Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat 2021

(11e année – Secondaire V)

le mardi 23 février 2021

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 24 février 2021

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. Un rectangle ayant une largeur de 2 cm et une longueur de 3 cm a une aire de 2 cm$\times$3 cm $=$ 6 cm^2.

Réponse : (E)

2. On a $2 + 3 \times 5 + 2 = 2 + 15 + 2 = 19$.

Réponse : (A)

3. Exprimé sous forme de fraction, 25 % est équivalent à $\frac{1}{4}$.
Puisque $\frac{1}{4}$ de 60 est égal à 15, alors 25 % de 60 est égal à 15.

Réponse : (B)

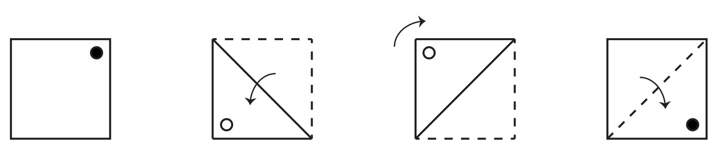
4. Lorsque $x \neq 0$, on obtient $\dfrac{4x}{x+2x} = \dfrac{4x}{3x} = \dfrac{4}{3}$.
Donc, lorsque $x = 2021$, on a $\dfrac{4x}{x+2x} = \dfrac{4}{3}$.
Par ailleurs, on pourrait poser $x = 2021$ pour obtenir $\dfrac{4x}{x+2x} = \dfrac{8084}{2021+4042} = \dfrac{8084}{6063} = \dfrac{4}{3}$.

Réponse : (B)

5. Remarquons que $6 = 2 \times 3$, que $27 = 3 \times 9$, que $39 = 3 \times 13$ et que $77 = 7 \times 11$. Donc, 6, 27, 39 et 77 peuvent chacun être exprimés sous la forme d'un produit de deux entiers (ces derniers étant chacun supérieur à 1).
Donc, 53 est l'entier qui ne peut pas être exprimé comme produit de deux entiers, chacun étant supérieur à 1. On peut vérifier que 53 est bien un nombre premier.

Réponse : (C)

6. On dessine un point non ombré pour représenter l'emplacement du point lorsqu'il se trouve de l'autre côté de la feuille de papier. Donc, le point se déplace comme suit :



Remarquons que le fait de plier et de déplier le papier n'a aucun effet net sur la figure. Donc, on peut tout simplement déterminer la figure résultante en faisant subir au carré initial une rotation autour de son centre de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre.

Réponse : (E)

7. Lorsque $x = -2$, on a $x^2 = 4$. Dans ce cas, $x < x^2$.
Lorsque $x = -\frac{1}{2}$, on a $x^2 = \frac{1}{4}$. Dans ce cas, $x < x^2$.
Lorsque $x = 0$, on a $x^2 = 0$. Dans ce cas, $x = x^2$.
Lorsque $x = \frac{1}{2}$, on a $x^2 = \frac{1}{4}$. Dans ce cas, $x > x^2$.
Lorsque $x = 2$, on a $x^2 = 4$. Dans ce cas, $x < x^2$.
Donc, $x = \frac{1}{2}$ est le seul choix vérifiant $x > x^2$.

Réponse : (D)

8. Supposons que a est le chiffre des dizaines de l'entier initial et que b est le chiffre des unités de l'entier initial.
Cet entier est égal à $10a + b$.
Lorsqu'on renverse l'ordre des chiffres, le nouvel entier a b pour chiffre des dizaines et a pour chiffre des unités.
Ce nouvel entier est égal à $10b + a$.
Sachant qu'on obtient 54 lorsqu'on soustrait l'entier initial du nouvel entier de deux chiffres, alors $(10b + a) - (10a + b) = 54$, d'où $9b - 9a = 54$ ou $b - a = 6$.
Donc, la différence positive entre les deux chiffres de l'entier initial est 6. Un exemple d'un tel couple d'entiers sont les entiers 71 et 17.

Réponse : (C)

9. La droite d'équation $y = 2x - 6$ a une pente de 2. Lorsque cette droite subit une translation, la pente demeure inchangée.
La droite d'équation $y = 2x - 6$ a une ordonnée à l'origine de -6. Lorsque cette droite subit une translation de 4 unités vers le haut, son ordonnée à l'origine subit cette translation, d'où l'image a donc une ordonnée à l'origine de -2.
Donc, l'équation de la nouvelle droite est $y = 2x - 2$.
Pour déterminer l'abscisse à l'origine de cette droite, on pose $y = 0$ pour obtenir $0 = 2x - 2$ ou $2x = 2$, soit $x = 1$.
Donc, la nouvelle droite a une abscisse à l'origine de 1.

