Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fryer

(9^e année – Sec. III)

Avril 2021
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

Avril 2021
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

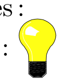
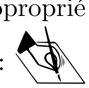
Durée : 75 minutes

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 4 **Chaque question vaut 10 points.**

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci : 
   - Chacune vaut 2 ou 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci : 
   - Elles valent le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, et leur niveau scolaire, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

NOTE :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
7. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Fryer, Galois ou Hypatie.

1. Une entreprise vend des cartes d'affaires rectangulaires. Chaque carte mesure 5 cm $\times$ 9 cm. Les cartes sont imprimées sur une page, puis la page est coupée pour produire les cartes individuelles.

   (a) Quelle est l'aire de chaque carte d'affaires en cm^2 ?

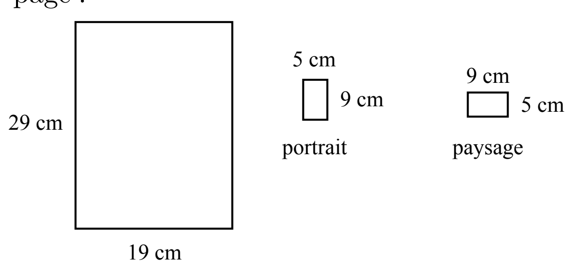
   (b) On imprime plusieurs cartes d'affaires, sans chevauchement, sur une seule page mesurant 20 cm $\times$ 27 cm. Si la page entière est utilisée sans qu'il n'y ait de gaspillage, combien de cartes d'affaires sont imprimées ?

   (c) On imprime plusieurs cartes d'affaires sur des pages mesurant 19 cm $\times$ 29 cm de l'une des deux manières suivantes :

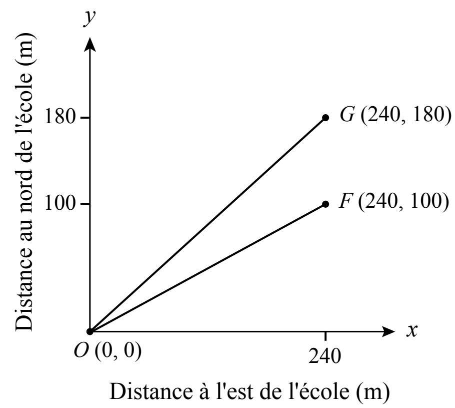
   – Les cartes sur les pages sont en orientation *portrait* de manière que les bords de 5 cm de chaque carte soient parallèles aux bords de 19 cm des pages.

   – Les cartes sur les pages sont en orientation *paysage* de manière que les bords de 5 cm de chaque carte soient parallèles aux bords de 29 cm des pages.

   Laquelle de ces deux manières nous permet d'imprimer le plus grand nombre de cartes d'affaires par page ?



2. Chaque jour, François et Georgette rentrent de l'école en marchant. L'école est située à $O(0,0)$. La maison de François est située à $F(240,100)$ tandis que celle de Georgette est située à $G(240,180)$. On voit les chemins rectilignes allant de leur école à chacune de leurs maisons dans le graphique ci-contre. (Toutes coordonnées présentées dans ce problème représentent des longueurs en mètres.)



(a) Quelle est la distance, en mètres, du chemin rectiligne reliant l'école à la maison de François ?

(b) Lundi, François marche à une vitesse constante de 80 m/min. Combien de minutes lui faut-il pour rentrer de l'école en marchant le long du chemin rectiligne ?

(c) Mardi, François et Georgette quittent l'école en même temps. François marche à 80 m/min le long du chemin rectiligne reliant l'école à sa maison puis, une fois arrivé chez lui, se retourne et se dirige tout droit vers la maison de Georgette. Georgette marche à g m/min le long du chemin rectiligne reliant l'école à sa maison puis, une fois arrivée chez elle, se retourne et se dirige tout droit vers la maison de François. S'ils se rencontrent à mi-chemin entre leurs maisons, quelle est la valeur de g ?

