Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide 2021

le mercredi 7 avril 2021
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 8 avril 2021
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Puisque $(a-1)+(2a-3)=14$, alors $3a=18$, d'où $a=6$.

   (b) Puisque $(c^2-c)+(2c-3)=9$, alors $c^2+c-3=9$, d'où $c^2+c-12=0$.
   Sous forme factorisée, l'équation devient $(c+4)(c-3)=0$. Donc, $c=3$ ou $c=-4$.

   (c) *Solution 1*
   À l'aide de manipulations algébriques, on obtient les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2}+\frac{3}{2x^2} &= 10 \\ 2+3 &= 20x^2 \qquad \text{(on a multiplié chaque membre par } 2x^2\text{, étant donné que } x\neq 0) \\ 5 &= 20x^2 \\ x^2 &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

   donc, $x=\pm\dfrac{1}{2}$.

   Solution 2
   À l'aide de manipulations algébriques, on obtient les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2}+\frac{3}{2x^2} &= 10 \\ \frac{2}{2x^2}+\frac{3}{2x^2} &= 10 \\ \frac{5}{2x^2} &= 10 \\ 5 &= 20x^2 \qquad \text{(puisque } x\neq 0) \\ x^2 &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

   donc, $x=\pm\dfrac{1}{2}$.

2. (a) À l'aide d'une calculatrice, on a que

$$(10^3+1)^2 = 1001^2 = 1\,002\,001$$

   Les chiffres de cet entier ont une somme de $1+2+1$, soit 4.
   Pour déterminer cet entier sans l'aide d'une calculatrice, on pose $x=10^3$.
   Donc,

$$\begin{aligned} (10^3+1)^2 &= (x+1)^2 \\ &= x^2+2x+1 \\ &= (10^3)^2+2(10^3)+1 \\ &= 1\,002\,001 \end{aligned}$$

(b) Avant l'augmentation de prix, 2 petits biscuits et 1 grand biscuit auraient coûté en tout $2 \cdot 1{,}50\ \$ + 2{,}00\ \$ = 5{,}00\ \$$.
10 % de 1,50 \$ équivaut à $0{,}1 \cdot 1{,}50\ \$ = 0{,}15\ \$$. Après l'augmentation de prix, le coût d'un petit biscuit est de $1{,}50\ \$ + 0{,}15\ \$ = 1{,}65\ \$$.
5 % de 2,00 \$ équivaut à $0{,}05 \cdot 2{,}00\ \$ = 0{,}10\ \$$. Après l'augmentation de prix, le coût d'un grand biscuit est de $2{,}00\ \$ + 0{,}10\ \$ = 2{,}10\ \$$.
Après l'augmentation de prix, 2 petits biscuits et 1 grand biscuit ont un coût total de $2 \cdot 1{,}65\ \$ + 2{,}10\ \$ = 5{,}40\ \$$.
L'augmentation en pourcentage du coût total est donc de

$$\frac{5{,}40\ \$ - 5{,}00\ \$}{5{,}00\ \$} \times 100\ \% = \frac{40}{500} \times 100\ \% = 8\ \%$$

(c) Supposons que Rayna a x ans.
Puisque Qing est deux fois plus vieux que Rayna, alors Qing a $2x$ ans.
Puisque Qing a 4 ans de moins que Paolo, alors Paolo a $2x + 4$ ans.
Puisque les trois amis ont un âge moyen de 13 ans, on a donc

$$\frac{x + (2x) + (2x + 4)}{3} = 13$$

D'où l'on obtient $5x + 4 = 39$ ou $5x = 35$, soit $x = 7$.
Donc, Rayna a 7 ans, Qing a 14 ans et Paolo a 18 ans.
(On peut vérifier notre réponse : 7, 14 et 18 ont une moyenne de $\dfrac{7 + 14 + 18}{3} = \dfrac{39}{3} = 13$.)

3. (a) La longueur de PQ est égale à $\sqrt{(0 - 5)^2 + (12 - 0)^2} = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13$.
De même, on voit que $QR = RS = SP = 13$.
Donc, $PQRS$ a un périmètre de $4 \cdot 13 = 52$.
(On peut également voir que si O est situé à l'origine, alors les triangles POQ, POS, ROQ et ROS sont isométriques car $OQ = OS$ et $OP = OR$, d'où $PQ = QR = RS = SP$.)

(b) *Solution 1*
Supposons que B a pour coordonnées (r, s) et que C a pour coordonnées (t, u).
Puisque $M(3, 9)$ est le milieu de $A(0, 8)$ et $B(r, s)$, alors 0 et r ont une moyenne de 3 (d'où on a donc que $r = 6$) tandis que 8 et s ont une moyenne de 9 (d'où on a donc que $s = 10$).
Puisque $N(7, 6)$ est le milieu de $B(6, 10)$ et $C(t, u)$, alors 6 et t ont une moyenne de 7 (d'où on a donc que $t = 8$) tandis que 10 et u ont une moyenne de 6 (d'où on a donc que $u = 2$).
Le segment de droite délimité par les points $A(0, 8)$ et $C(8, 2)$ a donc une pente de $\dfrac{8 - 2}{0 - 8}$, soit $-\dfrac{3}{4}$.

Solution 2
Puisque M est le milieu de AB et que N est le milieu de BC, alors MN est parallèle à AC.
Donc, la pente de AC est égale à la pente du segment de droite délimité par les points $M(3, 9)$ et $N(7, 6)$, soit $\dfrac{9 - 6}{3 - 7}$ ou $-\dfrac{3}{4}$.

