obtient : 10 000, 1000, 100, 10, 1.
Le nombre du milieu est 100.

Réponse : (D)

2. Chaque côté du carré a une longueur de 5 cm.
Le carré a donc un périmètre de 4×5 cm $= 20$ cm.

Réponse : (A)

3. Le membre de droite de l'égalité est $10 + 20 = 30$.
L'égalité est donc vraie lorsque le membre de gauche est égal à 30.
Puisque $5 + 25 = 30$, alors on doit placer 25 dans la case afin que l'égalité soit vraie.

Réponse : (E)

4. D'après le diagramme, Dan a passé six heures à faire ses devoirs, Joe a passé trois heures à faire ses devoirs, Bob a passé cinq heures à faire ses devoirs, Susie a passé quatre heures à faire ses devoirs et Grace a passé une heure à faire ses devoirs.
Lorsqu'on additionne leurs temps individuels ensemble, Bob et Grace ont passé le même montant de temps que Dan à faire leurs devoirs.

Réponse : (C)

5. Chacune des cinq fractions est positive. Donc, la plus petite de ces fractions est la fraction la plus près de 0.
Puisque chacune des fractions a 1 comme numérateur, alors la plus petite de ces fractions est celle ayant le plus grand dénominateur.
Parmi les choix de réponse, la fraction la plus près de 0 est donc $\frac{1}{9}$.

Réponse : (E)

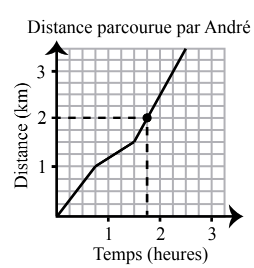
6. Si le sac contenait un total de 6 bonbons et que 5 de ces bonbons étaient rouges, alors la probabilité que Judith choisisse un bonbon rouge du sac serait de $\frac{5}{6}$.
Donc, il pourrait y avoir un nombre total de 6 bonbons dans le sac.
Pouvez-vous expliquer pourquoi chacune des quatre autres réponses n'est pas possible ?

Réponse : (D)

7. Tout point situé à droite de l'axe des ordonnées a une abscisse positive.
Tout point situé sous l'axe des abscisses a une ordonnée négative.
Puisque $P(x, y)$ est situé à droite de l'axe des ordonnées et sous l'axe des abscisses, alors la valeur de x est positive et la valeur de y est négative.

Réponse : (B)

8. On trouve d'abord la distance de 2 km sur l'axe vertical.
Ensuite, on trouve le point sur le graphique linéaire qui correspond à une distance parcourue de 2 km.
Le temps en heures correspondant à ce point est trois quarts d'heure de plus qu'une heure.
Puisqu'un quart d'heure est égal à quinze minutes, alors trois quarts d'heure correspondent à quarante-cinq minutes. Donc, André parcourt les 2 premiers kilomètres en une heure trois quarts (soit 1 heure et 45 minutes).

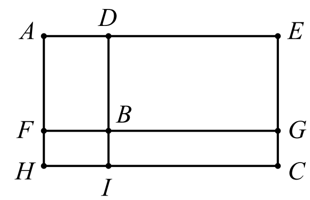


Réponse : (C)

9. Les cinq nombres $5, 6, 7, 8, 9$ se répètent de manière à produire la régularité que l'on voit dans l'énoncé du problème.
Donc, le 5ᵉ nombre de la régularité est 9, le 10ᵉ nombre de la régularité est 9, le 15ᵉ nombre de la régularité est 9 et ainsi de suite.
Puisque 220 est un multiple de 5, le 220ᵉ nombre de la régularité est également 9, d'où on comprend donc que le 221ᵉ nombre de la régularité est 5.

Réponse : (A)

10. Dans la figure ci-contre, on nomme les points d'intersection des segments de droites.



À partir de A, la fourmi peut se déplacer vers la droite (se rendant ainsi à D) ou vers le bas (se rendant ainsi à F).

Supposons que la fourmi se déplace d'abord vers la droite (arrivant ainsi à D).
À partir de D, si la fourmi continue de se déplacer vers la droite pour se rendre à E, le chemin ne peut passer par B (puisque la fourmi peut uniquement se déplacer vers la droite ou vers le bas).
Donc, à partir de D, la fourmi doit se déplacer vers le bas de manière à arriver à B.

À partir de B, il y a deux chemins qui se terminent à C ; l'un des chemins passe par G avant de se rendre à C tandis que l'autre chemin passe par I avant de se rendre à C.
Donc, si la fourmi se déplace d'abord vers la droite, il y a deux chemins qui peuvent la mener à C, soit les chemins $A - D - B - G - C$ et $A - D - B - I - C$.

Supposons que la fourmi se déplace d'abord vers le bas (arrivant ainsi à F).
À partir de F, si la fourmi continue de se déplacer vers le bas pour se rendre à H, le chemin ne peut passer par B (puisque la fourmi peut uniquement se déplacer vers la droite ou vers le bas).
Donc, à partir de F, la fourmi doit se déplacer vers la droite de manière à arriver à B.
À partir de B, il y a deux chemins (que l'on a identifié précédemment) qui se terminent à C.
Donc, si la fourmi se déplace d'abord vers le bas, il y a deux chemins qui peuvent la mener à C, soit les chemins $A - F - B - G - C$ et $A - F - B - I - C$.

Donc, 4 chemins différents mènent de A à C en passant par B.

Réponse : (C)

11. *Solution 1*
On écrit la liste de nombres :

$$4, 11, 18, 25, 32, 39, 46, 53, \ldots$$

Parmi les choix de réponse, 46 est le nombre qui parait dans la liste de Laila.

Solution 2
Laila commence sa liste à 4 et chaque nombre après le premier est 7 de plus que le nombre précédent.
Donc, chacun des nombres de sa liste sera 4 de plus qu'un multiple de 7.
Puisque 42 est un multiple de 7 ($6 \times 7 = 42$), alors $42 + 4 = 46$ paraitra dans la liste de Laila.

Réponse : (B)

12. Si l'on plie une lettre invariante par symétrie verticale le long de son axe de symétrie, les deux moitiés de la lettre sont parfaitement appariées.
Parmi les lettres données, trois lettres (soit H, O et X) sont invariantes par symétrie verticale :

H L O R X D P E

RÉPONSE : (C)

13. Puisque le triangle BCE est équilatéral, alors chacun de ses angles intérieurs a une mesure de $60°$.
Puisque deux angles opposés par le sommet sont congrus, alors $\angle DEA = \angle BEC = 60°$.
Les trois angles intérieurs du triangle ADE ont des mesures dont la somme est de $180°$.
Donc, $x° + 90° + 60° = 180°$ ou $x + 150 = 180$, d'où $x = 30$.

RÉPONSE : (E)

14. Étant donné trois entiers consécutifs, le plus petit entier est un de moins que l'entier du milieu et le plus grand entier est un de plus que l'entier du milieu.
Par exemple, 10, 11 et 12 sont trois entiers consécutifs où 10 est un de moins que l'entier du milieu 11 tandis que 12 est un de plus que ce dernier.
Donc, le plus petit entier et le plus grand entier ont une somme égale à deux fois l'entier du milieu. (Dans l'exemple, $10 + 12 = 2 \times 11$.)
Donc, la somme de trois entiers consécutifs est égale à 3 fois l'entier du milieu. Donc, la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.
Parmi les choix de réponse, 21 est le seul multiple de 3.
Par ailleurs, on aurait pu résoudre ce problème en procédant par tâtonnements ; ce qui nous aurait mené à $6 + 7 + 8 = 21$.

RÉPONSE : (D)

15. Parmi les entiers supérieurs à 13931 et inférieurs à 14000, aucun n'est un palindrome. (Avant de continuer, essayez de voir pourquoi cela est vrai.)
Soit N le prochain palindrome supérieur à 13931.
Partons du principe que N est entre 14000 et 15000 (comme on le démontrera, cette supposition s'avérera vraie).
Un palindrome de cinq chiffres est un nombre de la forme $abcba$. Autrement dit, le chiffre des dizaines de mille, a, doit être égal au chiffre des unités tandis que le chiffre des milliers, b, doit être égal au chiffre des dizaines.
Puisque N est au moins 14000, alors 1 est la plus petite valeur possible de a (le chiffre des dizaines de mille).
Puisque 1 est la plus petite valeur possible de a et que N est au moins 14000, alors 4 est la plus petite valeur possible de b (le chiffre des milliers). Donc, on peut exprimer N de la forme $14c41$.
Si le chiffre des centaines, c, est aussi petit que possible, alors l'entier N est 14041. Les chiffres de cet entier ont une somme de $1 + 4 + 0 + 4 + 1 = 10$.