Réponse : (D)

10. D'après les lois des exposants, on a $3^{x+2} = 3^x \cdot 3^2 = 3^x \cdot 9$.
Puisque $3^x = 5$, alors $3^{x+2} = 3^x \cdot 9 = 5 \cdot 9 = 45$.

Réponse : (E)

11. Étant donné que le deuxième nombre que l'on additionne est supérieur à 300 et que la somme a R pour chiffre des centaines, alors R ne peut être égal à 0.
Dans la colonne des unités, on voit que $R + R$ a 0 pour chiffre des unités. Puisque $R \neq 0$, alors $R = 5$.
L'addition devient donc :

$$\begin{array}{cccc} & & {}^{1} & \\ & P & 7 & 5 \\ + & 3 & 9 & 5 \\ \hline & 5 & Q & 0 \end{array}$$

Puisque $1+7+9 = 17$, alors $Q = 7$, d'où on a donc $1+P+3 = 5$, soit $P = 1$. L'addition devient donc :

$$\begin{array}{cccc} & {}^{1} & {}^{1} & \\ & 1 & 7 & 5 \\ + & 3 & 9 & 5 \\ \hline & 5 & 7 & 0 \end{array}$$

On a donc $P + Q + R = 1 + 7 + 5 = 13$.

Réponse : (A)

12. Un carré parfait est divisible par 9 uniquement lorsque sa racine carrée est divisible par 3.
Autrement dit, n^2 est divisible par 9 uniquement lorsque n est divisible par 3.
Il y a 6 multiples de 3 dans la liste $1, 2, 3, \ldots, 19, 20$.
Donc, il y a 6 multiples de 9 dans la liste $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 19^2, 20^2$.

Réponse : (E)

13. Dans un triangle rectangle isocèle, le rapport entre la longueur de l'hypoténuse et la longueur de chacun des côtés les plus courts est de $\sqrt{2} : 1$.
Considérons le triangle WZX. Ce dernier est isocèle et rectangle en Z.
Dans ce cas, $WX : WZ = \sqrt{2} : 1$. Puisque $WX = 6\sqrt{2}$, alors $WZ = \dfrac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 6$.
Puisque le triangle WZX est isocèle, alors $XZ = WZ = 6$.
Considérons le triangle XYZ. Ce dernier est isocèle et rectangle en Y.
Dans ce cas, $YZ = \dfrac{XZ}{\sqrt{2}} = \dfrac{6}{\sqrt{2}} = \dfrac{6}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$.
Puisque le triangle XYZ est isocèle, alors $XY = YZ = 3\sqrt{2}$.
Donc, $WXYZ$ a un périmètre de

$$WX + XY + YZ + WZ = 6\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 6 = 12\sqrt{2} + 6 \approx 22.97$$

Parmi les choix de réponse, 23 est le choix le plus près.

Réponse : (C)

'

14. Soit r km/h la vitesse de Natasha en courant.
Puisque Natasha avance 3 fois plus vite en vélo qu'en courant, alors sa vitesse à vélo est égale à $3r$ km/h.
En courant pendant une heure, Natasha parcourt $(1 \text{ h}) \cdot (r \text{ km/h}) = r$ km.
En faisant du vélo pendant quatre heures, Natasha parcourt $(4 \text{ h}) \cdot (3r \text{ km/h}) = 12r$ km.
Donc, le rapport entre la distance parcourue à vélo et celle parcourue en courant est équivalent au rapport $12r$ km : r km, ce qui est équivalent à $12 : 1$.

Réponse : (A)

15. *Solution 1*
Puisque a est un entier strictement positif, alors $45a$ est un entier strictement positif.
Puisque b est un entier strictement positif, alors $45a$ est inférieur à 2021.
Le plus grand multiple de 45 inférieur à 2021 est $45 \times 44 = 1980$. (Remarquons que $45 \cdot 45 = 2025$, ce qui est supérieur à 2021.)
Si $a = 44$, alors $b = 2021 - 45 \cdot 44 = 41$.
Dans ce cas, $a + b = 44 + 41 = 85$.
Si a est diminué de 1, la valeur de $45a + b$ est diminué de 45, d'où b doit donc être augmenté de 45 pour conserver la même valeur de $45a+b$, ce qui augmente la valeur de $a+b$ par $-1+45 = 44$.
Donc, si $a < 44$, la valeur de $a + b$ sera toujours supérieure à 85.
Si $a > 44$, alors $45a > 2021$, d'où la valeur de b est donc négative, ce qui est impossible.
Donc, 85 est la valeur minimale possible de $a + b$.