(c) Puisque $V(1,18)$ est situé sur la parabole, alors $18 = -2(1^2)+4(1)+c$, d'où $c = 18+2-4 = 16$.
Donc, la parabole a pour équation $y = -2x^2+4x+16$.
L'ordonnée à l'origine a pour abscisse $x = 0$, donc $y = 16$. Ainsi, D a pour coordonnées $(0,16)$.
Les abscisses à l'origine ont pour ordonnées $y = 0$. Donc,

$$\begin{aligned} -2x^2+4x+16 &= 0 \\ -2(x^2-2x-8) &= 0 \\ -2(x-4)(x+2) &= 0 \end{aligned}$$

d'où on a donc $x = 4$ et $x = -2$.
Cela signifie que E et F, dans un certain ordre, ont pour coordonnées $(4,0)$ et $(-2,0)$.
Donc, le triangle DEF a pour base EF (dont la longueur est de $4-(-2) = 6$) et a une hauteur de 16 (la distance verticale du point D à l'axe des abscisses).
Donc, le triangle DEF a une aire de $\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 16 = 48$.

4. (a) On développe l'équation comme suit :

$$\begin{aligned} 3(8^x)+5(8^x) &= 2^{61} \\ 8(8^x) &= 2^{61} \\ 8^{x+1} &= 2^{61} \\ (2^3)^{x+1} &= 2^{61} \\ 2^{3(x+1)} &= 2^{61} \end{aligned}$$

Donc, $3(x+1) = 61$, d'où $3x+3 = 61$ ou $3x = 58$, soit $x = \frac{58}{3}$.

(b) Puisque la liste $3n^2$, m^2, $2(n+1)^2$ est composée de trois entiers consécutifs écrits en ordre croissant, alors

$$\begin{aligned} 2(n+1)^2-3n^2 &= 2 \\ 2n^2+4n+2-3n^2 &= 2 \\ -n^2+4n &= 0 \\ -n(n-4) &= 0 \end{aligned}$$

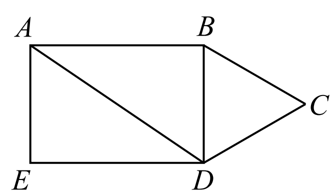
d'où on a donc $n = 0$ ou $n = 4$.
Si $n = 0$, la liste devient 0, m^2, 2. Cela signifie que $m^2 = 1$, soit $m = \pm 1$.
Si $n = 4$, on a $3n^2 = 3\cdot 16 = 48$ et $2(n+1)^2 = 2\cdot 25 = 50$. On a donc la liste 48, m^2, 50.
Cela signifie que $m^2 = 49$, soit $m = \pm 7$.
Donc, les valeurs possibles de m sont 1, -1, 7, -7.

5. (a) *Solution 1*
Supposons que S_0 a pour coordonnées (a,b).
Le point (a,b) passe à $(a,-b)$ dans l'étape 1.
Le point $(a,-b)$ passe à $(a,-b+2)$ dans l'étape 2.
Le point $(a,-b+2)$ passe à $(-a,-b+2)$ dans l'étape 3.
Donc, S_1 a pour coordonnées $(-a,-b+2)$.
Le point $(-a,-b+2)$ passe à $(-a,b-2)$ dans l'étape 1.
Le point $(-a,b-2)$ passe à $(-a,b)$ dans l'étape 2.

Le point $(-a, b)$ passe à (a, b) dans l'étape 3.
Donc, S_2 a les mêmes coordonnées que S_0, soit (a, b).
En poursuivant le processus, S_4 aura les mêmes coordonnées que S_2 (et aura donc les mêmes coordonnées que S_0). De même, S_6 aura les mêmes coordonnées que S_4, que S_2 et que S_0.
Puisque S_6 a pour coordonnées $(-7, -1)$, alors S_0 a également pour coordonnées $(-7, -1)$.

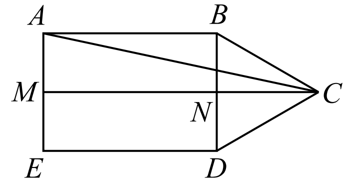
Solution 2
On procède à rebours à partir de $S_6(-7, -1)$.
Pour le faire, on annule chacune des étapes du processus $\mathcal{P}$ en les appliquant dans l'ordre inverse.
Puisque l'étape 3 fait subir à un point une réflexion par rapport à l'axe des ordonnées, l'étape inverse produit le même résultat.
Puisque l'étape 2 fait subir à un point une translation de 2 unités vers le haut, alors l'étape inverse fait subir à un point une translation de 2 unités vers le bas.
Puisque l'étape 1 fait subir à un point une réflexion par rapport à l'axe des abscisses, l'étape inverse produit le même résultat.
En appliquant ces étapes inverses à $S_6(-7, -1)$, on obtient $(7, -1)$, ensuite $(7, -3)$ et ensuite $(7, 3)$.
Donc, S_5 a pour coordonnées $(7, 3)$.
En appliquant ces étapes inverses à $S_5(7, 3)$, on obtient $(-7, 3)$, ensuite $(-7, 1)$ et ensuite $(-7, -1)$.
Donc, S_4 a pour coordonnées $(-7, -1)$; soit les mêmes coordonnées que S_6.
Si on applique ces étapes deux fois de plus, on verra que S_2 est le même point que S_4.
Si on applique ces étapes encore deux fois, on verra que S_0 est le même point que S_2.
Donc, S_0 et S_6 ont les mêmes coordonnées, soit $(-7, -1)$.

(b) On détermine d'abord la longueur de AB en fonction de x.
Puisque $ABDE$ est un rectangle, alors $BD = AE = 2x$.
Puisque le triangle BCD est équilatéral, $\angle DBC = 60°$.
On joint A à D.