RÉPONSE : (D)

16. Les diviseurs positifs de 14 sont $1, 2, 7$ et 14.
Les diviseurs positifs de 21 sont $1, 3, 7$ et 21.
Les diviseurs positifs de 28 sont 1,2,4,7,14 et 28.
Les diviseurs positifs de 35 sont 1,5,7 et 35.
Les diviseurs positifs de 42 sont $1, 2, 3, 6, 7, 14, 21$ et 42.
Parmi les nombres de la liste, trois ont exactement 4 diviseurs positifs (soit 14, 21 et 35).

RÉPONSE : (C)

17. Le rabais total qui a été appliqué à la chemise, sous forme de pourcentage, ne dépend aucunement du prix régulier de la chemise.
Autrement dit, on peut choisir n'importe quelle valeur comme prix régulier de la chemise pour ensuite calculer le rabais total (sous forme de pourcentage) qui a été appliqué à la chemise après les deux soldes.
Puisque les rabais sont exprimés sous forme de pourcentages, on peut simplifier les calculs en supposant que le prix régulier de la chemise était de 100 \$.
Si le prix régulier de la chemise est de 100 \$ et que ce prix est réduit de 50 %, alors le deuxième prix est égal à la moitié de 100 \$, soit 50 \$.
Une réduction de 40% du deuxième prix (50 \$) est un rabais de $\frac{40}{100} \times 50 \ \$ = 0{,}40 \times 50 \ \$ = 20 \ \$$.
Après les deux soldes, la chemise ayant un prix régulier de 100 \$ coûte désormais $50 \ \$ - 20 \ \$ = 30 \ \$$, le rabais total est donc de $100 \ \$ - 30 \ \$ = 70 \ \$$.
Or, il faut exprimer ce rabais total sous la forme d'un pourcentage, donc : $\frac{70 \ \$}{100 \ \$} \times 100 \ \% = 70 \ \%$.
Réponse : (C)

18. Le périmètre du triangle ABC est égal à $AB + BC + CA$ ou $AB + BM + MC + CA$.
Puisque $AB = CA$ et $BM = MC$, alors $AB + BM$ est égal à la moitié du périmètre du triangle ABC.
Le triangle ABC a un périmètre de 64. On a donc $AB + BM = \frac{1}{2} \times 64 = 32$.
Le triangle ABM a un périmètre de 40. On a donc $AM + AB + BM = 40$.
Puisque $AB + BM = 32$, alors $AM = 40 - 32 = 8$.
Réponse : (B)

19. On nomme A et B les chiffres manquants dans les cases. On choisit les chiffres A et B de 1 à 9 de manière que $A \neq B$.

$$\begin{array}{r} 5\,\boxed{A} \\ -\ \boxed{B}\,5 \\ \hline \end{array}$$

Le nombre de deux chiffres du haut, soit $5A$, est au plus 59.
Donc, B ne peut égaler 6, 7, 8 ou 9 sinon le résultat de la soustraction serait un entier négatif.
Si $B = 5$, alors le nombre inférieur est 55. Donc, afin que le résultat de la soustraction soit positif, A pourrait égaler 6, 7, 8 ou 9 (les résultats étant respectivement 1, 2, 3 et 4).
Donc, il y a 4 résultats positifs possibles dans ce cas.
Si $B = 4$, alors le nombre inférieur est 45. Donc, afin que le résultat de la soustraction soit positif, A pourrait égaler chacun des entiers de 1 à 9, à l'exception de 4 (puisque $A \neq B$).
Dans ce cas, les résultats de la soustraction sont respectivement 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13 et 14.
Donc, il y a 8 résultats positifs possibles lorsque $B = 4$.
Si $B = 3$, alors le nombre inférieur est 35. Donc, afin que le résultat de la soustraction soit positif, A pourrait égaler 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9 (les résultats étant respectivement 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23 et 24).
Donc, il y a 8 résultats positifs possibles lorsque $B = 3$.
De même, il y a 8 résultats positifs possibles lorsque $B = 2$ et 8 résultats positifs possibles lorsque $B = 1$ (chacun des résultats étant distinct des autres).
En tout, il y a $4 + (8 \times 4) = 36$ résultats positifs possibles.
Réponse : (A)

20. Le tableau ci-dessous représente les sommes possibles lorsqu'on jette deux dés réguliers. Chaque somme en gras est un nombre premier.

Nombre sur la face supérieure du premier dé

Nombre sur la face supérieure du second dé

	1	2	3	4	5	6
1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**
2	**3**	4	**5**	6	**7**	8
3	4	**5**	6	**7**	8	9
4	**5**	6	**7**	8	9	10
5	6	**7**	8	9	10	**11**
6	**7**	8	9	10	**11**	12

D'après le tableau ci-dessus, le nombre total de résultats possibles est égal à $6 \times 6 = 36$.
Parmi ces résultats possibles, 15 ont un nombre premier comme somme.
Donc, la probabilité que la somme des nombres sur les faces supérieures soit un nombre premier est égale à $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

Réponse : (A)

21. On considère d'abord les cas où l'on soustrait 1 de nombres commençant par 1 et ayant un petit nombre de zéros :

$$\begin{array}{r}10\\-1\\\hline 9\end{array}\qquad\begin{array}{r}100\\-1\\\hline 99\end{array}\qquad\begin{array}{r}1000\\-1\\\hline 999\end{array}\qquad\begin{array}{r}10\,000\\-1\\\hline 9999\end{array}\qquad\begin{array}{r}100\,000\\-1\\\hline 99\,999\end{array}$$

Dans les exemples ci-dessus, chaque résultat ne comprend que des 9 et le nombre de 9 est égal au nombre de zéros dans le nombre initial. Pouvez-vous expliquer pourquoi cette régularité est maintenue au fur et à mesure que l'on augmente le nombre de zéros ?
Puisque chacun des chiffres du résultat est un 9 et que ces chiffres ont une somme de 252, alors le nombre de 9 dans le résultat est égal à $\frac{252}{9} = 28$.
Le nombre de zéros dans le nombre initial est égal au nombre de 9 dans le résultat, soit 28.

Réponse : (B)

22. Le périmètre de la Figure 1 est composé de 4 côtés horizontaux de rectangles (chacun de ces côtés ayant une longueur de 10 cm) et de 4 côtés verticaux de rectangles (chacun de ces côtés ayant une longueur de 5 cm).
Donc, la Figure 1 a un périmètre de $(4 \times 10 \text{ cm}) + (4 \times 5 \text{ cm}) = 40 \text{ cm} + 20 \text{ cm} = 60 \text{ cm}$.
Le périmètre de la Figure 2 est composé de 4 côtés horizontaux de rectangles (chacun de ces côtés ayant une longueur de 10 cm) et de 6 côtés verticaux de rectangles (chacun de ces côtés ayant une longueur de 5 cm).
Donc, la Figure 2 a un périmètre de $(4 \times 10 \text{ cm}) + (6 \times 5 \text{ cm}) = 40 \text{ cm} + 30 \text{ cm} = 70 \text{ cm}$.
Le périmètre de la Figure 3 est composé de 4 côtés horizontaux de rectangles (chacun de ces côtés ayant une longueur de 10 cm) et de 8 côtés verticaux de rectangles (chacun de ces côtés ayant une longueur de 5 cm).

Donc, la Figure 3 a un périmètre de $(4 \times 10 \text{ cm}) + (8 \times 5 \text{ cm}) = 40 \text{ cm} + 40 \text{ cm} = 80 \text{ cm}$.
Chaque figure après la Figure 1 est formée en rajoutant deux rectangles au bas de la figure précédente.
Le bord inférieur d'une figure (étant composé de deux côtés de longueur 10 cm) est remplacé par deux côtés de longueur 10 cm lorsqu'on rajoute deux rectangles.
Autrement dit, l'ajout de deux rectangles ne change pas le nombre de côtés de longueur 10 cm qui sont compris dans le périmètre de la nouvelle figure. Donc, chaque figure, peu importe son numéro, aura toujours quatre côtés de longueur 10 cm.
L'ajout de deux nouveaux rectangles ne remplace aucun des côtés verticaux de longueur 5 cm.
Donc, l'ajout des deux rectangles ajoute deux côtés verticaux de 5 cm au périmètre précédent, augmentant le périmètre de la figure précédente de $2 \times 5 \text{ cm} = 10 \text{ cm}$.
Autrement dit, le périmètre de la figure 1 est de 60 cm et le périmètre de chaque nouvelle figure est 10 cm de plus que celui de la figure précédente.
Il faut donc ajouter 10 cm soixante-cinq fois pour obtenir un total de 710 cm (soit $60 \text{ cm} + 10 \text{ cm} \times 65 = 710 \text{ cm}$).
Donc, la Figure 66 a un périmètre de 710 cm. Donc, $n = 66$.