Solution 2
On peut écrire $45a + b = 2021$ sous la forme $44a + (a + b) = 2021$.
Puisque a et b sont des entiers strictement positifs, alors $44a$ et $a+b$ sont des entiers strictement positifs.
En particulier, on a donc que $44a$ (qui est un multiple de 44) est inférieur à 2021.
Puisque $44a$ et $a + b$ ont une somme constante, alors pour minimiser la valeur de $a + b$, on peut essayer de maximiser la valeur de $44a$.
Puisque $44 \cdot 45 = 1980$ et $44 \cdot 46 = 2024$, le plus grand multiple de 44 inférieur à 2021 est 1980.
On a donc $a + b \geq 2021 - 1980 = 41$.

Or, $a+b$ ne peut être égal à 41 car il faudrait que $44a = 1980$ ou $a = 45$ (ce qui fait de sorte que $b = -4$) afin que cela soit possible.
Le prochain multiple de 44 inférieur à 1980 est $44 \cdot 44 = 1936$.
Si $a = 44$, alors $a + b = 2021 - 44a = 85$.
Si $a = 44$ et $a + b = 85$, alors $b = 41$, ce qui est possible.
Puisque $a + b = 41$ est impossible et que 85 est la plus petite valeur suivante possible de $a + b$, alors 85 est la valeur minimale possible de $a + b$.

Réponse : (C)

16. Les quelques premières valeurs de $n!$ sont :

$$\begin{aligned} 1! &= 1 \\ 2! &= 2(1) = 2 \\ 3! &= 3(2)(1) = 6 \\ 4! &= 4(3)(2)(1) = 24 \\ 5! &= 5(4)(3)(2)(1) = 120 \end{aligned}$$

On remarque que

$$\begin{aligned} 2! - 1! &= 1 \\ 4! - 1! &= 23 \\ 3! - 1! &= 5 \\ 5! - 1! &= 119 \end{aligned}$$

Cela signifie que si a et b sont des entiers strictement positifs tels que $b > a$, alors 1, 3, 5 et 9 sont tous des chiffres des unités possibles de $b! - a!$.
Cela signifie que la seule réponse possible est le choix (D), soit 7.

Pour fin de précision, on doit expliquer pourquoi $b! - a!$ ne peut avoir 7 pour chiffre des unités.
Pour que $b! - a!$ soit impair, l'un de $b!$ et $a!$ est pair tandis que l'autre est impair.
Le seule factorielle impaire est $1!$, puisque tout autre factorielle a un facteur 2.
Puisque $b > a$, alors si l'un de a et b vaut 1, on doit avoir $a = 1$.
Pour que $b! - 1$ ait 7 pour chiffre des unités, $b!$ doit avoir 8 pour chiffre des unités.
Cela est impossible car les quelques premières factorielles sont présentées ci-dessus et tout factorielle supérieure a 0 pour chiffre des unités (car étant un multiple et de 2 et de 5).

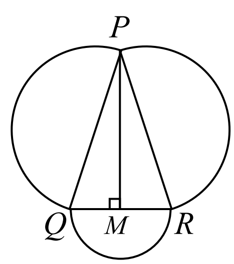
Réponse : (D)

17. Puisque les deux entiers les plus petits de l'ensemble S ont une moyenne de 5, leur somme est égale à $2 \cdot 5 = 10$.
Puisque les deux entiers les plus grands de l'ensemble S ont une moyenne de 22, leur somme est égale $2 \cdot 22 = 44$.
Soit $p < q < r < t < u$ les cinq autres entiers strictement positifs distincts de l'ensemble S.
Les neuf entiers de l'ensemble S ont donc une moyenne égale à $\dfrac{10 + 44 + p + q + r + t + u}{9}$ ou $6 + \dfrac{p + q + r + t + u}{9}$.
On veut que cette moyenne soit aussi grande que possible.
Pour que cette moyenne soit aussi grande que possible, $\dfrac{p + q + r + t + u}{9}$ doit être aussi grand que possible, d'où $p + q + r + t + u$ doit donc être aussi grand que possible.