Puisque AD et BC sont parallèles, alors $\angle ADB = \angle DBC = 60°$.
Considérons le triangle ADB. Ce triangle est un triangle remarquable 30°-60°-90° puisque l'angle ABD est droit.
Étant donné que les longueurs des côtés d'un tel triangle sont dans un rapport de $1 : \sqrt{3} : 2$, alors $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{\sqrt{3}}{1}$, d'où $AB = \sqrt{3}BD = 2\sqrt{3}x$.
De plus, $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{2}{1}$, d'où $AD = 2BD = 4x$, ce qui est la réponse à (i).

On détermine ensuite $\dfrac{AC}{AD}$.
Supposons que M est le milieu de AE et que N est le milieu de BD.
Puisque $AE = BD = 2x$, alors $AM = ME = BN = ND = x$.
On joint M à N, N à C, et A à C.



Puisque $ABDE$ est un rectangle, alors MN est parallèle à AB. Donc MN est perpendiculaire à AE et à BD.
De plus, $MN = AB = 2\sqrt{3}x$.
Puisque le triangle BCD est équilatéral, sa médiane CN est perpendiculaire à BD.
Puisque MN et NC sont perpendiculaires à BD, alors MNC est en réalité un segment de droite, on a donc que $MC = MN + NC$.
Donc, le triangle BNC est également un triangle remarquable 30°-60°-90°.
Ainsi, $NC = \sqrt{3}BN = \sqrt{3}x$.
Donc, $MC = 2\sqrt{3}x + \sqrt{3}x = 3\sqrt{3}x$.

Finalement, le triangle AMC est rectangle en M, d'où

$$AC = \sqrt{AM^2 + MC^2} = \sqrt{x^2 + (3\sqrt{3}x)^2} = \sqrt{x^2 + 27x^2} = \sqrt{28x^2} = 2\sqrt{7}x$$

car $x > 0$.
Cela signifie que $\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{2\sqrt{7}x}{4x} = \dfrac{\sqrt{7}}{2} = \sqrt{\dfrac{7}{4}}$. Donc, les entiers $r = 7$ et $s = 4$ remplissent les conditions de (ii).

6. (a) *Solution 1*
Puisque la suite $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{n-2}, t_{n-1}, t_n$ est arithmétique, alors

$$t_1 + t_n = t_2 + t_{n-1} = t_3 + t_{n-2}$$

car si r est la raison, alors on a $t_2 = t_1 + r$ et $t_{n-1} = t_n - r$ ainsi que $t_3 = t_1 + 2r$ et $t_{n-2} = t_n - 2r$.
Puisque les n termes ont une somme de 1000, on obtient les équations suivantes à l'aide de la formule de la somme des termes d'une suite arithmétique :

$$\begin{aligned} \frac{n}{2}(t_1 + t_n) &= 1000 \\ n(t_1 + t_n) &= 2000 \\ n(t_3 + t_{n-2}) &= 2000 \\ n(5 + 95) &= 2000 \end{aligned}$$

Donc, $n = 20$.

Solution 2
Supposons que la suite arithmétique de n termes est de premier terme a et de raison r.
Alors $t_3 = a + 2r = 5$ et $t_{n-2} = a + (n-3)r = 95$.
Puisque les n termes ont une somme de 1000, alors

$$\frac{n}{2}(2a + (n-1)r) = 1000$$

En additionnant les équations $a+2r = 5$ et $a+(n-3)r = 95$, on obtient $2a+(n-1)r = 100$, ce que l'on reporte dans l'équation ci-dessus pour obtenir $\frac{n}{2}(100) = 1000$, d'où $n = 20$.

(b) Puisque les 4 premiers termes d'une suite géométrique de premier terme a et de raison r ont une somme de $6+6\sqrt{2}$, alors

$$a+ar+ar^2+ar^3=6+6\sqrt{2}$$

Puisque les 8 premiers termes d'une suite géométrique de premier terme a et de raison r ont une somme de $30+30\sqrt{2}$, alors

$$a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+ar^5+ar^6+ar^7=30+30\sqrt{2}$$

Puisque

$$\begin{aligned} a+ar+ar^2&+ar^3+ar^4+ar^5+ar^6+ar^7 \\ &=(a+ar+ar^2+ar^3)+r^4(a+ar+ar^2+ar^3) \\ &=(1+r^4)(a+ar+ar^2+ar^3) \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} 30+30\sqrt{2}&=(1+r^4)(6+6\sqrt{2}) \\ \frac{30+30\sqrt{2}}{6+6\sqrt{2}}&=1+r^4 \\ 5&=1+r^4 \\ r^4&=4 \\ r^2&=2 \qquad \text{(puisque } r^2>0\text{)} \\ r&=\pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

Si $r=\sqrt{2}$,

$$a+ar+ar^2+ar^3=a+\sqrt{2}a+a(\sqrt{2})^2+a(\sqrt{2})^3=a+\sqrt{2}a+2a+2\sqrt{2}a=a(3+3\sqrt{2})$$

Puisque $a+ar+ar^2+ar^3=6+6\sqrt{2}$, alors $a(3+3\sqrt{2})=6+6\sqrt{2}$, d'où $a=\dfrac{6+6\sqrt{2}}{3+3\sqrt{2}}=2$.

Si $r=-\sqrt{2}$,

$$a+ar+ar^2+ar^3=a-\sqrt{2}a+a(-\sqrt{2})^2+a(-\sqrt{2})^3=a-\sqrt{2}a+2a-2\sqrt{2}a=a(3-3\sqrt{2})$$

Puisque $a+ar+ar^2+ar^3=6+6\sqrt{2}$, alors $a(3-3\sqrt{2})=6+6\sqrt{2}$, d'où

$$a=\frac{6+6\sqrt{2}}{3-3\sqrt{2}}=\frac{2+2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\frac{(2+2\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}=\frac{2+2\sqrt{2}+2\sqrt{2}+4}{1-2}=-6-4\sqrt{2}$$

Donc, les valeurs possibles de a sont $a=2$ et $a=-6-4\sqrt{2}$.