RÉPONSE : (C)

23. Afin d'encoder une lettre, James multiplie d'abord son numéro correspondant par 3 et soustrait 5 par la suite. James poursuit ce processus un total de n fois.
Pour décoder un nombre, on doit effectuer les opérations inverses dans l'ordre inverse.
L'opération inverse de la multiplication est la division. L'opération inverse de la soustraction est l'addition.
Donc, pour décoder un nombre, on ajoute 5 puis on divise par 3 et on poursuit ce processus un total de n fois.
Par exemple, lorsque $n = 1$, le nombre 4 (correspondant à la lettre D) est encodé par $4 \times 3 - 5 = 7$. Le nombre 7 est décodé en additionnant 5 et en divisant par 3, $(7 + 5) \div 3 = 4$, ce qui correspond bel et bien à la lettre D, comme il le fallait.
Chaque lettre du message initial de James correspond à un nombre de 1 à 26.
Pour déterminer la valeur de n, on commence d'abord par les quatre nombres encodés donnés $(367, 205, 853, 1339)$ et on poursuit le processus de décodage jusqu'à ce que chacun des nombres résultants soit égal à un nombre de 1 à 26 (puisque chaque lettre du message initial correspond à un nombre de 1 à 26).
Ce processus de décodage est démontré dans le tableau ci-dessous.

	367	205	853	1339
$n = 1$	$(367 + 5) \div 3 = 124$	$(205 + 5) \div 3 = 70$	$(853 + 5) \div 3 = 286$	$(1339 + 5) \div 3 = 448$
$n = 2$	$(124 + 5) \div 3 = 43$	$(70 + 5) \div 3 = 25$	$(286 + 5) \div 3 = 97$	$(448 + 5) \div 3 = 151$
$n = 3$	16	10	34	52
$n = 4$	7	5	13	19
$n = 5$	4	$\frac{10}{3}$	6	8

D'après le tableau, $n = 4$ est la première valeur de n pour laquelle chacun des quatre nombres est égal à un nombre de 1 à 26.
De plus, on remarque que si $n = 5$, le nombre initial correspondant à 205 est $\frac{10}{3}$, ce qui est impossible.
Donc, James a utilisé une valeur de $n = 4$.
(Bien que la question ne l'ait pas demandé, les nombres $7, 5, 13, 19$ correspondent aux lettres G, E, M, S.)

RÉPONSE : (C)

24. On considère d'abord les facteurs premiers (soit la *factorisation première*) de chacun des deux nombres 4 et 4620.

$$4 = 2 \times 2$$

$$4620 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$$

Soit (a, b) un couple d'entiers strictement positifs ayant un plus grand facteur commun (ou un plus grand commun diviseur) de 4 et un plus petit commun multiple de 4620.
Puisque le couple (a, b) a un plus grand facteur commun de 4, alors a et b sont chacun des multiples de 4. Donc, 2×2 est compris dans chacune des factorisations premières de a et b.
De plus, a et b ne peuvent avoir d'autres facteurs premiers en commun sinon ils auraient un plus grand facteur commun supérieur à 4.
Le plus petit commun multiple de a et b est 4620. Donc, a et b sont chacun inférieurs ou égaux à 4620.
De plus, si a a par exemple des facteurs premiers qui ne sont pas des facteurs premiers de 4620, alors 4620 n'est pas un multiple de a.
Autrement dit, les facteurs premiers de a et b peuvent uniquement être choisis parmi les nombres suivants : $2, 2, 3, 5, 7$ et 11.
En résumé, a est un entier strictement positif de la forme $2 \times 2 \times m$ et b est un entier strictement positif de la forme $2 \times 2 \times n$, m et n remplissant les conditions suivantes :

- m et n sont des entiers strictement positifs
- les facteurs premiers de m ne sont choisis que parmi $3, 5, 7$ et 11
- les facteurs premiers de n ne sont choisis que parmi $3, 5, 7$ et 11
- m et n n'ont pas de facteurs premiers en commun

Dans le tableau ci-dessous, on dresse la liste des valeurs possibles de m et n d'où l'on peut obtenir les couples possibles a et b.
Pour s'assurer de ne pas compter des couples (a, b) deux fois, on suppose que $a \leq b$ et donc que $m \leq n$.

m	n	a	b	(a,b)
1	$3 \times 5 \times 7 \times 11$	$2 \times 2 \times 1$	$2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$	(4,4620)
3	$5 \times 7 \times 11$	$2 \times 2 \times 3$	$2 \times 2 \times 5 \times 7 \times 11$	(12,1540)
5	$3 \times 7 \times 11$	$2 \times 2 \times 5$	$2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 11$	(20,924)
7	$3 \times 5 \times 11$	$2 \times 2 \times 7$	$2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 11$	(28,660)
11	$3 \times 5 \times 7$	$2 \times 2 \times 11$	$2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$	(44,420)
3×5	7×11	$2 \times 2 \times 3 \times 5$	$2 \times 2 \times 7 \times 11$	(60,308)
3×7	5×11	$2 \times 2 \times 3 \times 7$	$2 \times 2 \times 5 \times 11$	(84,220)
3×11	5×7	$2 \times 2 \times 3 \times 11$	$2 \times 2 \times 5 \times 7$	(132,140)

Il y a 8 couples différents de nombres entiers strictement positifs ayant un plus grand facteur commun de 4 et un plus petit commun multiple de 4620.

Réponse : (D)

25. Puisque $12 \times 12 \times 12 = 1728$, Jonas utilise chacune de ses 1728 copies d'un cube de dimensions $1 \times 1 \times 1$ pour construire un grand cube.
Le développement du cube de dimensions $1 \times 1 \times 1$ ne contient que les nombres 100 et c. Donc, chacun des nombres paraissant sur les faces extérieures du grand cubes est soit 100, soit c.
Jonas construit le grand cube de manière que la somme des nombres sur les faces extérieures du cube soit aussi grande que possible.
Puisque $c < 100$, Jonas construit le grand cube de manière à maximiser le nombre de fois que 100 parait sur les faces extérieures du cube (et de manière que le nombre c parait aussi peu que possible sur les faces extérieures).

Les cubes de dimensions $1 \times 1 \times 1$ dont les nombres paraissent sur les faces extérieures du grand cube peuvent être classés en trois types que l'on appelle : coin, arête et intérieur.
On voit ces trois types de cubes de dimensions $1 \times 1 \times 1$ dans les figures ci-dessous (ces figures représentent une partie du grand cube de dimensions $12 \times 12 \times 12$).

(i) On voit un cube de type *coin* dans la Figure 1. Il n'y a que 8 tels cubes puisque ces cubes sont situés aux « coins » du grand cube.

(ii) On voit un cube de type *arête* dans la Figure 2. Ces cubes sont situés le long des arêtes du grand cube mais non aux coins de ce dernier. Puisqu'un cube a 12 arêtes et que chaque arête du grand cube contient 10 cubes de type *arête*, alors il y a $10 \times 12 = 120$ cubes de ce type.

(iii) On voit un cube de type *intérieur* dans la Figure 3. Ces cubes sont ceux dont un seul nombre parait sur les faces extérieures du grand cube. Puisqu'un cube a 6 faces et que chaque face du grand cube contient 10×10 cubes de type *intérieur*, alors il y a $6 \times 10 \times 10 = 600$ cubes de ce type.

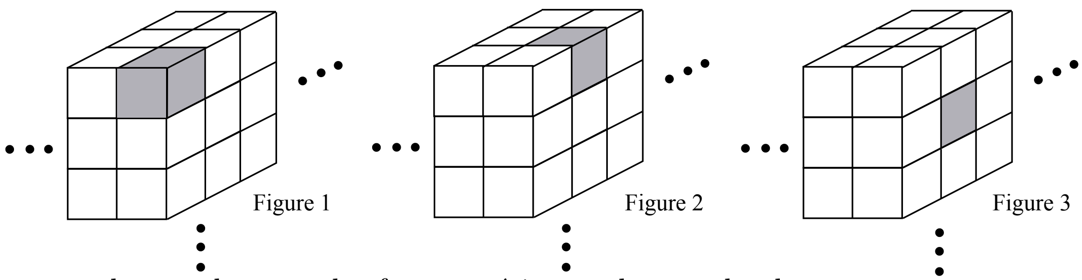


Figure 1 Figure 2 Figure 3

Soit S la somme des nombres sur les faces extérieures du grand cube.
Chaque cube de type coin contribue 3 faces (et donc 3 nombres) à S. Pour que S soit aussi grand que possible, 100 doit paraitre sur l'une de ces trois faces (le développement du cube de dimensions $1 \times 1 \times 1$ ne contient qu'un seul 100). Donc, un c parait sur chacune des deux faces restantes.
Donc, les 8 cubes de type coin contribuent $8 \times 100 + 8 \times 2 \times c$ ou $800 + 16c$ à S.

Chaque cube de type arête contribue 2 faces (et donc 2 nombres) à S.
Pour que S soit aussi grand que possible, 100 doit paraitre sur l'une des deux faces tandis que c paraitra sur l'autre face.
Donc, les 120 cubes de type arête contribuent $120 \times 100 + 120 \times c$ ou $12\,000 + 120c$ à S.

Finalement, chaque cube de type intérieur contribue 1 face (et donc 1 nombre) à S.
Pour que S soit aussi grand que possible, 100 doit paraitre sur cette face.
Donc, les 600 cubes de type intérieur contribuent 600×100 ou $60\,000$ à S.

En tout, on obtient $S = 800 + 16c + 12\,000 + 120c + 60\,000$ ou $S = 136c + 72\,800$.
Puisque la valeur de S doit être supérieure ou égale à $80\,000$ et que $80\,000 - 72\,800 = 7200$, alors $136c$ est supérieur ou égal à 7200.
Puisque $136 \times 52 = 7072$ et que $136 \times 53 = 7208$, alors c est supérieur ou égal à 53.
Puisque la valeur de S doit être inférieure ou égale à $85\,000$ et que $85\,000 - 72\,800 = 12\,200$, alors $136c$ est inférieur ou égal à $12\,200$.
Puisque $136 \times 90 = 12\,240$ et que $136 \times 89 = 12\,104$, alors c est inférieur ou égal à 89.
Donc, c est un entier strictement positif supérieur ou égal à 53 mais inférieur ou égal à 89.
Il existe donc $89 - 52 = 37$ tels entiers. (Parmi les entiers de 1 à 89, on supprime les entiers de 1 à 52.)

RÉPONSE : (C)

8e année

1. Puisque 1000 est 1 de plus que 999, alors $1000 + 1000 = 2000$ est 2 de plus que $999 + 999$.
Donc, $999 + 999 = 2000 - 2 = 1998$.

Réponse : (C)

2. Un triangle équilatéral est un triangle dont les trois côtés sont de même longueur.
Si un triangle équilatéral a un périmètre de 15 m, alors chaque côté du triangle a une longueur de $\dfrac{15\text{ m}}{3} = 5$ m.

Réponse : (B)

3. Puisque $25 \times 4 = 100$, alors 100 est un multiple de 4.
Donc, le plus grand multiple de 4 inférieur à 100 est $24 \times 4 = 96$ (ou $100 - 4 = 96$).

Réponse : (B)

4. Tout point situé à droite de l'axe des ordonnées a une abscisse positive.
Tout point situé sous l'axe des abscisses a une ordonnée négative.
Puisque $P(x, y)$ est situé à droite de l'axe des ordonnées et sous l'axe des abscisses, alors la valeur de x est positive et la valeur de y est négative.

Réponse : (B)

5. On reporte $x = -6$ dans chacune des expressions pour obtenir :

(A) $\begin{aligned} 2 + x &= 2 + (-6) \\ &= -4 \end{aligned}$

(B) $\begin{aligned} 2 - x &= 2 - (-6) \\ &= 2 + 6 \\ &= 8 \end{aligned}$

(C) $\begin{aligned} x - 1 &= -6 - 1 \\ &= -7 \end{aligned}$

(D) $x = -6$

(E) $\begin{aligned} x \div 2 &= (-6) \div 2 \\ &= -3 \end{aligned}$

Parmi les expressions, $2 - x$ a la plus grande valeur lorsque $x = -6$.

Réponse : (B)

6. À ce débit, on peut remplir une bouteille de 500 mL en 6 secondes.
Puisque le volume d'une bouteille de 250 mL est la moitié de celui d'une bouteille de 500 mL, alors il faudra moitié moins de temps pour la remplir. On peut donc remplir une bouteille de 250 mL en 3 secondes.

Réponse : (C)

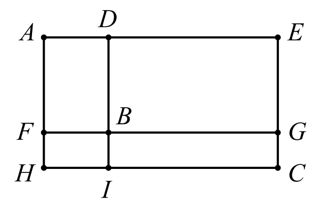
7. Si l'on inverse les chiffres d'un nombre de deux chiffres dont le chiffre des dizaines est pair, alors le nombre résultant sera pair car il aura un nombre pair pour chiffre des unités.
Si un nombre de deux chiffres est pair, alors il est divisible par 2 et ne peut donc pas être un nombre premier.
Puisque 29, 23 et 41 ont chacun un nombre pair pour chiffre des dizaines, on élimine ces trois comme réponses possibles.
Lorsqu'on inverse les chiffres du nombre 53, on obtient 35.
Ce dernier est divisible par 5 et n'est donc pas un nombre premier.
Enfin, lorsqu'on inverse les chiffres du nombre 13, on obtient 31.
Puisque 31 n'a pas de diviseurs positifs autres que 1 et 31, alors 31 est un nombre premier.

Réponse : (D)

8. Lorsqu'on rajoute 3 haricots rouges au sac, le sac contient désormais $5 + 3 = 8$ haricots rouges.
Lorsqu'on rajoute 3 haricots noirs au sac, le sac contient désormais $9 + 3 = 12$ haricots noirs.
Il y a donc $8 + 12 = 20$ haricots en tout dans le sac.
Si l'on choisit un haricot au hasard du sac, la probabilité qu'il soit rouge est égale à $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.

Réponse : (B)

9. Dans la figure ci-contre, on nomme les points d'intersection des segments de droites.
À partir de A, la fourmi peut se déplacer vers la droite (se rendant ainsi à D) ou vers le bas (se rendant ainsi à F).



Supposons que la fourmi se déplace d'abord vers la droite (arrivant ainsi à D).
À partir de D, si la fourmi continue de se déplacer vers la droite pour se rendre à E, le chemin ne peut passer par B (puisque la fourmi peut uniquement se déplacer vers la droite ou vers le bas).

À partir de B, il y a deux chemins qui se terminent à C ; l'un des chemins passe par G avant de se rendre à C tandis que l'autre chemin passe par I avant de se rendre à C.
Donc, si la fourmi se déplace d'abord vers la droite, il y a deux chemins qui peuvent la mener à C, soit les chemins $A - D - B - G - C$ et $A - D - B - I - C$.

Supposons que la fourmi se déplace d'abord vers le bas (arrivant ainsi à F).
À partir de F, si la fourmi continue de se déplacer vers le bas pour se rendre à H, le chemin ne peut passer par B (puisque la fourmi peut uniquement se déplacer vers la droite ou vers le bas).
Donc, à partir de F, la fourmi doit se déplacer vers la droite de manière à arriver à B.
À partir de B, il y a deux chemins dont on a discuté précedemment qui se terminent à C.
Donc, si la fourmi se déplace d'abord vers le bas, il y a deux chemins qui peuvent la mener à C, soit les chemins $A - F - B - G - C$ et $A - F - B - I - C$.

Donc, 4 chemins différents mènent de A à C en passant par B.

Réponse : (C)

10. Afin d'obtenir le plus grand entier de 4 chiffres possibles, on réorganise les chiffres de manière que les plus grands chiffres prennent les plus grandes valeurs possibles.
Le plus grand entier de 4 chiffres que l'on peut obtenir en réorganisant les 4 chiffres de l'entier 2021 est 2210.
Afin d'obtenir le plus petit entier de 4 chiffres possibles, on réorganise les chiffres de manière que les plus petits chiffres prennent les plus grandes valeurs possibles.
Le plus petit entier de 4 chiffres (supérieur à 1000) que l'on peut obtenir en réorganisant les 4 chiffres de l'entier 2021 est 1022.
Donc, la plus grande différence possible entre deux tels nombres de quatre chiffres est $2210 - 1022 = 1188$.

Réponse : (A)

11. *Solution 1*
PQ et RS se coupent en T. Donc, l'angle PTR et l'angle STQ sont opposés par le sommet, d'où on a donc $\angle PTR = \angle STQ = 140^\circ$.
Puisque $\angle PTR = \angle PTU + \angle RTU$, alors

$$\angle RTU = \angle PTR - \angle PTU = 140^\circ - 90^\circ = 50^\circ$$

Donc, l'angle RTU a une mesure de 50°.

Solution 2
RS est un segment de droite, donc $\angle RTQ + \angle STQ = 180^\circ$ ou $\angle RTQ = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$.
PQ est un segment de droite, donc $\angle RTQ + \angle RTU + \angle PTU = 180^\circ$ ou
$\angle RTU = 180^\circ - 40^\circ - 90^\circ = 50^\circ$.

Réponse : (C)

12. Étant donné trois entiers consécutifs, le plus petit entier est un de moins que l'entier du milieu et le plus grand entier est un de plus que l'entier du milieu.
Donc, le plus petit entier et le plus grand entier ont une somme égale à deux fois l'entier du milieu.
Donc, la somme de trois entiers consécutifs est égale à 3 fois l'entier du milieu. Ainsi, la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.
Parmi les choix de réponse, 21 est le seul multiple de 3.
Par ailleurs, on aurait pu résoudre ce problème en procédant par tâtonnements ; ce qui nous aurait mené à $6 + 7 + 8 = 21$.

Réponse : (D)

13. D'après le diagramme à bandes, il y a 8 chemises jaunes, 4 chemises rouges, 2 chemises bleues et 2 chemises vertes. Il y a donc $8 + 4 + 2 + 2 = 16$ chemises en tout.
Donc, les 8 chemises jaunes représentent $\frac{8}{16}$ ou $\frac{1}{2}$ du nombre total de chemises.
Le seul diagramme circulaire montrant qu'environ la moitié des chemises sont jaunes est (E).
Donc, il est probable que ce diagramme circulaire représente le mieux les données du diagramme à bandes.
De plus, on remarque que ce diagramme circulaire montre également qu'environ $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ des chemises sont rouges, environ $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$ des chemises sont vertes et environ $\frac{1}{8}$ des chemises sont bleues ; ce qui correspond aux données du diagramme à bandes.

Réponse : (E)

14. Soit n le nombre entier inconnu.
Puisque 16 est un diviseur de n, alors chaque diviseur positif de 16 est également un diviseur de n.
Autrement dit, 1, 2, 4, 8, 16, et n sont compris dans les diviseurs positifs de n.
Puisque 16 est un diviseur de n, alors n est un multiple positif de 16.
Le plus petit nombre entier qui est un multiple de 16 est 16.
Or, si $n = 16$, alors n a exactement 5 diviseur positifs, soit 1, 2, 4, 8 et 16.
Après 16, le nombre entier suivant qui est un multiple de 16 est 32.
Si $n = 32$, alors n a exactement 6 diviseurs positifs, soit 1, 2, 4, 8, 16 et 32, ce qu'il fallait démontrer.

Réponse : (B)

15. *Solution 1*
Les mesures des trois angles d'un triangle ont une somme de 180°.
Un triangle a des angles intérieurs dont les mesures présentent le rapport $1 : 4 : 7$. Donc, le plus petit de ses angles a une mesure égale à $\frac{1}{1+4+7} = \frac{1}{12}$ de la somme des mesures des trois angles.
Donc, la mesure du plus petit angle du triangle est égale à $\frac{1}{12}$ de 180°, soit $\frac{180^\circ}{12} = 15^\circ$.
La mesure du prochain angle le plus grand est égale à 4 fois la mesure du plus petit angle, soit $4 \times 15^\circ = 60^\circ$.
La mesure du plus grand angle est égale à 7 fois la mesure du plus petit angle, soit $7 \times 15^\circ = 105^\circ$.
Les angles intérieurs du triangle ont donc des mesures de 15°, 60° et 105°.

Solution 2
Les mesures des trois angles d'un triangle ont une somme de 180°.
En travaillant à rebours à partir des choix possibles, on peut éliminer (B) et (C) puisque les mesures des trois angles donnés n'ont pas une somme de 180°.
Dans le triangle, le plus petit angle et le plus grand angle ont des mesures présentant un rapport de $1 : 7$.
Puisque $7 \times 12^\circ = 84^\circ$ et non 120°, on peut éliminer (A).
Puisque $7 \times 14^\circ = 98^\circ$ et non 110°, on peut éliminer (E).
Le seul choix restant est (D). On peut vérifier que 15°, 60° et105° ont une somme de 180° et présentent le rapport $1 : 4 : 7$.
Réponse : (D)

16. Les sept nombres $1, 2, 5, 10, 25, 50, 100$ se répètent de manière à produire la régularité présentée dans l'énoncé du problème.
Donc, le 7e nombre de la régularité est 100, le 14e nombre de la régularité est 100, le 21e nombre de la régularité est 100 et ainsi de suite.
Puisque 14e nombre de la régularité est 100, alors le 15e nombre de la régularité est 1, le 16e nombre de la régularité est 2, le 17e nombre de la régularité est 5 et le 18e nombre de la régularité est 10.
Puisque 70 est un multiple de 7, le 70e nombre de la régularité est également 100. Donc, le 71e nombre de la régularité est 1, le 72e nombre de la régularité est 2, le 73e nombre de la régularité est 5, le 74e nombre de la régularité est 10 et le 75e nombre de la régularité est 25.
Les 18e et 75e nombres de la régularité ont une somme de $10 + 25 = 35$.
Réponse : (E)

17. *Solution 1*
L'équipe de soccer de Gaussville a remporté 40 % de ses 40 premiers matchs.
L'équipe a donc remporté $0{,}40 \times 40 = 16$ matchs.
Après avoir remporté n jeux d'affilée, l'équipe a remporté $16 + n$ matchs et a joué $40 + n$ matchs en tout.
À ce moment-là, l'équipe avait remporté 50 % ou $\frac{1}{2}$ de tous ses matchs.
Cela veut dire que le nombre de matchs que l'équipe a remporté, soit $16 + n$, est égal à $\frac{1}{2}$ du nombre total de matchs, soit $40 + n$.
Laquelle des valeurs de n remplit la condition que $16 + n$ soit égal à $\frac{1}{2}$ de $40 + n$?
En reportant chacune des valeurs possibles de n, on obtient que $16 + 8 = 24$ est égal à $\frac{1}{2}$ de $40 + 8 = 48$. Donc, n a une valeur de 8.

Solution 2
L'équipe de soccer de Gaussville a remporté 40 % de ses 40 premiers matchs.
Donc, l'équipe a remporté $0{,}40 \times 40 = 16$ matchs et n'a pas remporté $40 - 16 = 24$ matchs (en subissant une défaite ou en faisant match nul).

Ensuite, l'équipe a remporté n jeux d'affilée. Cela signifie que l'équipe n'a pas subi de défaites et n'a pas fait de matchs nuls.
Donc, les 24 matchs que l'équipe n'a pas remporté représentent 50% du nombre total de matchs.
Donc, l'équipe a remporté 24 matchs.
Ainsi, l'équipe de soccer de Gaussville a remporté $n = 24 - 16 = 8$ jeux d'affilée.

Réponse : (D)

18. La fraction de l'aire du grand cercle qui n'est pas ombrée ne dépend pas du rayon réel de l'un ou l'autre cercle mais plutôt de la relation qui existe entre les deux. Supposons donc que le petit cercle a un rayon de 1 et que le grand cercle a un rayon de 3.
Dans ce cas, l'aire du petit cercle est égale à $\pi(1)^2 = \pi$.
L'aire du grand cercle est égale à $\pi(3)^2 = 9\pi$.
L'aire du grand cercle qui n'est pas ombrée est égale à $9\pi - \pi = 8\pi$.
Donc, $\frac{8\pi}{9\pi} = \frac{8}{9}$ de l'aire du grand cercle n'est pas ombrée.
(Par ailleurs, on remarque que $\frac{\pi}{9\pi} = \frac{1}{9}$ de l'aire du grand cercle est ombrée et donc que $1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$ de l'aire du grand cercle n'est pas ombrée.)