Quelle est la valeur maximale possible de u ?
Soit x et y les deux entiers les plus grands de l'ensemble S tels que $x < y$. Puisque x et y sont les deux entiers les plus grands, alors $u < x < y$.
Puisque $x + y = 44$, que $x < y$ et que x et y sont des entiers, alors $x \leq 21$.
Pour que u soit aussi grand que possible (ce qui assurera que p, q, r et t soient aussi grands que possible), on pose $x = 21$.
Dans ce cas, on peut avoir $u = 20$.
Pour que p, q, r et t soient aussi grands que possible, on pose $p = 16$, $q = 17$, $r = 18$ et $t = 19$.
Dans ce cas, $p + q + r + t + u = 90$.
Si $x < 21$, alors $p + q + r + t + u$ sera plus petit et n'aura donc pas la valeur maximale possible.
Donc, $6 + \dfrac{90}{9} = 16$ est la plus grande moyenne possible de tous les entiers de l'ensemble S.

Réponse : (B)

18. Supposons que $PQ = PR = 2x$ et que $QR = 2y$.
Les demi-cercles de diamètres PQ et PR ont donc chacun un rayon de x tandis que le demi-cercle de diamètre QR a un rayon de y.
Chaque demi-cercle de rayon x a une aire égale à $\frac{1}{2}\pi x^2$ tandis que le demi-cercle de rayon y a une aire égale à $\frac{1}{2}\pi y^2$.
Puisque les aires des trois demi-cercles ont une somme égale à 5 fois l'aire du demi-cercle de diamètre QR, alors
$$\tfrac{1}{2}\pi x^2 + \tfrac{1}{2}\pi x^2 + \tfrac{1}{2}\pi y^2 = 5 \cdot \tfrac{1}{2}\pi y^2$$
On a donc $x^2 + x^2 + y^2 = 5y^2$, d'où $2x^2 = 4y^2$ ou $x^2 = 2y^2$, soit $x = \sqrt{2}y$.
Soit M le milieu de QR et joignons P à M.



Puisque le triangle PQR est isocèle et $PQ = PR$, alors PM et QR sont perpendiculaires.
Autrement dit, le triangle PMQ est rectangle en M.
Donc, $\cos(\angle PQR) = \cos(\angle PQM) = \dfrac{QM}{PQ} = \dfrac{\frac{1}{2}QR}{PQ} = \dfrac{y}{2x} = \dfrac{y}{2\sqrt{2}y} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{4 \cdot 2}} = \dfrac{1}{\sqrt{8}}$.

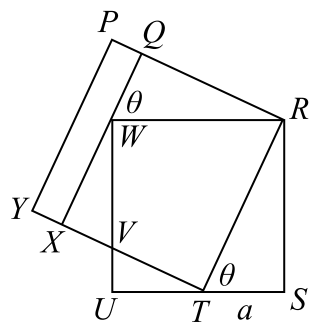
Réponse : (B)

19. Puisque $x + y = 7$, alors $x + y + z = 7 + z$.
Donc, l'équation $(x + y + z)^2 = 4$ devient $(7 + z)^2 = 4$.
Puisque le carré de $7 + z$ est égal à 4, alors $7 + z = 2$ ou $7 + z = -2$.
Si $7 + z = 2$, alors $z = -5$.
Dans ce cas, puisque $xz = -180$, alors on a $x = \dfrac{-180}{-5} = 36$, d'où $y = 7 - x = -29$.
Si $7 + z = -2$, alors $z = -9$.
Dans ce cas, puisque $xz = -180$, alors on a $x = \dfrac{-180}{-9} = 20$, d'où $y = 7 - x = -13$.
On peut confirmer par substitution que $(x, y, z) = (36, -29, -5)$ et $(x, y, z) = (20, -13, -9)$ vérifient bel et bien le système d'équations de l'énoncé.

Puisque S est la somme des valeurs possibles de y, alors $S = (-29) + (-13) = -42$, d'où $-S = 42$.

Réponse : (E)

20. Soit $ST = a$ et $\angle STR = \theta$.
Puisque le triangle RST est rectangle en S, alors $\angle TRS = 90° - \theta$.
Puisque $PRTY$ et $WRSU$ sont des carrés, alors $\angle PRT = \angle WRS = 90°$.
Donc, $\angle QRW + \angle WRT = \angle WRT + \angle TRS$, d'où $\angle QRW = \angle TRS = 90° - \theta$.
Puisque $PQXY$ est un rectangle, alors $\angle PQX = 90°$, d'où le triangle WQR est donc rectangle en Q.
On a donc $\angle QWR = 90° - \angle QRW = 90° - (90° - \theta) = \theta$.