3. On considère une liste de six nombres. Une *Opération de Renversement*, R_n, renverse l'ordre des n premiers nombres de la liste, n étant un entier qui vérifie $2 \leq n \leq 6$. Par exemple, une Opération de Renversement R_4 de la liste $1,4,6,2,3,5$ produit la liste $2,6,4,1,3,5$.

(a) La liste $5,2,3,1,4,6$ subit l'opération R_3. Quelle est la nouvelle liste ?

(b) La liste $1,2,3,4,5,6$ subit une Opération de Renversement. La liste résultante subit une seconde Opération de Renversement qui produit la liste finale $3,4,2,1,5,6$. Quelles deux Opérations de Renversement a subi la liste initiale et dans quel ordre ces opérations ont-elles été exécutées ?

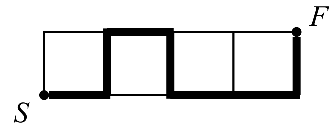
(c) Soit m le nombre minimal d'Opérations de Renversement que doit subir la liste $1,2,3,4,5,6$ en ordre pour que 3 se retrouve à la dernière position (c'est-à-dire que la liste prenne la forme suivante : $\square,\square,\square,\square,\square,3$). On peut déterminer la valeur de m en répondant à (i) et à (ii) ci-dessous.

(i) Trouver m Opérations de Renversement qui, lorsque exécutées, produisent le résultat souhaité (que 3 se retrouve à la dernière position).

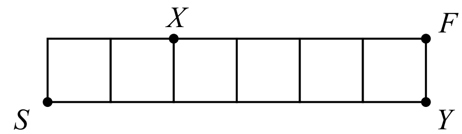
(ii) Expliquer pourquoi l'exécution de moins de m Opérations de Renversement ne peut produire le résultat souhaité.

(d) Déterminer le nombre minimal d'Opérations de Renversement que doit subir la liste $1,2,3,4,5,6$ en ordre pour que le dernier nombre de la liste soit 4 et que l'avant-dernier nombre de la liste soit 5 (c'est-à-dire que la liste prenne la forme suivante : $\square,\square,\square,\square,5,4$).

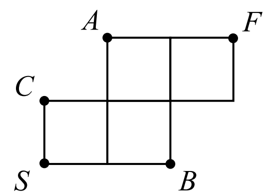
4. Un *chemin SF* commence à S, suit les arêtes des carrés, ne passe jamais par un sommet plus d'une seule fois et se termine à F. Un exemple d'un chemin SF est présenté dans la figure ci-contre. (Un sommet est un point où se rencontrent deux ou plusieurs arêtes des carrés.)



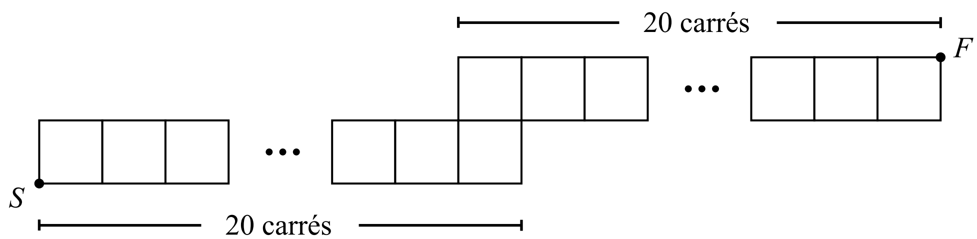
(a) Dans votre cahier-réponses, dessiner le chemin SF qui passe par chaque sommet *à l'exception* des sommets X et Y.



(b) Dans la figure ci-contre, expliquer pourquoi aucun chemin SF ne peut passer par les trois sommets A, B et C.



(c) Déterminer le nombre de chemins SF dans la figure ci-dessous.



Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Merci d'avoir participé au concours Fryer de 2021 ! Chaque année, plus de 260 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire ou au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2021.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca`