Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Galois 2021

Avril 2021
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

Avril 2021
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Lorsque $a = 5$ et $b = 1$, alors on a $5\triangle 1 = 5(2 \times 1 + 4) = 5(6) = 30$.

   (b) Si $k\triangle 2 = 24$, alors $k(2 \times 2 + 4) = 24$ ou $8k = 24$, d'où $k = 3$.

   (c) On isole p dans l'équation donnée pour obtenir

$$\begin{aligned} p\triangle 3 &= 3\triangle p \\ p(2 \times 3 + 4) &= 3(2p + 4) \\ p(10) &= 6p + 12 \\ 10p - 6p &= 12 \\ 4p &= 12 \\ p &= 3 \end{aligned}$$

   Donc, $p = 3$ est la seule valeur de p telle que $p\triangle 3 = 3\triangle p$.

   (d) On simplifie l'équation donnée pour obtenir

$$\begin{aligned} m\triangle(m + 1) &= 0 \\ m(2(m + 1) + 4) &= 0 \\ m(2m + 2 + 4) &= 0 \\ m(2m + 6) &= 0 \end{aligned}$$

   Donc, $m = 0$ ou $2m + 6 = 0$, d'où $m = -3$.
   Donc, $m = 0$ et $m = -3$ sont les seules valeurs de m telles que $m\triangle(m + 1) = 0$.
   (On peut reporter chacune de ces valeurs de m dans l'équation pour vérifier : $0\triangle 1 = 0(2 \times 1 + 4) = 0(6) = 0$ et $(-3)\triangle(-2) = -3(2 \times (-2) + 4) = -3(0) = 0$.)

2. (a) L'équipe P a disputé 27 matchs. L'équipe a remporté 10 matchs et a subi 14 défaites.
   Donc, l'équipe P a fait match nul $27 - 10 - 14 = 3$ fois.

   (b) L'équipe Q a remporté 2 victoires de plus que l'équipe P, soit $10 + 2 = 12$ victoires.
   L'équipe Q a subi 4 défaites de moins que l'équipe P, elle a donc subi $14 - 4 = 10$ défaites.
   Puisque l'équipe Q a disputé 27 matchs, alors elle a fait match nul $27 - 12 - 10 = 5$ fois.
   À la fin de la saison, l'équipe Q avait un total de $(2 \times 12) + (0 \times 10) + (1 \times 5)$ ou 29 points.

   (c) *Solution 1*
   Supposons que l'équipe R termine la saison ayant fait match nul 6 fois.
   Puisque 6 matchs nuls rapportent 6 points à leur total de points, alors l'équipe R a gagné les $25 - 6 = 19$ points restants grâce à des victoires.
   Or, puisque chaque victoire rapporte 2 points au total, alors il est impossible de gagner un nombre impair de points à partir de victoires.
   Donc, l'équipe R n'aurait pas pu terminer la saison avec exactement 6 matchs nuls.

   Solution 2
   Supposons que l'équipe R termine la saison ayant remporté w victoires.
   Si l'équipe R avait terminé la saison ayant fait match nul 6 fois, alors ils auraient terminé la saison avec un total de $(2 \times w) + (1 \times 6)$ ou $2w + 6 = 2(w + 3)$ points (il ne gagnent pas de points pour des défaites).
   Puisque w est un entier, alors $w + 3$ est un entier, d'où $2(w + 3)$ est donc un entier pair.
   Or, cela est impossible car l'équipe R a terminé la saison avec 25 points, ce qui est un nombre impair de points.
   Donc, l'équipe R n'aurait pas pu terminer la saison avec exactement 6 matchs nuls.

(d) *Solution 1*

Soit d le nombre de défaites qu'a subi l'équipe S pendant la saison.

L'équipe S avait 4 victoires de plus que de défaites et a donc terminé la saison avec $d+4$ victoires.

Puisque l'équipe S a disputé 27 matchs, alors ils ont fait match nul $27-d-(d+4)=23-2d$ fois.

Donc, l'équipe S a terminé la saison avec un total de $(2\times(d+4))+(0\times d)+(1\times(23-2d))$ ou $2d+8+23-2d=31$ points.

Solution 2

Chacune des 4 équipes a disputé 27 matchs. Puisque tout match est disputé par deux équipes, alors il y eut $\frac{4\times 27}{2}=54$ matchs en tout.