On considère le triangle RST.
Puisque $ST = a$ et que $\angle STR = \theta$, alors $\cos\theta = \dfrac{a}{RT}$, d'où $RT = \dfrac{a}{\cos\theta}$.
De plus, $\tan\theta = \dfrac{RS}{a}$, d'où $RS = a\tan\theta$.
Puisque $PRTY$ est un carré, alors $PY = PR = RT = \dfrac{a}{\cos\theta}$.
Puisque $WRSU$ est un carré, alors $RW = RS = a\tan\theta$.
On considère ensuite le triangle QRW.
Puisque $RW = a\tan\theta$ et que $\angle QWR = \theta$, alors $\sin\theta = \dfrac{QR}{a\tan\theta}$, d'où $QR = a\tan\theta\sin\theta$.
On a donc

$$\begin{aligned}
PQ &= PR - QR \\
&= \frac{a}{\cos\theta} - a\tan\theta\sin\theta \\
&= \frac{a}{\cos\theta} - a\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\sin\theta \\
&= \frac{a}{\cos\theta} - \frac{a\sin^2\theta}{\cos\theta} \\
&= \frac{a(1-\sin^2\theta)}{\cos\theta} \\
&= \frac{a\cos^2\theta}{\cos\theta} \qquad (\text{car } \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1) \\
&= a\cos\theta \qquad (\text{car } \cos\theta \neq 0)
\end{aligned}$$

Puisque le rectangle $PQXY$ a une aire de 30, alors $PQ \cdot PY = 30$, d'où $a\cos\theta \cdot \dfrac{a}{\cos\theta} = 30$ ou $a^2 = 30$.
Puisque $a > 0$, alors on a $a = \sqrt{30} \approx 5{,}48$. Parmi les choix de réponse, 5,5 est le choix le plus près de $ST = a$.

Réponse : (C)

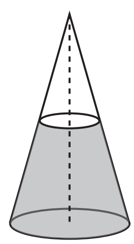
21. Puisque $f(2) = 5$ et que $f(mn) = f(m) + f(n)$, alors $f(4) = f(2 \cdot 2) = f(2) + f(2) = 10$.
Puisque $f(3) = 7$, alors $f(12) = f(4 \cdot 3) = f(4) + f(3) = 10 + 7 = 17$.

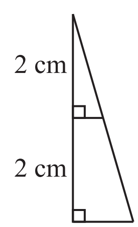
Bien que cela réponde à la question, existe-t-il réellement une fonction qui répond aux critères ? La réponse est oui.
Une fonction qui répond aux critères de l'énoncé est la fonction f définie par $f(1) = 0$ et $f(2^p 3^q r) = 5p + 7q$ pour tous les entiers non négatifs p et q et pour tous les entiers strictement positifs r qui ne sont pas divisibles par 2 ou par 3. Pouvez-vous voir pourquoi cette fonction répond aux critères ?

Réponse : (A)

22. L'aire totale du cône comprend l'aire de la base circulaire et l'aire de la surface latérale.
La base circulaire du cône non peint a une aire de $\pi r^2 = \pi(3 \text{ cm})^2 = 9\pi \text{ cm}^2$ tandis que sa surface latérale a une aire de $\pi rs = \pi(3 \text{ cm})(5 \text{ cm}) = 15\pi \text{ cm}^2$.
Donc, le cône non peint a une aire totale de $9\pi \text{ cm}^2 + 15\pi \text{ cm}^2 = 24\pi \text{ cm}^2$.
Puisque la hauteur et la base sont perpendiculaires, les longueurs s, h et r forment un triangle rectangle avec s pour hypoténuse.
Donc, d'après le théorème de Pythagore, $h^2 = s^2 - r^2 = (5 \text{ cm})^2 - (3 \text{ cm})^2 = 16 \text{ cm}^2$, d'où $h = 4$ cm.

Lorsqu'on place le cône non peint dans le seau de peinture de manière que la base circulaire du cône repose à plat sur le fond du seau, la profondeur de la peinture dans le seau est de 2 cm. Évidemment, la base circulaire (dont l'aire est de $9\pi \text{ cm}^2$) est donc recouverte de peinture.
De plus, la partie inférieure de la surface latérale du cône est également recouverte de peinture.