Réponse : (A)

19. On travaille à rebours à partir de la somme finale (soit 440) en annulant chacune des trois opérations pour déterminer la somme des deux nombres initiaux.
La dernière opération que Asima et Nile ont chacun effectué était de multiplier la différence qu'ils avaient obtenu par 4.
Le fait de multiplier chaque différence par 4 augmente la somme de ces derniers par un facteur de 4.
Autrement dit, puisque la somme finale de leur deux résultats était de 440, alors la somme de leurs différences avant qu'elles ne soient multipliées par 4 aurait été égale à $440 \div 4 = 110$.
La deuxième opération que Asima et Nile ont chacun effectué était de soustraire 10 du produit qu'ils avaient obtenu.
Le fait de soustraire 10 de chacun de leurs produits diminue de 20 la somme de ces derniers.
Autrement dit, la somme de leurs deux nombres immédiatement après la deuxième opération était de 110 et donc la somme de leurs deux nombres immédiatement avant la deuxième opération était de $110 + 20 = 130$.
Enfin, la première opération que Asima et Nile ont chacun effectué était de doubler leur nombre.
Le fait de doubler chacun de leurs nombres augmente la somme de ces derniers par un facteur de 2.
Autrement dit, la somme de leurs deux nombres immédiatement après la première opération était de 130 et donc la somme de leurs deux nombres avant la première opération était de $130 \div 2 = 65$.
Chacun des entiers initiaux est supérieur à 0 et les deux entiers ont une somme de 65.
Donc, l'entier initial d'Asima peut être n'importe quel entier de 1 à 64.
Il y a donc 64 possibilités pour l'entier initial d'Asima.

Réponse : (A)

20. *Solution 1*

Le tableau ci-dessous représente les différences possibles entre le nombre qu'obtient Ruby et celui qu'obtient Sam après qu'ils aient tous les deux jeté un dé juste dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Nombre qu'obtient Ruby en jetant le dé

Nombre qu'obtient Sam en jetant le dé	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	-1	0	1	2	3	4
3	-2	-1	0	1	2	3
4	-3	-2	-1	0	1	2
5	-4	-3	-2	-1	0	1
6	-5	-4	-3	-2	-1	0

D'après le tableau ci-dessus, le nombre total de résultats possibles est égal à $6 \times 6 = 36$, dont 15 ont une différence négative.

Donc, lorsqu'on soustrait le nombre qu'obtient Sam de celui qu'obtient Ruby, la probabilité que le résultat de cette soustraction soit un nombre négatif est égale à $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

Solution 2

Ruby et Sam ont chacun 6 résultats possibles lorsqu'ils jettent les dés. Donc, il y a $6 \times 6 = 36$ résultats possibles. Sur ces 36 résultats possibles, il y a 6 résultats dans lesquels Sam et Ruby obtiennent chacun le même nombre et donc ces nombres ont une différence de 0.

Pour les $36 - 6 = 30$ résultats possibles restants, la probabilité que Ruby ait obtenu un nombre supérieur à celui de Sam est égale à la probabilité que Sam ait obtenu un nombre supérieur à celui de Ruby.

Autrement dit, la moitié de ces 30 résultats possibles (soit 15) ont une différence négative tandis que l'autre moitié des résultats possibles ont une différence positive.

Donc, lorsqu'on soustrait le nombre qu'obtient Sam de celui qu'obtient Ruby, la probabilité que le résultat de cette soustraction soit un nombre négatif est égale à $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

Réponse : (B)

21. Si n est un entier strictement positif, alors on obtient un 1 suivi de n zéros en évaluant 10^n.

Par exemple, $10^4 = 10\,000$ et 10^{2021} est égal à $1\underbrace{00...0}_{\text{2021 zéros}}$.

Lorsqu'on ajoute 1 à l'entier strictement positif composé uniquement de n 9, on obtient 10^n.

Par exemple, $1 + 9999 = 10\,000 = 10^4$ et $1 + \underbrace{99...9}_{\text{2021 neuf}} = 1\underbrace{00...0}_{\text{2021 zéros}} = 10^{2021}$.

Soit S l'entier égal à $10^{2021} - 2021$.

Puisque $10^{2021} = 1 + \underbrace{99...9}_{\text{2021 neuf}}$, alors $S = 1 + \underbrace{99...9}_{\text{2021 neuf}} - 2021 = \underbrace{99...9}_{\text{2021 neuf}} - 2020 = \underbrace{99...9}_{\text{2017 neuf}}7979$.

Les chiffres de l'entier égal à $10^{2021} - 2021$ ont donc une somme de $2019 \times 9 + 2 \times 7 = 18\,185$.

Réponse : (E)

22. On dresse d'abord la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à 31.
On choisit de terminer la liste à 31 car $30 \times 30 = 900$ et donc 31×37 est supérieur à 900.
On a donc la liste suivante de nombres premiers :

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31$$

En considérant les couples consécutifs de nombres premiers de la liste ci-dessus, on peut exprimer 10 entiers strictement positifs inférieurs à 900 sous la forme d'un produit de deux nombres premiers consécutifs, soit :

$$2 \times 3 = 6 \qquad 3 \times 5 = 15 \qquad 5 \times 7 = 35 \qquad 7 \times 11 = 77 \qquad 11 \times 13 = 143$$

$$13 \times 17 = 221 \qquad 17 \times 19 = 323 \qquad 19 \times 23 = 437 \qquad 23 \times 29 = 667 \qquad 29 \times 31 = 899$$

Il y a 3 entiers strictement positifs inférieurs à 900 que l'on peut exprimer sous la forme d'un produit de trois nombres premiers consécutifs, soit :

$$2 \times 3 \times 5 = 30 \qquad 3 \times 5 \times 7 = 105 \qquad 5 \times 7 \times 11 = 385$$

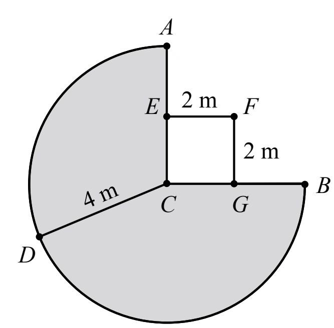
Puisque chaque entier strictement positif supérieur à 1 est soit un nombre premier ou peut être exprimé sous la forme d'un produit unique de nombres premiers, alors les trois nombres 30, 105 et 385 sont différents de ceux que l'on obtient à partir d'un produit de deux nombres premiers consécutifs. (Par ailleurs, on peut vérifier que 30, 105 et 385 ne paraissent pas dans la liste précédente.)
De plus, on remarque que le prochain plus petit entier strictement positif que l'on peut exprimer sous la forme d'un produit de trois nombres premiers consécutifs est $7 \times 11 \times 13 = 1001$, ce qui est supérieur à 900.
Un seul entier strictement positif inférieur à 900 peut être exprimé sous la forme d'un produit de quatre nombres premiers consécutifs. Cet entier est

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$$

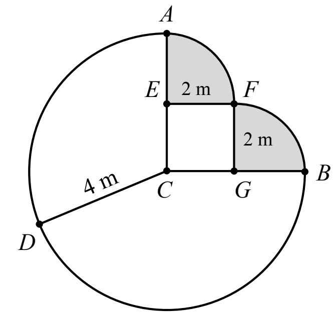
Le prochain plus petit entier strictement positif que l'on peut exprimer sous la forme d'un produit de quatre nombres premiers consécutifs est $3 \times 5 \times 7 \times 11 = 1155$, ce qui est supérieur à 900.
Il n'y a pas d'entiers strictement positifs inférieurs à 900 que l'on peut exprimer sous la forme d'un produit de cinq nombres premiers consécutifs ou plus puisque $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 2310$, ce qui est supérieur à 900.
En tout, il y a $10 + 3 + 1 = 14$ entiers strictement positifs inférieurs à 900 que l'on peut exprimer sous la forme d'un produit de deux nombres premiers consécutifs ou plus.

RÉPONSE : (A)

23. On nomme d'abord quelques points supplémentaires dans la figure ci-contre.
La laisse de 4 m permet au chien d'atteindre les points A, B et D où $AC = BC = DC = 4$ m. Donc le chien peut jouer n'importe où dans la region ombrée de la figure.
La niche $EFGC$ est un carré, donc $\angle ECG = 90°$.
Donc, la région ombrée est égale à $\frac{3}{4}$ d'un cercle de centre C et de rayon $CD = 4$ m. L'aire de cette région ombrée est donc égale à $\frac{3}{4}\pi(4 \text{ m})^2 = 12\pi \text{ m}^2$.



Il y a une région supplémentaire à l'extérieur de la niche dans laquelle le chien peut jouer. Cette région est ombrée dans la figure ci-contre.



Puisque $AC = 4$ m et que $EC = 2$ m, alors $AE = 2$ m. Puisque $EC + EF = 2 \text{ m} + 2 \text{ m} = 4$ m, ce qui correspond à la longueur de la laisse, alors le chien peut atteindre F.