Une autre façon d'arriver à l'équation $1+r^4=5$ consiste à utiliser la formule de la somme d'une suite géométrique à deux reprises pour obtenir

$$\frac{a(1-r^4)}{1-r}=6+6\sqrt{2} \qquad \frac{a(1-r^8)}{1-r}=30+30\sqrt{2}$$

en supposant que $r\neq 1$. (Pouvez-vous expliquer pourquoi $r\neq 1$ et $r^4\neq 1$ même si l'on ne savait pas que $r=\pm\sqrt{2}$?)

On divise la seconde équation par la première pour obtenir

$$\frac{a(1-r^8)}{1-r}\cdot\frac{1-r}{a(1-r^4)}=\frac{30+30\sqrt{2}}{6+6\sqrt{2}}$$

d'où on a donc
$$\frac{1-r^8}{1-r^4}=5$$
Puisque $1-r^8=(1+r^4)(1-r^4)$, alors $1+r^4=5$. On peut alors procéder de la même manière que ci-dessus.

7. (a) Victor arrête de retirer des boules lorsqu'il y a soit 2 boules vertes sur la table, soit 2 boules rouges sur la table.
Si les 2 premières boules que Victor retire sont de la même couleur, Victor arrêtera de retirer des boules.
Si les 2 premières boules que Victor retire sont de couleurs différentes, Victor retirera une troisième boule qui, forcément, sera de la même couleur que l'une des deux autres boules. À ce point-ci, Victor arrêtera de retirer des boules.
Donc, la probabilité qu'il arrête de retirer des boules lorsqu'il y a au moins 1 boule rouge et 1 boule verte sur la table est égale à la probabilité que les 2 premières boules qu'il retire soient de couleurs différentes.
De plus, la probabilité que les 2 premières boules qu'il retire soient de couleurs différentes est égale à 1 moins la probabilité que les 2 premières boules qu'il retire soient de la même couleur.
La probabilité que les deux premières boules que Victor retire soient toutes les deux vertes est égale à $\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}$ car il y a 7 boules dans le sac (dont 3 sont vertes) pour la première boule tandis qu'il y a 6 boules dans le sac (dont 2 sont vertes) pour la seconde boule.
La probabilité que les deux premières boules que Victor retire soient toutes les deux rouges est égale à $\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}$ car il y a 7 boules dans le sac (dont 4 sont rouges) pour la première boule tandis qu'il y a 6 boules dans le sac (dont 3 sont rouges) pour la seconde boule.
Donc, la probabilité que les deux premières boules que Victor retire soient de la même couleur est égale à
$$\tfrac{3}{7}\cdot\tfrac{2}{6}+\tfrac{4}{7}\cdot\tfrac{3}{6}=\tfrac{1}{7}+\tfrac{2}{7}=\tfrac{3}{7}$$
Donc, au moment où Victor arrête de retirer les boules, la probabilité qu'il y ait au moins 1 boule rouge et au moins 1 boule verte sur la table est égale à $1-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$.

(b) D'après la définition de f, les équations suivantes sont équivalentes :
$$\begin{aligned} f(a)&=0\\ 2a^2-3a+1&=0\\ (a-1)(2a-1)&=0 \end{aligned}$$
Donc, $f(a)=0$ uniquement lorsque $a=1$ ou $a=\frac{1}{2}$.
Donc, $f(g(\sin\theta))=0$ uniquement lorsque $g(\sin\theta)=1$ ou $g(\sin\theta)=\frac{1}{2}$.

D'après la définition de g,
- $g(b)=1$ uniquement lorsque $\log_{\frac{1}{2}} b=1$, d'où $b=\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2}$, et
- $g(b)=1/2$ uniquement lorsque $\log_{\frac{1}{2}} b=1/2$, d'où $b=\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Donc, $f(g(\sin\theta))=0$ uniquement lorsque $\sin\theta=\frac{1}{2}$ ou $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Puisque $0\le\theta\le 2\pi$, on a $\theta=\frac{1}{6}\pi,\frac{5}{6}\pi,\frac{1}{4}\pi,\frac{3}{4}\pi$ pour solutions.

8. (a) Supposons que les entiers dans la rangée supérieure sont a, b, c, d, e dans cet ordre.
On exprime chacun des entiers contenu dans les cases qui ne sont pas dans la rangée supérieure en fonction de ces variables. Rappelons que chaque case qui n'est pas dans la rangée supérieure contient le produit des entiers dans les deux cases qui lui sont reliées dans la rangée directement au-dessus. On a donc :

$$\begin{array}{ccccccccc} a & & b & & c & & d & & e \\ & ab & & bc & & cd & & de & \\ & & ab^2c & & bc^2d & & cd^2e & & \\ & & & ab^3c^3d & & bc^3d^3e & & & \\ & & & & ab^4c^6d^4e & & & & \end{array}$$

Donc, $ab^4c^6d^4e = 9\,953\,280\,000$.
On écrit ensuite la factorisation première de l'entier $9\,953\,280\,000$:

$$\begin{aligned} 9\,953\,280\,000 &= 10^4 \cdot 995\,328 \\ &= 2^4 \cdot 5^4 \cdot 2^3 \cdot 124\,416 \\ &= 2^7 \cdot 5^4 \cdot 2^3 \cdot 15\,552 \\ &= 2^{10} \cdot 5^4 \cdot 2^3 \cdot 1944 \\ &= 2^{13} \cdot 5^4 \cdot 2^3 \cdot 243 \\ &= 2^{16} \cdot 5^4 \cdot 3^5 \\ &= 2^{16} \cdot 3^5 \cdot 5^4 \end{aligned}$$

Donc, $ab^4c^6d^4e = 2^{16} \cdot 3^5 \cdot 5^4$.
Puisque le membre de droite n'est pas divisible par 7, alors aucun des entiers a, b, c, d, e ne peut être égal à 7.
Donc, a, b, c, d, e sont cinq entiers distincts que l'on choisit parmi $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$.
Parmi ces entiers, le seul qui est divisible par 5 est 5.
Puisque $2^{16} \cdot 3^5 \cdot 5^4$ comprend exactement quatre facteurs 5, alors soit $b = 5$ ou $d = 5$. Aucun autre placement du 5 ne peut donner exactement quatre facteurs 5.