Peu importe le résultat d'un match, chacun des 54 matchs a attribué 2 points en tout aux équipes concernées (soit 2 points à l'équipe gagnante et 0 à l'équipe perdante, soit 1 point à chacune des deux équipes si elles ont fait match nul).

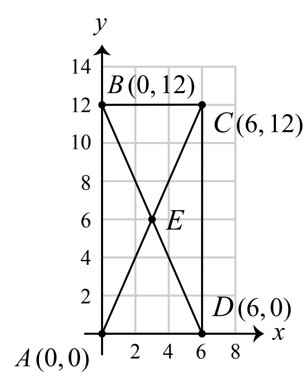
Donc, les 4 équipes ont gagné $2\times 54=108$ points en tout.

D'après le tableau, l'équipe P a terminé la saison avec un total de 23 points tandis que l'équipe R a terminé la saison avec un total de 25 points. De plus, comme on l'a déterminé dans la partie (b), l'équipe Q a terminé la saison avec un total de 29 points.

Donc, l'équipe S a dû terminer la saison avec un total de $108-23-25-29=31$ points.

3. (a) *Solution 1*

On trace d'abord le rectangle et on nomme les sommets comme dans la figure ci-contre.



Les diagonales d'un rectangle se coupent au centre du rectangle. Autrement dit, E est le milieu de AC. Donc, l'abscisse de E est égale à la moyenne des abscisses de A et C, soit $\frac{0+6}{2}=3$.

L'ordonnée de E est égale à la moyenne des ordonnées de A et C, soit $\frac{0+12}{2}=6$. Donc, E a pour coordonnées $(3,6)$.

Supposons que $AD=6$ est la base du triangle ADE. Donc, la hauteur du triangle est égale à la distance entre E et l'axe des abscisses. Le triangle ADE a donc une hauteur de 6.

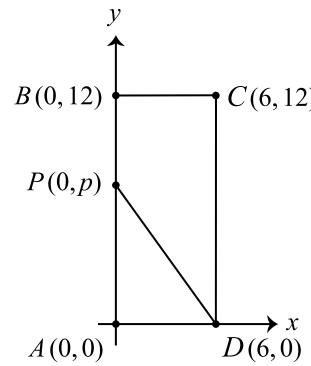
Donc, le triangle ADE a une aire de $\frac{1}{2}(6)(6)=18$.

Solution 2

Les diagonales d'un rectangle coupent le rectangle en 4 triangles de même aire. (Avant de continuer, essayez de voir pourquoi cela est vrai.)

Donc, l'aire du triangle ADE est égale à $\frac{1}{4}$ de l'aire du rectangle $ABCD$, soit $\frac{1}{4}(6)(12)=18$.

(b) *Solution 1*



On trace le rectangle et le point P et on nomme les sommets comme dans la figure ci-contre.
L'aire du rectangle $ABCD$ est égale à l'aire du trapèze $BCDP$ plus l'aire du triangle PAD.
Puisque l'aire du trapèze $BCDP$ est le double de l'aire du triangle PAD, alors l'aire du triangle PAD est égale à $\frac{1}{3}$ de l'aire de $ABCD$ (tandis que l'aire du trapèze $BCDP$ est égale à $\frac{2}{3}$ de l'aire de $ABCD$).
L'aire du rectangle $ABCD$ est égale à $6 \times 12 = 72$. Donc, l'aire du triangle PAD est égale à $\frac{1}{3} \times 72 = 24$.
L'aire du triangle PAD est égale à $\frac{1}{2}(AD)(AP) = \frac{1}{2}(6)(p) = 3p$.
Donc, $3p = 24$ ou $p = 8$.