De même, $BG = 2$ m et $GC + GF = 2 \text{ m} + 2 \text{ m} = 4$ m, ce qui correspond à la longueur de la laisse, alors le chien peut atteindre F en longeant les côtés GC et GF de sa niche.

Puisque $\angle AEF = \angle FGB = 90^\circ$, alors chacune de ces deux figures ombrées est égale à $\frac{1}{4}$ d'un cercle (de centres E et G respectivement) de rayon 2 m. Donc, chacune de ces deux figures ombrées a une aire égale à $\frac{1}{4}\pi(2)^2 = \pi$ m^2. (Par exemple, lorsque le chien est situé au-dessus et à droite de E, le chien ne peut profiter que de 2 m de laisse et peut ainsi former un quart de cercle de rayon 2 m à partir de E.)

En tout, l'aire de la région dans laquelle le chien peut jouer à l'extérieur de la niche est égale à $12\pi \text{ m}^2 + 2 \times \pi \text{ m}^2 = 14\pi \text{ m}^2$.

Réponse : (A)

24. Soit S la somme des nombres sur les faces extérieures du cube de dimensions $n \times n \times n$.

Pour déterminer la plus petite valeur de n telle que $S > 1500$, on positionne les cubes de dimensions $1 \times 1 \times 1$ dans le grand cube de manière que S soit aussi grand que possible.

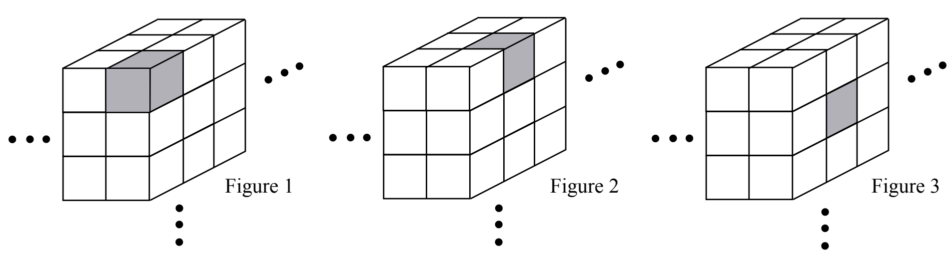
Les cubes de dimensions $1 \times 1 \times 1$ dont les nombres paraissent sur les faces extérieures du grand cube peuvent êtres classés en trois types que l'on appelle : coin, arête et intérieur.

On voit ces trois types de cubes de dimensions $1 \times 1 \times 1$ dans les figures ci-dessous (ces figures représentent une partie du grand cube de dimensions $n \times n \times n$).

(i) On voit un cube de type *coin* dans la Figure 1. Il n'y a que 8 tels cubes puisque ces cubes sont situés aux « coins » du grand cube.

(ii) On voit un cube de type *arête* dans la Figure 2. Ces cubes sont situés le long des arêtes du grand cube mais non aux coins de ce dernier. Puisqu'un cube a 12 arêtes et que chaque arête du grand cube contient $n - 2$ cubes de type *arête*, alors il y a $12 \times (n - 2)$ cubes de ce type.

(iii) On voit un cube de type *intérieur* dans la Figure 3. Ces cubes sont ceux dont un seul nombre parait sur les faces extérieures du grand cube. Puisqu'un cube a 6 faces et que chaque face du grand cube contient $(n - 2) \times (n - 2)$ cubes de type *intérieur*, alors il y a $6 \times (n - 2)^2$ cubes de ce type.



Chaque cube de type coin contribue 3 faces (et donc 3 nombres) à S.

Pour que S soit aussi grand que possible, le cube de dimensions $1 \times 1 \times 1$ doit être positionné de manière que la somme des 3 faces externes soit aussi grande que possible.

On peut déterminer à partir du développement donné que les trois faces se rencontrant à un sommet du cube de dimensions $1 \times 1 \times 1$ peuvent contenir les nombres : $-1, 0, 1$ ou $-1, 2, 0$ ou

$-2, 2, 0$ ou $-2, 1, 0$.
Ces trois faces peuvent donc avoir des sommes respectives de $0, 1, 0$ et -1.
Pour que S soit aussi grand que possible, on positionne chaque cube de type coin de manière que les nombres paraissant sur les faces extérieures du grand cube soient -1, 2 et 0 (soit les nombres ayant la plus grande somme possible de 1).
Donc, les 8 cubes de type coin contribuent $8 \times 1 = 8$ à S.

Chaque cube de type arête contribue 2 faces (et donc 2 nombres) à S. Pour que S soit aussi grand que possible, le cube de dimensions $1 \times 1 \times 1$ doit être positionné de manière que la somme des 2 faces externes soit aussi grande que possible.
On peut déterminer à partir du développement donné que les deux faces partageant une arête du cube de dimensions $1 \times 1 \times 1$ peuvent contenir les nombres : $-1, 0$ ou $-1, 2$ ou $-1, 1$ ou $2, 0$ ou $1, 0$ ou $-2, 0$ ou $-2, 1$ ou $-2, 2$.
Ces deux faces adjacentes peuvent donc avoir des sommes respectives de : $-1, 1, 0, 2, 1, -2, -1$ et 0.
Pour que S soit aussi grand que possible, on positionne chaque cube de type arête de manière que les nombres paraissant sur les faces extérieures du grand cube soient 2 et 0 (soit les nombres ayant la plus grande somme possible de 2).
Donc, les $12 \times (n-2)$ cubes de type arête contribuent $2 \times 12 \times (n-2)$ ou $24 \times (n-2)$ à S.

Finalement, chaque cube de type intérieur contribue 1 face (et donc 1 nombre) à S. Pour que S soit aussi grand que possible, on positionne chacun de ces cubes de manière que le nombre 2 paraisse sur cette face (puisque 2 est le plus grand nombre dans le développement).
Donc, les $6 \times (n-2)^2$ cubes de type intérieur contribuent $2 \times 6 \times (n-2)^2$ ou $12 \times (n-2)^2$ à S.

En tout, on obtient $S = 8 + 24 \times (n-2) + 12 \times (n-2)^2$.
On veut déterminer la plus petite valeur de n telle que $S > 1500$ ou

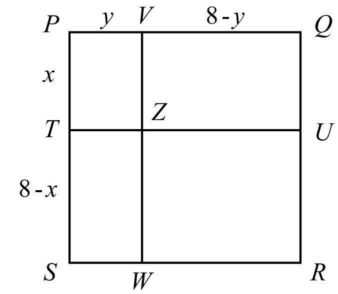
$$8 + 24 \times (n-2) + 12 \times (n-2)^2 > 1500$$

En procédant par tâtonnements, on obtient :
- Lorsque $n = 9$, $S = 8 + 24 \times (n-2) + 12 \times (n-2)^2 = 8 + 24 \times 7 + 12 \times 7^2 = 764$, ce qui est inférieur à 1500.
- Lorsque $n = 11$, $S = 8 + 24 \times 9 + 12 \times 9^2 = 1196$, ce qui est inférieur à 1500.
- Lorsque $n = 12$, $S = 8 + 24 \times 10 + 12 \times 10^2 = 1448$, ce qui est inférieur à 1500.
- Lorsque $n = 13$, $S = 8 + 24 \times 11 + 12 \times 11^2 = 1724$, ce qui est supérieur à 1500.

Donc, 13 est la plus petite valeur de n telle que la somme des faces extérieures du grand cube de dimensions $n \times n \times n$ soit supérieure à 1500.

Réponse : (D)

25. La figure ci-contre représente le carré $PQRS$ de l'énoncé du problème.
Puisque $PS = 8$, alors en posant $PT = x$, on obtient $TS = 8 - x$. De même, si $PV = y$, alors $VQ = 8 - y$.
La valeur de x (où $0 < x < 8$) précise la position du segment de droite TU (ce segment est parallèle à PQ).
La valeur de y (où $0 < y < 8$) précise la position du segment de droite VW (ce segment est parallèle à QR).
Donc, la valeur de N est égale au nombre de couples (x, y) pour lesquels les aires des quatres rectangles $PVZT$, $TZWS$, $VQUZ$ et $ZURW$ sont des entiers.