<u>Cas 1 : $b = 5$</u>
Dans ce cas, $ac^6d^4e = 2^{16} \cdot 3^5$; a, c, d et e étant quatre entiers distincts choisis parmi $\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$.
Puisque ac^6d^4e comprend exactement cinq facteurs 3 et que les valeurs possibles de a, c, d et e qui sont divisibles par 3 sont 3 et 6, alors soit $d = 3$ et l'un de a et e est 6, soit $d = 6$ et l'un de a et e est 3. Aucun autre placement des multiples de 3 ne peut donner exactement cinq facteurs 3.

<u>Cas 1a : $b = 5$, $d = 3$, $a = 6$</u>
Dans ce cas, $a \cdot c^6 \cdot d^4 \cdot e = 6 \cdot c^6 \cdot 3^4 \cdot e = 2 \cdot 3^5 \cdot c^6 \cdot e$.
On a donc $c^6e = 2^{15}$; c et e étant des entiers distincts choisis parmi $\{1, 2, 4, 8\}$.
Si l'on essaie les quatre valeurs possibles de c, on voit que $c = 4$ et $e = 8$ est la seule solution pour ce cas. Donc, $(a, b, c, d, e) = (6, 5, 4, 3, 8)$.

<u>Cas 1b : $b = 5$, $d = 3$, $e = 6$</u> On obtient $(a, b, c, d, e) = (8, 5, 4, 3, 6)$.

<u>Cas 1c : $b = 5$, $d = 6$, $a = 3$</u>
Dans ce cas, $a \cdot c^6 \cdot d^4 \cdot e = 3 \cdot c^6 \cdot 6^4 \cdot e = 2^4 \cdot 3^5 \cdot c^6 \cdot e$.
On a donc $c^6e = 2^{12}$; c et e étant des entiers distincts choisis parmi $\{1, 2, 4, 8\}$.
Si l'on essaie les quatre valeurs possibles de c, on voit que $c = 4$ et $e = 1$ est la seule

solution pour ce cas. Donc, $(a, b, c, d, e) = (3, 5, 4, 6, 1)$.

Cas 1d : $b = 5$, $d = 6$, $e = 3$ On obtient $(a, b, c, d, e) = (1, 5, 4, 6, 3)$.

Cas 2 : $d = 5$: On obtient 4 quintuples (a,b, c, d, e) supplémentaires à l'aide d'une analyse semblable.

Donc, il existe 8 façons dont les nombres entiers peuvent être choisis et placés dans la rangée supérieure de manière à obtenir l'entier souhaité dans la case du bas.

(b) Soit $N = \dfrac{(1!)(2!)(3!)\cdots(398!)(399!)(400!)}{200!}$.

Pour chaque entier k de 1 à 200, on exprime $(2k)!$ sous la forme $2k \cdot (2k-1)!$.
Donc, $(2k-1)!(2k)! = (2k-1)! \cdot 2k \cdot (2k-1)! = 2k(2k-1!)^2$.
(En particulier, $(1!)(2!) = 2(1!)^2$, $(3!)(4!) = 4(3!)^2$ et ainsi de suite.)
Donc,

$$N = \frac{2(1!)^2 \cdot 4(3!)^2 \cdot \cdots \cdot 398(397!)^2 \cdot 400(399!)^2}{200!}$$

On peut réorganiser le numérateur de l'expression pour obtenir

$$N = \frac{(1!)^2(3!)^2\cdots(397!)^2(399!)^2 \cdot (2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 398 \cdot 400)}{200!}$$

On exprime donc $2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 398 \cdot 400$ sous la forme $(2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 2) \cdot \cdots \cdot (2 \cdot 199) \cdot (2 \cdot 200)$.
Puisqu'il y a 200 ensembles de parenthèses, on obtient

$$N = \frac{(1!)^2(3!)^2\cdots(397!)^2(399!)^2 \cdot 2^{200} \cdot (1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 199 \cdot 200)}{200!}$$

Puisque $1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 199 \cdot 200 = 200!$, alors on peut conclure que

$$N = 2^{200}(1!)^2(3!)^2\cdots(397!)^2(399!)^2$$

Donc,

$$\sqrt{N} = 2^{100}(1!)(3!)\cdots(397!)(399!)$$

ce qui est un produit d'entiers et est donc un entier lui-même.
Puisque $\sqrt{N}$ est un entier, N est un carré parfait, ce qu'il fallait démontrer.