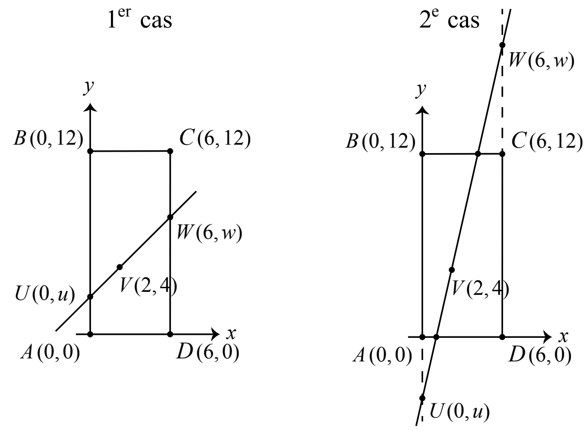
Solution 2
Le point P a pour coordonnées $(0, p)$. Donc, $AP = p$ et $BP = 12 - p$.
L'aire du triangle PAD est égale à $\frac{1}{2}(AD)(AP) = \frac{1}{2}(6)(p) = 3p$.
L'aire du trapèze $BCDP$ est égale à $\frac{1}{2}(BC)(BP + CD) = \frac{1}{2}(6)(12 - p + 12) = 3(24 - p)$.
Puisque l'aire du trapèze $BCDP$ est le double de l'aire du triangle PAD, alors $3(24 - p) = 2(3p)$, d'où $24 - p = 2p$ ou $3p = 24$, soit $p = 8$.

(c) L'aire du rectangle $ABCD$ est égale à $6 \times 12 = 72$.
Les deux trapèzes ont des aires dont la somme est égale à l'aire du rectangle $ABCD$.
Puisque les aires des deux trapèzes sont dans un rapport de $5 : 3$, alors les aires des deux trapèzes sont $\frac{5}{8} \times 72 = 45$ et $\frac{3}{8} \times 72 = 27$.
(On peut vérifier que $45 : 27 = 5 : 3$ et $45 + 27 = 72$.)

Soit d la droite passant par U, V et W.
Supposons d'abord que d ne passe par aucun des sommets de $ABCD$. Dans ce cas, d coupe soit des côtés opposés de $ABCD$, soit des côtés adjacents de $ABCD$.
Si d coupe des côtés opposés de $ABCD$, alors d coupe $ABCD$ en deux trapèzes, comme souhaité.
Si d coupe des côtés adjacents de $ABCD$, alors d coupe $ABCD$ en un triangle et un pentagone. Or, cela n'est pas possible.

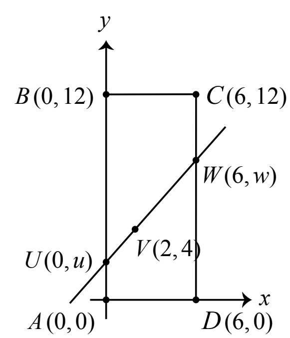
Supposons que d passe par au moins un sommet de $ABCD$.
Dans ce cas, d coupe $ABCD$ en deux figures dont au moins une est un triangle. Cela n'est également pas possible.
Donc, d coupe des côtés opposés de $ABCD$ et ne passe pas par A, B, C ou D.

Autrement dit, la droite d peut couper des côtés opposés de $ABCD$ de deux manières différentes, comme dans les figures ci-dessous.



Pour chaque cas, puisque la droite d passe par U, V et W en ligne droite, alors la pente de UV est égale à la pente de VW.
Donc,

$$\begin{aligned}
\frac{4-u}{2-0} &= \frac{w-4}{6-2} \\
4(4-u) &= 2(w-4) \\
2(4-u) &= w-4 \\
8-2u &= w-4 \\
w &= 12-2u
\end{aligned}$$



1er cas : La droite d coupe les côtés AB et CD.
C'est-à-dire que U est situé entre A et B tandis que W est situé entre C et D.

Dans ce cas, $0 < u < 12$, $0 < w < 12$, $AU = u$ et $DW = w$.
L'aire du trapèze $ADWU$ est

$$\tfrac{1}{2}(AD)(DW + AU) = \tfrac{1}{2}(6)(w+u) = 3(w+u).$$

Puisque $w = 12-2u$, l'aire du trapèze $ADWU$ devient $3(12-u)$.
Considérons chacune des deux possibilités suivantes : l'aire du trapèze $ADWU$ est égale à 27 ou l'aire du trapèze est égale à 45.

Si l'aire du trapèze $ADWU$ est égale à 27, alors

$$\begin{aligned}
3(12-u) &= 27 \\
12-u &= 9 \\
u &= 3
\end{aligned}$$

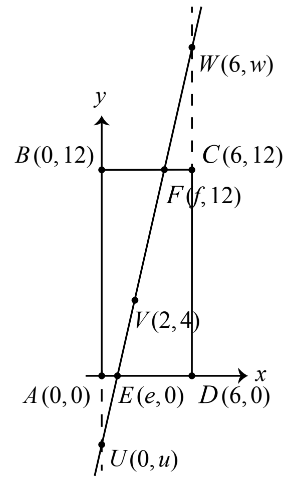
Lorsqu'on reporte $u = 3$ dans l'équation $w = 12 - 2u$, on obtient $w = 12 - 6 = 6$.
Les conditions du 1er cas (que $0 < u < 12$ et que $0 < w < 12$) sont remplies. Donc, les aires des deux trapèzes sont dans un rapport de 5 : 3 pour le couple de points $U(0,3)$ et $W(6,6)$.