Puisque les aires des rectangles $PVZT$ et $VQUZ$ sont des entiers, alors l'aire du rectangle $PQUT$ est obtenue à partir de la somme de deux entiers et est donc également un entier.
L'aire de $PQUT$ est égale à $(PQ)(PT) = 8x$, d'où $8x$ est donc un entier.
De même, l'aire de $PVWS$ est un entier, d'où $8y$ est donc un entier.
Quelles sont les valeurs de x pour lesquelles $8x$ est un entier ?
Si x est un entier, alors $8x$ est un entier, d'où x peut donc égaler n'importe quel entier de 1 à 7.
De même, y peut égaler n'importe quel entier de 1 à 7.
Pour chacune des 7 valeurs possibles de x, il y a 7 valeurs possibles de y. Donc, pour le cas où x et y sont chacun des entiers, il y a $7 \times 7 = 49$ couples (x, y) pour lesquels les aires des quatres rectangles $PVZT$, $TZWS$, $VQUZ$ et $ZURW$ sont des entiers.
Par exemple, considérons $(x, y) = (2, 3)$.
Dans ce cas, $8 - x = 6$, $8 - y = 5$ et les aires des quatre rectangles $PVZT$, $TZWS$, $VQUZ$ et $ZURW$ sont respectivement les entiers $2 \times 3 = 6$, $6 \times 3 = 18$, $2 \times 5 = 10$ et $6 \times 5 = 30$.

Ayant considéré les cas où x et y sont tous deux des entiers, considérons ensuite les cas possibles où l'on a exactement un seul entier parmi x et y.
Supposons donc que y est un entier et que x ne l'est pas.

Y a-t-il des valeurs non entières de x pour lesquelles $8x$ est un entier ?
Lorsque $x = \frac{1}{2}$, $8x = 8 \times \frac{1}{2} = 4$. Donc, il existe des valeurs fractionnaires de x pour lesquelles $8x$ est un entier.
Soit $x = \frac{a}{b}$, a et b étant des entiers strictement positifs n'ayant aucun facteur ou diviseur en commun (autrement dit, la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible).
Puisque $8x = 8 \times \frac{a}{b}$ est un entier exactement lorsque b est un diviseur positif de 8, alors b peut égaler $1, 2, 4$ ou 8.
Considérons ensuite chacune de ces valeurs possibles de b.

Lorsque $b = 1$, $x = \frac{a}{b} = \frac{a}{1} = a$. Donc, x est un entier.
On a déjà considéré le cas où x et y sont tous deux des entiers (dans ce cas, il y a 49 couples (x, y) qui répondent aux critères donnés).

Considérons ensuite les cas où $b = 2$.
Puisque a et b n'ont aucun facteur ou diviseur en commun, alors a doit être impair.
De plus, $0 < \frac{a}{b} < 8$, d'où a peut donc égaler $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13$ ou 15 (remarquons que $\frac{17}{2} > 8$).
Lorsque x égale $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{11}{2}$, $\frac{13}{2}$ ou $\frac{15}{2}$, quelles sont les valeurs possibles de y ?
Rappelons qu'on est en train de considérer les cas où l'on a exactement un seul entier parmi x et y et qu'on avait supposé que y était l'entier.
L'aire du rectangle $PVZT$ est un entier d'où on a donc que $(PV)(PT) = xy$ est un entier. (Remarquons que l'aire de chacun des 3 autres rectangles est également un entier.)
Lorsque x est égal à une fraction de la forme $\frac{a}{2}$ (où a est impair et provient de la liste ci-dessus) et que xy est un entier, alors 2 est un diviseur de y, d'où y est donc un entier pair.
Puisque $0 < y < 8$, alors y peut égaler $2, 4$ ou 6.
Pour chacun des 8 choix de x, il y a 3 choix de y. Dans ce cas, il y a donc $8 \times 3 = 24$ couples (x, y) pour lesquels les aires des quatres rectangles $PVZT$, $TZWS$, $VQUZ$ et $ZURW$ sont des entiers.
Par exemple, considérons $(x, y) = (\frac{3}{2}, 6)$. Dans ce cas, $8 - x = \frac{13}{2}$, $8 - y = 2$ et les aires des quatre rectangles $PVZT$, $TZWS$, $VQUZ$ et $ZURW$ sont respectivement les entiers $\frac{3}{2} \times 6 = 9$, $\frac{13}{2} \times 6 = 39$, $\frac{3}{2} \times 2 = 3$ et $\frac{13}{2} \times 2 = 13$.
Rappelons que l'on avait établi précédemment que $8y$ est également un entier.
Donc, chacune des valeurs possibles de x est une valeur possible de y et vice versa.
Autrement dit, y peut égaler $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, \frac{13}{2}$ ou $\frac{15}{2}$ tandis que x peut égaler 2, 4 ou 6, d'où on a

donc 24 couples (x, y) supplémentaires.

En résumé, si x et y sont tous deux des entiers, alors il y a 49 couples (x, y) qui répondent aux critères donnés.
Si x est une fraction de la forme $\frac{a}{2}$ (a étant des entiers impairs qui vérifient $1 \le a \le 15$) et si y est un entier, alors il y a 24 couples (x, y) qui répondent aux critères donnés.
Si y est une fraction de la forme $\frac{a}{2}$ (a étant des entiers impairs qui vérifient $1 \le a \le 15$) et si x est un entier, alors il y a 24 couples (x, y) qui répondent aux critères donnés.

Considérons ensuite le cas où $b = 4$.
Puisque a et b n'ont aucun facteur ou diviseur en commun, alors a doit être impair.
De plus, $0 < \frac{a}{b} < 8$, d'où a peut donc égaler $1, 3, 5, \ldots, 27, 29$ ou 31 (remarquons que $\frac{33}{4} > 8$).
Lorsque x égale $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \ldots \frac{27}{4}, \frac{29}{4}$ ou $\frac{31}{4}$, quelles sont les valeurs possibles de y ?
Rappelons qu'on est en train de considérer les cas où l'on a exactement un seul entier parmi x et y et qu'on avait supposé que y était l'entier.
Puisque xy est un entier et que x est égal à une fraction de la forme $\frac{a}{4}$, alors 4 est un diviseur de y.
Puisque $0 < y < 8$, alors $y = 4$.
Pour chacun des 16 choix de x, il y a 1 choix de y. Dans ce cas, il y a donc $16 \times 1 = 16$ couples (x, y) pour lesquels les aires des quatres rectangles $PVZT$, $TZWS$, $VQUZ$ et $ZURW$ sont des entiers.
Par exemple, considérons $(x, y) = (\frac{5}{4}, 4)$.
Dans ce cas, $8 - x = \frac{27}{4}$, $8 - y = 4$ et les aires des quatre rectangles $PVZT$, $TZWS$, $VQUZ$ et $ZURW$ sont respectivement les entiers $\frac{5}{4} \times 4 = 5$, $\frac{27}{4} \times 4 = 27$, $\frac{5}{4} \times 4 = 5$ et $\frac{27}{4} \times 4 = 27$.
Lorsque y égale $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \ldots \frac{27}{4}, \frac{29}{4}$ ou $\frac{31}{4}$ et que $x = 4$, alors il y a 16 couples (x, y) supplémentaires.

Enfin, pour terminer les cas où l'on a exactement un seul entier parmi x et y, on considère $b = 8$.
Puisque xy est un entier et que x est égal à une fraction de la forme $\frac{a}{8}$, alors 8 est un diviseur de y.
Or, $y < 8$ et ne peut donc pas admettre 8 comme diviseur. Donc il n'y a pas de couples (x, y) lorsque $b = 8$.

Considérons finalement les cas où x et y ne sont pas des entiers tous les deux.
Comme on l'a déterminé précédemment, si x n'est pas un entier, alors x peut être exprimé sous la forme $\frac{a}{2}$ ou $\frac{a}{4}$, a étant un entier strictement positif impair.
Si y n'est pas un entier, alors y peut pareillement être exprimé sous la forme $\frac{a}{2}$ ou $\frac{a}{4}$, a étant un entier strictement positif impair.
Or, si x et y sont tous deux exprimés de cette forme, alors leur produit, xy, est de la forme $\frac{c}{4}$, $\frac{c}{8}$ ou $\frac{c}{16}$ où c est le produit de deux entiers impairs et est donc lui-même impair.
Puisque 4, 8 ou 16 ne peuvent être des diviseurs d'un nombre impair, alors xy ne peut être un entier, d'où l'aire du rectangle $PVZT$ ne peut être un entier non plus.
Donc, il n'y a pas de cas où x et y ne sont pas des entiers tous les deux.

Donc, la valeur de N est égale à $49 + (2 \times 24) + (2 \times 16) = 49 + 48 + 32 = 129$. On a donc un reste de 41 lorsque l'on divise $N^2 = 16\,641$ par 100.

Réponse : (D)