9. (a) Lorsque $a = 5$ et $b = 4$, on obtient $a^2 + b^2 - ab = 5^2 + 4^2 - 5 \cdot 4 = 21$.
Donc, on veut trouver tous les couples d'entiers (K, L) tels que $K^2 + 3L^2 = 21$.
Si $L = 0$, alors $L^2 = 0$, d'où $K^2 = 21$ (ce qui n'admet pas de solutions entières).
Si $L = \pm 1$, alors $L^2 = 1$, d'où $K^2 = 18$ (ce qui n'admet pas de solutions entières).
Si $L = \pm 2$, alors $L^2 = 4$, d'où $K^2 = 9$ ou $K = \pm 3$.
Si $L = \pm 3$, alors $L^2 = 9$. Puisque $3L^2 = 27 > 21$, alors K n'a pas de solutions réelles.
De même, si $L^2 > 9$, alors K n'a pas de solutions réelles.
Donc, les solutions sont $(K, L) = (3, 2), (-3, 2), (3, -2), (-3, -2)$.

(b) Supposons que K et L sont des entiers.
Alors

$$\begin{aligned}
&(K+L)^2 + (K-L)^2 - (K+L)(K-L) \\
&\qquad = (K^2 + 2KL + L^2) + (K^2 - 2KL + L^2) - (K^2 - L^2) \\
&\qquad = K^2 + 3L^2
\end{aligned}$$

Donc, les entiers $a = K + L$ et $b = K - L$ vérifient l'équation $K^2 + 3L^2 = a^2 + b^2 - ab$. Donc, pour tous les entiers K et L, il y a au moins un couple d'entiers (a, b) qui vérifie l'équation.

Comment pourrait-on arriver à cela ? Une façon de le faire serait d'essayer de petites valeurs de K et L, de calculer $K^2 + 3L^2$ et d'utiliser ce résultat pour arriver à une déduction (que l'on peut justifier de manière algébrique comme ci-dessus). Voici quelques valeurs :

K	L	$K^2 + 3L^2 = a^2 + b^2 - ab$	a	b
1	1	4	2	0
2	1	7	3	1
3	1	12	4	2
1	2	13	3	-1
2	2	16	4	0
3	2	21	5	1

Les colonnes de a et b pourraient nous mener à déduire que $a = K + L$ et $b = K - L$, ce que l'on a déjà démontré ci-dessus.

(c) Supposons que a et b sont des entiers.
Si a est pair, alors $\dfrac{a}{2}$ est un entier et

$$\left(\frac{a}{2} - b\right)^2 + 3\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot b + b^2 + \frac{3a^2}{4} = a^2 + b^2 - ab$$

Donc, si $K = \dfrac{a}{2} - b$ et $L = \dfrac{a}{2}$, alors on a $K^2 + 3L^2 = a^2 + b^2 - ab$.
Si b est pair, alors $\dfrac{b}{2}$ est un entier. Donc, un argument algébrique semblable démontre que

$$\left(\frac{b}{2} - a\right)^2 + 3\left(\frac{b}{2}\right)^2 = a^2 + b^2 - ab$$

d'où on a donc que si $K = \dfrac{b}{2} - a$ et $L = \dfrac{b}{2}$, alors $K^2 + 3L^2 = a^2 + b^2 - ab$.
Si a et b sont tous deux impairs, alors $a + b$ et $a - b$ sont tous deux pairs, ce qui signifie que $\dfrac{a+b}{2}$ et $\dfrac{a-b}{2}$ sont tous deux des entiers. On a donc

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} + \frac{3a^2 - 6ab + 3b^2}{4} = \frac{4a^2 + 4b^2 - 4ab}{4} = a^2 + b^2 - ab$$

Donc, si $K = \dfrac{a+b}{2}$ et $L = \dfrac{a-b}{2}$, on a $K^2 + 3L^2 = a^2 + b^2 - ab$.
Donc, dans tous les cas, pour tous les entiers a et b, il y a au moins un couple d'entiers (K, L) tel que $K^2 + 3L^2 = a^2 + b^2 - ab$.

De la même manière que dans (b), on peut déduire des expressions possibles pour K et L

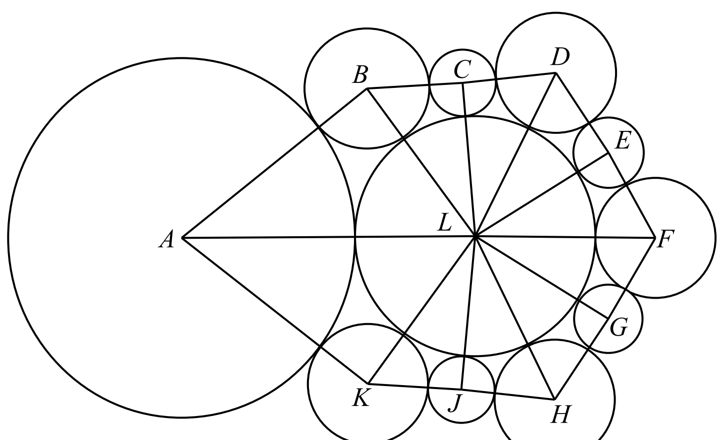
en fonction de a et b :

a	b	$K^2+3L^2=a^2+b^2-ab$	K	L
1	1	1	1	0
2	1	3	0	1
3	1	7	2	1
4	1	13	1	2
1	2	3	0	1
2	2	4	1	1
3	2	7	2	1
4	2	12	3	1
5	3	19	4	1

Bien qu'il ne semble pas y avoir de régularités utiles au départ, on peut réorganiser les rangées et ajouter des répétitions pour nous permettre de mieux voir une régularité :

a	b	$K^2+3L^2=a^2+b^2-ab$	K	L
2	1	3	0	1
4	1	13	1	2
2	2	4	1	1
4	2	12	3	1
1	2	3	0	1
3	2	7	2	1
4	2	12	3	1
1	1	1	1	0
3	1	7	2	1
5	3	19	4	1

10. (a) En commençant par le cercle Z et en suivant le sens des aiguilles d'une montre, on nomme les centres des cercles extérieurs comme suit : A, B, C, D, E, F, G, H, J et K. De plus, le centre du cercle Y est nommé L.