Si l'aire du trapèze $ADWU$ est égale à 45, alors

$$\begin{aligned}
3(12-u) &= 45 \\
12-u &= 15 \\
u &= -3
\end{aligned}$$

Dans ce cas, la condition $0 < u < 12$ n'est pas remplie. Donc, il n'y a aucun couple de points U et W pour lesquels les aires des deux trapèzes sont dans un rapport de $5:3$.

2^e^ cas : La droite d coupe les côtés AD et BC.
C'est-à-dire que U est situé sur le prolongement de AB et à l'extérieur de ce dernier tandis que W est situé sur le prolongement de CD et à l'extérieur de ce dernier.



On trace le rectangle et on nomme les points (y compris les points $E(e,0)$ et $F(f,12)$; soit les points où d coupe respectivement les côtés AD et BC) comme dans la figure ci-contre.
Dans ce cas, $u < 0$ et $w > 12$ (comme on le voit dans la figure ci-contre), ou $u > 12$ et $w < 0$ (lorsque U est situé au-dessus de B et lorsque W est situé en dessous de D). Remarquons que ce qui suit est vrai pour chacun de ces deux cas et qu'on n'a donc pas besoin de les considérer séparément.
Dans ce cas, il faut que $0 < e < 6$ et que $0 < f < 6$ pour que $BF = f$ et $AE = e$.
L'aire du trapèze $BFEA$ est donc

$$\tfrac{1}{2}(AB)(BF + AE) = \tfrac{1}{2}(12)(f + e) = 6(f + e).$$

De plus, puisque la droite d passe par E, V et F en ligne droite, alors la pente de EV est égale à la pente de FV.
Donc,

$$\begin{aligned}\frac{4-0}{2-e} &= \frac{12-4}{f-2}\\ \frac{4}{2-e} &= \frac{8}{f-2}\\ 4(f-2) &= 8(2-e)\\ f-2 &= 2(2-e)\\ f &= 6-2e\end{aligned}$$

Puisque $f = 6 - 2e$, l'aire du trapèze $BFEA$ devient $6(6 - e)$.
Considérons chacune des deux possibilités suivantes : l'aire du trapèze $BFEA$ est égale à 27 ou l'aire du trapèze est égale à 45.

Si l'aire du trapèze $BFEA$ est égale à 27, alors

$$\begin{aligned}6(6-e) &= 27\\ 6-e &= \tfrac{9}{2}\\ e &= \tfrac{3}{2}\end{aligned}$$

Lorsqu'on reporte $e = \frac{3}{2}$ dans l'équation $f = 6 - 2e$, on obtient $f = 3$. Les conditions du 2^e^ cas (que $0 < e < 6$ et que $0 < f < 6$) sont remplies.
Donc, on a $E(\frac{3}{2}, 0)$ et $F(3, 12)$. Ces points nous permettront de déterminer U et W.
La pente de FV est égale à $\dfrac{12-4}{3-2} = 8$, d'où le pente de WV est également égale à 8. On a donc $\dfrac{w-4}{4} = 8$, d'où $w = 36$.

De même, la pente de VU est également égale à 8. On a donc $\dfrac{4-u}{2} = 8$, d'où $u = -12$.

Remarquons que $w = 36$ et $u = -12$ remplissent les conditions $w > 12$ et $u < 0$. Donc, les aires des deux trapèzes sont dans un rapport de 5 : 3 pour le couple de points $U(0, -12)$ et $W(6{,}36)$.

Si l'aire du trapèze $BFEA$ est égale à 45, alors

$$\begin{aligned} 6(6-e) &= 45 \\ 6-e &= \tfrac{15}{2} \\ e &= -\tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

Dans ce cas, la condition $0 < e < 6$ n'est pas remplie. Donc, il n'y a aucun couple de points E et F, et donc aucun couple des points U et W, pour lesquels les aires des deux trapèzes sont dans un rapport de 5 : 3.