La partie non peinte du cône est elle-même un cône de hauteur 2.
Lorsque l'on effectue une coupe transversale verticale passant par l'apex du cône et par un diamètre de la base, le triangle formé au-dessus de la peinture est semblable au triangle initial et a la moitié de ses dimensions. Les triangles sont semblables car les deux sont rectangles et possèdent un sommet (le sommet supérieur) en commun. Le rapport est de 2 : 1 puisqu'ils ont 4 cm et 2 cm pour hauteurs.
Donc, le cône non peint est de rayon 1,5 cm (la moitié du rayon initial de 3 cm) et a une génératrice (apothème) de longueur 2,5 cm (la moitié de la longueur de la génératrice initiale, soit 5 cm).
Donc, la surface latérale non peinte est la surface latérale d'un cône de rayon 1,5 cm et dont la génératrice a une longueur de 2,5 cm ; l'aire de la surface latérale d'un tel cône est donc égale à $\pi(1{,}5 \text{ cm})(2{,}5 \text{ cm}) = 3{,}75\pi \text{ cm}^2$.
Cela signifie que la surface latérale qui est recouverte de peinture a une aire de $15\pi \text{ cm}^2 - 3{,}75\pi \text{ cm}^2 = 11{,}25\pi \text{ cm}^2$. (Cela représente en fait les trois quarts de l'aire totale. Pouvez-vous expliquer pourquoi cela est vrai d'une manière différente ?)
Donc, la fraction de la surface totale du cône qui est recouverte de peinture est égale à

$$\frac{9\pi \text{ cm}^2 + 11{,}25\pi \text{ cm}^2}{24\pi \text{ cm}^2} = \frac{20{,}25}{24} = \frac{81}{96} = \frac{27}{32}$$

Puisque la fraction $\frac{27}{32}$ est irréductible, alors $p+q = 27+32 = 59$.

RÉPONSE : (A)

23. Étant donné que chaque figure est formée en plaçant deux copies de la figure précédente côte à côte le long de la base, puis en ajoutant d'autres parties au-dessus, le nombre de points dans la base de chaque figure est deux fois plus grand que dans la figure précédente.
Puisque chaque figure est un triangle équilatéral, le nombre de points dans la figure est égal à la somme des entiers strictement positifs allant de 1 jusqu'au nombre de points dans la base inclusivement. Autrement dit, si la base d'une figure comprend b points, alors la figure comprend $1+2+3+\cdots+(b-1)+b$ points. Cette somme est égale à $\frac{1}{2}b(b+1)$. (Si cette formule pour la somme vous semble peu familière, pouvez-vous démontrer sa validité ?)
Puisque chaque figure est formée à l'aide de trois copies de la figure précédente et que tout espace vide résultant est rempli avec des points ombrés, alors le nombre de points non ombrés dans chaque figure est exactement trois fois le nombre de points non ombrés dans la figure précédente.
Puisque chaque point est soit ombré soit non ombré, le nombre de points ombrés est égal au nombre total de points moins le nombre de points non ombrés.
On peut donc construire le tableau suivant :

Figure	Points dans la base	Points dans la figure	Points non ombrés	Points ombrés
1	2	3	3	0
2	4	10	9	1
3	8	36	27	9
4	16	136	81	55
5	32	528	243	285
6	64	2080	729	1351
7	128	8256	2187	6069
8	256	32 896	6561	26 335
9	512	131 328	19 683	111 645

Donc, la plus petite valeur de n telle que la Figure n comprend au moins 100 000 points est $n = 9$.

Remarquons que puisque la Figure 1 a 2 points dans sa base et que le nombre de points dans la base de chaque figure subséquente est le double du nombre de points dans la figure précédente, alors la Figure n a 2^n points dans sa base.
Étant donné que la Figure 1 a 3 points non ombrés et que le nombre de points non ombrés dans chaque figure subséquente est trois fois le nombre de points non ombrés dans la figure précédente, alors la Figure n comprend 3^n points non ombrés.
Donc on peut développer une formule représentant le nombre de points non ombrés dans la Figure n ; soit la formule $\frac{1}{2}2^n(2^n+1)-3^n$ que l'on peut écrire sous la forme $2^{2n-1}+2^{n-1}-3^n$, ce qui correspond aux nombres dans le tableau ci-dessus.

RÉPONSE : (B)

24. Les courbes définies par les équations $y = ax^2+2bx-a$ et $y = x^2$ se coupent exactement lorsque l'équation

$$ax^2+2bx-a = x^2$$

admet au moins une solution réelle.
Cette équation admet au moins une solution réelle lorsque l'équation quadratique

$$(a-1)x^2+2bx-a = 0$$

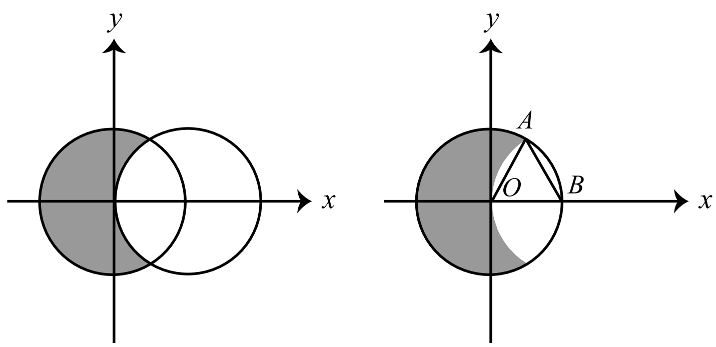
admet au moins une solution réelle.
(Remarquons que lorsque $a = 1$, cette équation est linéaire tant que $b \neq 0$ et admettra donc au moins une solution réelle.)
Cette équation quadratique admet au moins une solution réelle lorsque son discriminant est non négatif ; c'est-à-dire lorsque

$$(2b)^2 - 4(a-1)(-a) \geq 0$$

À l'aide de manipulations algébriques, on obtient les inéquations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} 4a^2 - 4a + 4b^2 &\geq 0 \\ a^2 - a + b^2 &\geq 0 \\ a^2 - a + \tfrac{1}{4} + b^2 &\geq \tfrac{1}{4} \\ a^2 - 2a(\tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2})^2 + b^2 &\geq \tfrac{1}{4} \\ (a - \tfrac{1}{2})^2 + b^2 &\geq (\tfrac{1}{2})^2 \end{aligned}$$

Donc, il faut déterminer la probabilité pour qu'un point (a, b) vérifie $(a - \frac{1}{2})^2 + b^2 \geq (\frac{1}{2})^2$ étant donné qu'il vérifie $a^2 + b^2 \leq (\frac{1}{2})^2$.
L'équation $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = (\frac{1}{2})^2$ représente un cercle de centre $(\frac{1}{2}, 0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.
L'inéquation $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \geq (\frac{1}{2})^2$ représente la région en dehors de ce cercle.
L'équation $x^2 + y^2 = (\frac{1}{2})^2$ représente un cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.
L'inéquation $x^2 + y^2 \leq (\frac{1}{2})^2$ représente la région à l'intérieur de ce cercle.
En reformulant le problème d'une manière géométrique équivalente, on veut déterminer la probabilité pour qu'un point (a, b) soit situé *à l'extérieur* du cercle de centre $(\frac{1}{2}, 0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ étant donné qu'il est situé *à l'intérieur* du cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.
Remarquons que que chacun de ces deux cercles passe par le centre de l'autre cercle.



En d'autres termes, on veut déterminer la fraction de l'aire du cercle ayant pour centre l'origine qui est en dehors du cercle ayant $(\frac{1}{2}, 0)$ pour centre. Cette région est ombrée dans la première figure ci-dessus.
Soit $r = \frac{1}{2}$.
Chaque cercle a une aire de πr^2.
Pour déterminer l'aire de la région ombrée, on soustrait l'aire de la région non ombrée de l'aire du cercle. Par symétrie, l'aire de la région non ombrée située en dessous de l'axe des abscisses est égale à l'aire de la région ombrée située au-dessus de l'axe des abscisses.
Dans la deuxième figure ci-dessus, l'origine est représentée par O, le point où le cercle de centre O coupe l'axe des abscisses est représenté par B tandis que le point où les deux cercles se coupent dans le premier quadrant est représenté par A. La région non ombrée située au-dessus de l'axe des abscisses est composée du triangle AOB et de deux régions curvilignes.
Puisque OA et OB sont des rayons du cercle de centre O, alors $OA = OB = r$.

Puisque AB est un rayon du cercle de centre B, alors $AB = r$.
Cela signifie que le triangle OAB est équilatéral et a donc trois angles dont chacun a une mesure de 60°.
Lorsqu'on combine le triangle OAB avec la région curviligne située au-dessus et à la droite du triangle OAB, on obtient un secteur du cercle de centre O et un angle au centre mesurant 60°. Puisque 60° est $\frac{1}{6}$ de 360°, ce secteur est $\frac{1}{6}$ du cercle entier et a donc une aire égale à $\frac{1}{6}\pi r^2$.
De même, lorsqu'on combine le triangle OAB avec la région curviligne située au-dessus et à la gauche du triangle OAB, on obtient un secteur du cercle de centre B et un angle au centre mesurant 60° ; l'aire de ce secteur est donc égale à $\frac{1}{6}\pi r^2$.
Si K est l'aire du triangle équilatéral OAB, chaque région curviligne a donc une aire égale à $\frac{1}{6}\pi r^2 - K$. On a donc que l'aire de la région non ombrée située au-dessus de l'axe des abscisses est égale à $2(\frac{1}{6}\pi r^2 - K) + K$, soit $\frac{1}{3}\pi r^2 - K$.
Donc, l'aire totale de la région non ombrée située à l'intérieur du cercle ayant une aire de πr^2 est égale à $\frac{2}{3}\pi r^2 - 2K$, d'où on a donc que l'aire de la région ombrée située à l'intérieur du cercle est égale à $\pi r^2 - (\frac{2}{3}\pi r^2 - 2K)$, soit $\frac{1}{3}\pi r^2 + 2K$.
Pour terminer, on doit utiliser l'aire d'un triangle équilatéral ayant des côtés de longueur r. Cette aire est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$. (Pour le voir, on peut diviser le triangle équilatéral en deux triangles remarquables 30°-60°-90° à l'aide d'un segment de droite. En utilisant le rapport entre les longueurs des côtés des triangles remarquables, on a que le segment de droite a une longueur égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}r$, d'où on a donc que le triangle équilatéral a une aire égale à $\frac{1}{2}r(\frac{\sqrt{3}}{2})$ ou $\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$.)
Donc, la fraction du cercle qui est ombrée est égale à

$$\frac{\frac{1}{3}\pi r^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}r^2}{\pi r^2} = \frac{\frac{1}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\pi} = \frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{6\pi} \approx 0{,}609$$

Donc, la probabilité, p, pour qu'un point (a, b) remplisse les conditions données est à peu près égale à 0,609. Donc, $100p \approx 60{,}9$.
Parmi les choix de réponse, 61 est le choix le plus près.

Réponse : (E)

25. Soit a, b et c des entiers strictement positifs tels que $abc = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 19^2$.
On détermine le nombre de triplets (a, b, c) ayant cette propriété. (Pour l'instant, on ignore la relation entre les grandeurs des entiers dans l'énoncé du problème.)
Puisque le produit abc a deux facteurs 2, alors a, b et c ont un total de deux facteurs 2.
Ceci peut se produire de 6 manières : a admet les deux facteurs, b admet les deux facteurs, c admet les deux facteurs, a admet l'un des facteurs tandis que b admet l'autre, a admet l'un des facteurs tandis que c admet l'autre ou b admet l'un des facteurs tandis que c admet l'autre.
De même, on peut distribuer chacun des autres carrés de facteurs premiers de 6 manières.
Puisque abc comprend exactement 8 carrés de facteurs premiers et que chacun peut être distribué de 6 manières, alors il y a 6^8 manières par lesquelles on peut construire des triplets (a, b, c) à l'aide des facteurs premiers. Donc, 6^8 triplets (a, b, c) ont le produit désiré.

On inclut ensuite la condition qu'aucun couple de a, b et c ne devrait être égal. (Remarquons que a, b et c ne peuvent pas tous être égaux car leur produit n'est pas un cube parfait.)
On compte le nombre de triplets ayant un couple égal et on soustrait ce nombre de 6^8.
On effectue cette étape en comptant le nombre de ces triplets ayant $a = b$. Par symétrie, le nombre de triplets ayant $a = c$ et $b = c$ sera égal à ce total.
Afin d'avoir $a = b$, $a \neq c$ et $b \neq c$, alors pour chacun des facteurs premiers au carré p^2 de abc, soit p^2 est distribué en tant que p et p dans chacun de a et b, soit p^2 est distribué à c.
Donc, on peut distribuer chacun des 8 facteurs premiers au carré p^2 de 2 manières, d'où on a

donc 2^8 triplets (a, b, c) tels que $a = b$, que $a \neq c$ et que $b \neq c$.
De même, il y a 2^8 triplets tels que $a = c$ et 2^8 triplets tels que $b = c$.
Donc, il y a $6^8 - 3 \cdot 2^8$ triplets (a, b, c) ayant le produit désiré et qui sont tels qu'aucun deux de a, b, c ne sont égaux.

Le problème initial voulait que l'on détermine le nombre de triplets (x, y, z) d'entiers strictement positifs tels que $abc = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 19^2$ et que $x < y < z$.
Pour convertir les triplets (a, b, c) n'ayant pas une ordre de taille aux triplets (x, y, z) ayant $x < y < z$, on divise par 6. (Chaque triplet (x, y, z) correspond à 6 triplets (a, b, c) d'entiers strictement positifs distincts sans ordre de taille.)
Donc, le nombre total de triplets (x, y, z) ayant les propriétés requises est égal à

$$N = \frac{1}{6}(6^8 - 3 \cdot 2^8) = 6^7 - 2^7 = 279\,808$$

Lorsqu'on divise N par 100, on obtient 8 comme reste.

Réponse : (C)