On joint L à chacun des points A, B, C, D, E, F, G, H, J et K. On joint A à B, B à C, C à D, D à E, E à F, F à G, G à H, H à J, J à K, et K à A.
Lorsque deux cercles sont tangents l'un à l'autre, la distance entre leurs centres est égale à la somme de leurs rayons.

Donc,

$$\begin{aligned} BC = CD = DE = EF = FG = GH = HJ = JK &= 2 + 1 = 3 \\ BL = DL = FL = HL = KL &= 2 + 4 = 6 \\ CL = EL = GL = JL &= 1 + 4 = 5 \\ AB = AK &= r + 2 \\ AL &= r + 4 \end{aligned}$$

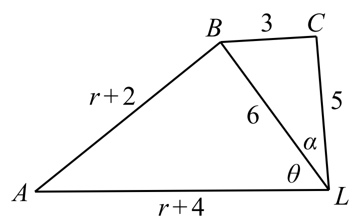
Donc, les triangles suivants sont isométriques puisque leurs côtés sont isométriques deux à deux :

$$BLC, DLC, DLE, FLE, FLG, HLG, HLJ, KLJ$$

De même, les triangles ALB et ALK sont isométriques puisque leurs côtés sont isométriques deux à deux.
Soit $\angle ALB = \theta$ et $\angle BLC = \alpha$.
Puisque les triangles sont isométriques, alors $\angle ALK = \theta$ et

$$\angle BLC = \angle DLC = \angle DLE = \angle FLE = \angle FLG = \angle HLG = \angle HLJ = \angle KLJ = \alpha$$

Puisque les angles autour du point L forment un angle plein, leurs mesures ont donc une somme de 360°, d'où $2\theta + 8\alpha = 360^\circ$ ou $\theta + 4\alpha = 180^\circ$, soit $\theta = 180^\circ - 4\alpha$.
Puisque $\theta = 180^\circ - 4\alpha$, alors $\cos\theta = \cos(180^\circ - 4\alpha) = -\cos 4\alpha$.
Considérons les triangles ALB et BLC.



D'après la loi du cosinus dans le triangle ALB, on a

$$\begin{aligned} AB^2 &= AL^2 + BL^2 - 2 \cdot AL \cdot BL \cdot \cos\theta \\ (r+2)^2 &= (r+4)^2 + 6^2 - 2(r+4)(6)\cos\theta \\ 12(r+4)\cos\theta &= r^2 + 8r + 16 + 36 - r^2 - 4r - 4 \\ \cos\theta &= \frac{4r+48}{12(r+4)} \\ \cos\theta &= \frac{r+12}{3r+12} \end{aligned}$$

D'après la loi du cosinus dans le triangle BLC, on a

$$\begin{aligned} BC^2 &= BL^2 + CL^2 - 2 \cdot BL \cdot CL \cdot \cos\alpha \\ 3^2 &= 6^2 + 5^2 - 2(6)(5)\cos\alpha \\ 60\cos\alpha &= 36 + 25 - 9 \\ \cos\alpha &= \frac{52}{60} \\ \cos\alpha &= \frac{13}{15} \end{aligned}$$

Puisque $\cos\alpha = \dfrac{13}{15}$, alors

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= 2\cos^2\alpha - 1\\ &= 2\cdot\frac{169}{225} - 1\\ &= \frac{338}{225} - \frac{225}{225}\\ &= \frac{113}{225}\end{aligned}$$

et

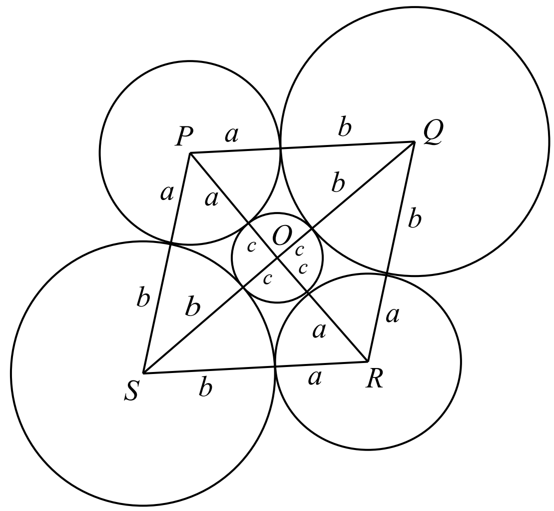
$$\begin{aligned}\cos 4\alpha &= 2\cos^2 2\alpha - 1\\ &= 2\cdot\frac{113^2}{225^2} - 1\\ &= \frac{25\,538}{50\,625} - \frac{50\,625}{50\,625}\\ &= -\frac{25\,087}{50\,625}\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}\cos\theta &= -\cos 4\alpha\\ \frac{r+12}{3r+12} &= \frac{25\,087}{50\,625}\\ \frac{r+12}{r+4} &= \frac{25\,087}{16\,875}\\ \frac{(r+4)+8}{r+4} &= \frac{25\,087}{16\,875}\\ 1+\frac{8}{r+4} &= \frac{25\,087}{16\,875}\\ \frac{8}{r+4} &= \frac{8212}{16\,875}\\ \frac{2}{r+4} &= \frac{2053}{16\,875}\\ \frac{r+4}{2} &= \frac{16\,875}{2053}\\ r+4 &= \frac{33\,750}{2053}\\ r &= \frac{25\,538}{2053}\end{aligned}$$

Donc, les entiers strictement positifs $s = 25\,538$ et $t = 2053$ remplissent les conditions de l'énoncé.

(b) Soit O le centre du cercle du milieu et soient P, Q, R et S les centres des autres cercles. On joint O à P, à Q, à R et à S. De plus, on joint P à Q, Q à R, R à S, et S à P.