Donc, il y a deux couples de points U et W pour lesquels les aires des deux trapèzes sont dans un rapport de 5 : 3. Ces couples sont $U(0, 3)$, $W(6, 6)$ et $U(0, -12)$, $W(6, 36)$.

4. (a) Lorsque $x = 6$, alors $\dfrac{5}{x} + \dfrac{14}{y} = 2$ devient $\dfrac{5}{6} + \dfrac{14}{y} = 2$, d'où $\dfrac{14}{y} = 2 - \dfrac{5}{6}$ ou $\dfrac{14}{y} = \dfrac{7}{6}$, soit $y = 12$.

(b) *Solution 1*

Puisque x et y sont des entiers strictement positifs, on obtient les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{4}{x} + \frac{5}{y} &= 1 \\ \frac{4}{x}(xy) + \frac{5}{y}(xy) &= 1(xy) \qquad (\text{car } xy \neq 0) \\ 4y + 5x &= xy \\ xy - 5x - 4y &= 0 \\ x(y-5) - 4y &= 0 \\ x(y-5) - 4y + 20 &= 20 \\ x(y-5) - 4(y-5) &= 20 \\ (x-4)(y-5) &= 20 \end{aligned}$$

Puisque x et y sont des entiers strictement positifs, alors $x - 4$ et $y - 5$ sont des entiers qui forment un couple de facteurs de 20.
Puisque $y > 0$, alors $y - 5 > -5$.
Les diviseurs de 20 supérieurs à -5 sont : $-4, -2, -1, 1, 2, 4, 5, 10$ et 20.
Si $y - 5$ est égal à -4, alors $x - 4 = -5$ (puisque $(-5)(-4) = 20$), d'où $x = -1$.
Cela n'est pas possible car x doit être un entier strictement positif.
De même, $y - 5$ ne peut égaler -2 ou -1 (car on obtiendrait $x < 0$ à partir de chacun).
Donc, $y - 5$ est un diviseur positif de 20.
Pour chacun des couples de facteurs positifs de 20, on détermine les valeurs correspondantes de x et y dans le tableau ci-dessous.

Couple de facteurs	$x-4$	$y-5$	x	y
1 et 20	1	20	5	25
20 et 1	20	1	24	6
2 et 10	2	10	6	15
10 et 2	10	2	14	7
4 et 5	4	5	8	10
5 et 4	5	4	9	9

Donc, les couples d'entiers strictement positifs (x, y) qui vérifient l'équation donnée sont $(5, 25)$, $(24, 6)$, $(6, 15)$, $(14, 7)$, $(8, 10)$ et $(9, 9)$.

Solution 2

Puisque x et y sont des entiers strictement positifs, on obtient les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{4}{x}+\frac{5}{y} &= 1 \\
\frac{4}{x}(xy)+\frac{5}{y}(xy) &= 1(xy) \qquad (\text{car } xy \neq 0) \\
4y+5x &= xy \\
xy-5x &= 4y \\
x(y-5) &= 4y \\
x &= \frac{4y}{y-5} \quad (y \neq 5) \\
x &= \frac{4y-20+20}{y-5} \\
x &= \frac{4(y-5)+20}{y-5} \\
x &= 4+\frac{20}{y-5}
\end{aligned}$$

Puisque x et y sont des entiers strictement positifs, alors $y-5$ est un diviseur de 20.
Puisque $y > 0$, alors $y-5 > -5$.
Les diviseurs de 20 supérieurs à -5 sont : $-4, -2, -1, 1, 2, 4, 5, 10$ et 20.
Si $y-5$ est égal à -4, alors $x = 4+\frac{20}{-4} = -1$. Cela n'est pas possible car x doit être un entier strictement positif.
De même, $y-5$ ne peut égaler -2 ou -1 (car on obtiendrait $x < 0$ à partir de chacun).
Donc, $y-5$ est un diviseur positif de 20.
Pour chacun des diviseurs positifs de 20, on détermine les valeurs correspondantes de y et x dans le tableau ci-dessous.

$y-5$	1	2	4	5	10	20
y	6	7	9	10	15	25
x	24	14	9	8	6	5

Donc, les couples d'entiers strictement positifs (x, y) qui vérifient l'équation donnée sont $(24, 6), (14, 7), (9, 9), (8, 10), (6, 15)$ et $(5, 25)$.