D'après un argument semblable à celui dans la partie (a), on voit que

$$\begin{aligned} OP = OR &= a + c \\ OQ = OS &= b + c \\ PQ = QR = RS = SP &= a + b \end{aligned}$$

De même, les triangles OPQ, OPS, ORQ et ORS sont isométriques puisque leurs côtés sont isométriques deux à deux.
Cela signifie que $\angle POQ = \angle POS = \angle ROQ = \angle ROS$.
Puisque $\angle POQ + \angle POS + \angle ROQ + \angle ROS = 360^\circ$ (ces angles entourent le point O), alors

$$\angle POQ = \frac{1}{4} \cdot 360^\circ = 90^\circ$$

Donc, le triangle OPQ est rectangle en O.
D'après le théorème de Pythagore, $PQ^2 = OP^2 + OQ^2$. Donc, $(a+b)^2 = (a+c)^2 + (b+c)^2$.
À l'aide de manipulations algébriques, on obtient les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= (a+c)^2 + (b+c)^2 \\ a^2 + 2ab + b^2 &= a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bc + c^2 \\ 2ab &= 2ac + 2bc + 2c^2 \\ ab &= ac + bc + c^2 \\ ab - ac - bc &= c^2 \\ ab - ac - bc + c^2 &= 2c^2 \\ a(b-c) - c(b-c) &= 2c^2 \\ (a-c)(b-c) &= 2c^2 \end{aligned}$$

Donc, si a, b et c sont des nombres réels qui satisfont aux critères de l'énoncé du problème quant à la manière dont on peut dessiner la figure, alors a, b et c vérifient cette dernière équation.
De plus, si les nombres réels a, b et c vérifient la dernière équation, alors $(a+b)^2 = (a+c)^2 + (b+c)^2$ (car ces équations sont équivalentes). Donc, le triangle ayant pour longueurs de côtés $a+b$, $a+c$ et $b+c$ est donc rectangle et a pour hypoténuse

$a+b$ (car le théorème de Pythagore peut s'appliquer dans les deux sens). Cela signifie qu'on peut assembler quatre de ces triangles de manière à former un losange $PQRS$ ayant $a+b$ pour longueur de chaque côté et O pour centre ; ce qui signifie à son tour que les cinq cercles peuvent être dessinés en indiquant les longueurs appropriées a, b et c et en dessinant les cercles comme dans la figure initiale.
Autrement dit, la figure peut être dessinée uniquement lorsque $(a-c)(b-c)=2c^2$.

Supposons que c est un entier fixe et strictement positif.
Déterminer la valeur de $f(c)$ équivaut donc à compter le nombre de couples d'entiers strictement positifs (a,b) tels que $c<a<b$ et $(a-c)(b-c)=2c^2$.
Puisque a et b sont des entiers tels que $a>c$ et $b>c$, alors les entiers $a-c$ et $b-c$ sont positifs et forment un couple de diviseurs positifs de l'entier $2c^2$.
Puisque $a<b$, on a $a-c<b-c$. Donc, $a-c$ et $b-c$ sont des entiers distincts.
De plus, puisque $c>0$, alors $\sqrt{2c^2}=\sqrt{2}c$, ce qui n'est pas un entier puisque c est un entier. Cela signifie que $2c^2$ n'est pas un carré parfait.
Donc, chaque couple (a,b) correspond à un couple de diviseurs positifs de $2c^2$, à savoir $a-c$ et $b-c$.
De même, chaque couple de diviseurs e et f de $2c^2$ (où $e>f$) donne un couple d'entiers strictement positifs (a,b) où $a<b$ en posant $a=e+c$ et $b=f+c$.
Autrement dit, $f(c)$ est exactement le nombre de couples de diviseurs positifs de $2c^2$. (Rappelons à nouveau que $2c^2$ n'est pas un carré parfait.)
Donc, on veut déterminer tous les entiers strictement positifs c pour lesquels l'entier $2c^2$ a un nombre pair de couples de diviseurs. Cela signifie qu'on veut determiner tous les entiers strictement positifs c pour lesquels le nombre de diviseurs positifs de $2c^2$ est un multiple de 4 (car chaque couple de diviseurs positifs comprend deux diviseurs positifs et le produit de 2 et un entier pair est un multiple de 4).

Supposons que la factorisation première de c est

$$c=2^r p_1^{e_1} p_2^{e_2}\cdots p_k^{e_k}$$

k étant un entier quelconque tel que $k\geq 0$, r étant un entier quelconque tel que $r\geq 0$, p_1, p_2, …, p_k étant des nombres premiers impairs quelconques et e_1, e_2, …, e_k étant des entiers strictement positifs quelconques.
Alors

$$2c^2=2^{2r+1}p_1^{2e_1}p_2^{2e_2}\cdots p_k^{2e_k}$$

d'où $2c^2$ a donc

$$(2r+2)(2e_1+1)(2e_2+1)\cdots(2e_k+1)$$

diviseurs posifits.
Le premier facteur de ce produit est pair et chaque facteur après le premier est impair.
Donc, ce produit est un multiple de 4 exactement lorsque $2r+2$ est un multiple de 4.
Cela est vrai exactement quand $2r+2=4s$, s étant un entier strictement positif quelconque, d'où on a $2r=4s-2$ ou $r=2s-1$.
Autrement dit, le nombre de diviseurs positifs de $2c^2$ est un multiple de 4 exactement lorsque r est un entier impair.

Enfin, cela signifie que les entiers strictement positifs pour lesquels $f(c)$ est pair sont ceux qui ont exactement un nombre impair de facteurs 2 dans leur factorisation première.