(c) *Solution 1*

Puisque $x \geq 1$ et $y \geq 1$, alors $\dfrac{16}{x} + \dfrac{25}{y} \leq 16 + 25 = 41$. Donc, $5 \leq p \leq 41$. C'est-à-dire que les nombres premiers possibles p proviennent de la liste $5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37$ et 41.

Puisque x et y sont des entiers strictement positifs, on obtient les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{16}{x} + \frac{25}{y} &= p \\
\frac{16}{x}(xy) + \frac{25}{y}(xy) &= p(xy) \qquad (\text{car } xy \neq 0) \\
16y + 25x &= pxy \\
pxy - 25x - 16y &= 0 \\
p^2xy - 25px - 16py &= 0 \qquad (\text{car } p > 0) \\
px(py - 25) - 16py &= 0 \\
px(py - 25) - 16py + 400 &= 400 \\
px(py - 25) - 16(py - 25) &= 400 \\
(px - 16)(py - 25) &= 400
\end{aligned}$$

Puisque p, x et y sont des entiers strictement positifs, alors px et py sont des entiers strictement positifs. Donc, $px - 16$ et $py - 25$ sont des entiers qui forment un couple de facteurs de 400.

Puisque $p \geq 5$ et $x \geq 1$, alors $px \geq 5$. Donc, $px - 16 \geq 5 - 16$ ou $px - 16 \geq -11$.

Les diviseurs de 400 qui sont à la fois supérieurs ou égaux à -11 et inférieurs à 0 sont : $-1, -2, -4, -5, -8$ et -10.

Si $px - 16 = -1$, alors $py - 25 = -400$.

Dans ce cas, on obtient $py = -375$, ce qui n'est pas possible car p et y sont tous deux positifs.

On peut montrer de la même manière que $px - 16$ ne peut égaler $-2, -4, -5, -8$ et -10 (car on obtiendrait $py < 0$ à partir de chacun). Donc, $px - 16$ est un diviseur positif de 400. Donc, $py - 25$ l'est aussi.

Pour chacun des couples de facteurs positifs de 400, on détermine les valeurs correspondantes possibles de p dans le tableau ci-dessous.

Rappelons qu'on ne doit considérer que les valeurs possibles de p telles que $5 \leq p \leq 41$.

$px-16$	$py-25$	px	py	Nouveau facteur premier commun de px et py
1	400	17	$425 = 17 \times 25$	17
2	200	18	225	
4	100	$20 = 5 \times 4$	$125 = 5 \times 25$	5
5	80	$21 = 7 \times 3$	$105 = 7 \times 15$	7
8	50	24	75	
10	40	$26 = 13 \times 2$	$65 = 13 \times 5$	13
16	25	32	50	
20	20	36	45	
25	16	41	41	41
40	10	56	35	
50	8	$66 = 11 \times 6$	$33 = 11 \times 3$	11
80	5	96	30	
100	4	$116 = 29 \times 4$	29	29
200	2	216	27	
400	1	416	26	

Les valeurs de p pour lesquelles il y a au moins un couple d'entiers strictement positifs (x, y) qui vérifient l'équation donnée sont $5, 7, 11, 13, 17, 29$ et 41.
Par exemple, on peut vérifier que lorsque $(x, y) = (6, 3)$, alors on a

$$\frac{16}{x} + \frac{25}{y} = \frac{16}{6} + \frac{25}{3} = \frac{16}{6} + \frac{50}{6} = \frac{66}{6} = 11$$

comme dans le tableau ci-dessus.

Solution 2

Puisque $x \geq 1$ et $y \geq 1$, alors $\dfrac{16}{x} + \dfrac{25}{y} \leq 16 + 25 = 41$. Donc, $5 \leq p \leq 41$. C'est à dire que les nombres premiers possibles p proviennent de la liste 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37 et 41.

Lorsque x est un diviseur positif de 16, alors $\dfrac{16}{x}$ est un entier strictement positif.

Plus précisément, lorsque $x = 1, 2, 4, 8, 16$, les valeurs de $\dfrac{16}{x}$ sont respectivement $16, 8, 4, 2, 1$.

De même, lorsque y est un diviseur positif de 25, alors $\dfrac{25}{y}$ est un entier strictement positif.

Plus précisément, lorsque $y = 1, 5, 25$, les valeurs de $\dfrac{25}{y}$ sont respectivement $25, 5, 1$.

À l'aide de cette observation, on peut déterminer quelques valeurs de p pour lesquelles il y a au moins un couple d'entiers strictement positifs (x, y) qui vérifient l'équation.

On inscrit ces résultats dans le tableau ci-dessous.

p	x	y	$\dfrac{16}{x}+\dfrac{25}{y}$
5	4	25	$\dfrac{16}{4}+\dfrac{25}{25}=4+1$
7	8	5	$\dfrac{16}{8}+\dfrac{25}{5}=2+5$
13	2	5	$\dfrac{16}{2}+\dfrac{25}{5}=8+5$
17	1	25	$\dfrac{16}{1}+\dfrac{25}{25}=16+1$
29	4	1	$\dfrac{16}{4}+\dfrac{25}{1}=4+25$
41	1	1	$\dfrac{16}{1}+\dfrac{25}{1}=16+25$

De notre liste précédente de valeurs possibles de p, il ne nous reste plus que 11, 19, 23, 31 et 37 à considérer.
Puisque x et y sont des entiers strictement positifs, on obtient les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{16}{x}+\frac{25}{y} &= p \\
\frac{16}{x}(xy)+\frac{25}{y}(xy) &= p(xy) \qquad (\text{car } xy \neq 0) \\
16y+25x &= pxy \\
pxy-25x &= 16y \\
x(py-25) &= 16y \\
x &= \frac{16y}{py-25} \qquad (p \geq 11 \text{ et donc aucun multiple de } p \text{ ne peut égaler } 25)
\end{aligned}$$

Puisque $x>0$, $16y>0$ et $x=\dfrac{16y}{py-25}$, alors $py-25>0$, d'où $py>25$.
De plus, x est un entier, donc $x \geq 1$, d'où $\dfrac{16y}{py-25} \geq 1$.
On simplifie pour obtenir $16y \geq py-25$ ou $py-16y \leq 25$, d'où $y \leq \dfrac{25}{p-16}$ lorsque $p>16$.
À l'aide de cette inéquation, on peut déterminer les restrictions sur y avec chacune des valeurs possibles restantes de p qui sont supérieures à 16, soit $37, 31, 23$ et 19.
Par exemple, si $p=37$, alors $y \leq \dfrac{25}{37-16}$ ou $y \leq \dfrac{25}{21}$, alors $y=1$. Or, lorsque $p=37$ et $y=1$, on obtient $x=\dfrac{16(1)}{37(1)-25}=\dfrac{16}{12}$, ce qui n'est pas un entier. Donc, $p \neq 37$.

On inscrit nos résultats pour $p = 31, 23, 19$ dans le tableau ci-dessous. Remarquons que lorsque $y = 1$ et $p = 23$ ou $p = 19$, alors on a $py < 25$ (on a montré précédemment que $py > 25$). On n'a donc pas besoin de considérer ces deux cas.

p	$y \leq \frac{25}{p-16}$	Valeurs entières possibles de y	Valeurs correspondantes de $x = \frac{16y}{py-25}$
31	$y \leq \frac{25}{31-16} = \frac{25}{15}$	$y = 1$	$x = \frac{16}{6}$
23	$y \leq \frac{25}{23-16} = \frac{25}{7}$	$y = 2,3$	$x = \frac{32}{21}, \frac{48}{44}$
19	$y \leq \frac{25}{19-16} = \frac{25}{3}$	$y = 2,3,4,5,6,7,8$	$x = \frac{32}{13}, \frac{48}{32}, \frac{64}{51}, \frac{80}{70}, \frac{96}{89}, \frac{112}{108}, \frac{128}{127}$

Puisqu'il n'y a pas de valeurs entières de x, alors $p \neq 19,23,31,37$.
La dernière valeur à vérifier est $p = 11$.
Comme on l'a remarqué précédemment, $py > 25$, donc lorsque $p = 11$, on obtient $y > \frac{25}{11}$ ou $y \geq 3$ (puisque y est entier). En essayant $y = 3$, on obtient $x = \dfrac{16(3)}{11(3) - 25} = \dfrac{48}{8} = 6$.
Donc, lorsque $p = 11$, $(x, y) = (6,3)$ est un couple d'entiers strictement positifs qui vérifient l'équation.
Donc, les valeurs de p pour lesquelles il y a au moins un couple d'entiers strictement positifs (x, y) qui vérifient l'équation sont $5, 7, 11, 13, 17, 29$ et 41.