Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide

le mercredi 7 avril 2021
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 8 avril 2021
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 2 heures et demie

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 10 **Chaque question vaut 10 points.**

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci :
   - Chacune vaut 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci :
   - Chacune vaut le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

NOTE :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.

Remarque au sujet de l'encodage par bulles

Prière de s'assurer d'avoir bien encodé son nom, sa date de naissance et son année scolaire sur la feuille de renseignements et d'avoir répondu à la question portant sur son admissibilité.

1. (a) Quelle est la valeur de a pour laquelle $(a-1)+(2a-3)=14$?

   (b) Quelles sont les deux valeurs de c pour lesquelles $(c^2-c)+(2c-3)=9$?

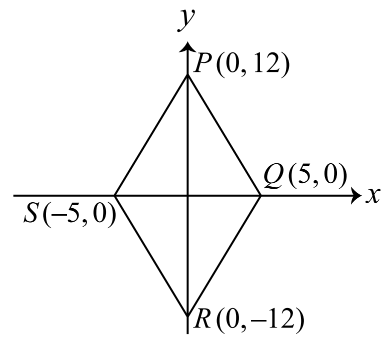
   (c) Déterminer toutes les valeurs de x pour lesquelles $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{2x^2}=10$.

2. (a) Quelle est la somme des chiffres de l'entier égal à $(10^3+1)^2$?

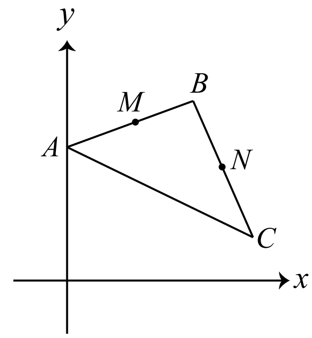
   (b) Une boulangerie vend des petits biscuits et des grands biscuits. Avant une augmentation de prix, le prix de chaque petit biscuit était de 1,50 \$ tandis que le prix de chaque grand biscuit était de 2,00 \$. La boulangerie augmente le prix de chaque petit biscuit de 10 % et celui de chaque grand biscuit de 5 %. Par quel pourcentage augmentera le coût total d'un achat de 2 petits biscuits et 1 grand biscuit ?

   (c) Qing est deux fois plus vieux que Rayna. Qing a 4 ans de moins que Paolo. L'âge moyen de Paolo, Qing et Rayna est de 13 ans. Déterminer leurs âges.

3. (a) Dans la figure ci-contre, $PQRS$ est un quadrilatère. Quel est le périmètre de $PQRS$?



(b) Dans la figure ci-contre, A a pour coordonnées $(0, 8)$. De plus, le milieu de AB est $M(3, 9)$ tandis que le milieu de BC est $N(7, 6)$. Quelle est la pente de AC ?



(c) La parabole d'équation $y = -2x^2 + 4x + c$ a pour sommet $S(1, 18)$. La parabole coupe l'axe des ordonnées en D et l'axe des abscisses en E et F. Déterminer l'aire du triangle DEF.

4. (a) Si $3(8^x) + 5(8^x) = 2^{61}$, quelle est la valeur du nombre réel x ?

(b) Pour certains nombres réels m et n, la liste $3n^2$, m^2, $2(n + 1)^2$ est composée de trois entiers consécutifs écrits en ordre croissant. Déterminer toutes les valeurs possibles de m.

5. (a) Charlotte considère le point $(3, 5)$ et applique le processus en trois étapes (que l'on appelle $\mathcal{P}$) suivant :

Étape 1 : Le point subit une réflexion par rapport à l'axe des abscisses.

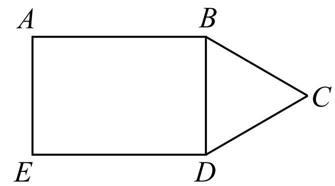
Étape 2 : Le point résultant subit une translation de 2 unités vers le haut.

Étape 3 : Le point résultant subit une réflexion par rapport à l'axe des ordonnées.

En appliquant ce processus, le point $(3, 5)$ passe à $(3, -5)$, puis à $(3, -3)$ et enfin à $(-3, -3)$.

Charlotte considère ensuite un autre point, soit le point S_0. Elle applique le processus en trois étapes $\mathcal{P}$ au point S_0 pour obtenir le point S_1. Elle applique ensuite le processus $\mathcal{P}$ au point S_1 pour obtenir le point S_2. Elle applique $\mathcal{P}$ quatre fois de plus, en utilisant chaque fois la sortie précédente de $\mathcal{P}$ comme nouvelle entrée, et obtient finalement le point $S_6(-7, -1)$. Quelles sont les coordonnées du point S_0 ?

(b) Dans la figure ci-contre, $ABDE$ est un rectangle, le triangle BCD est équilatéral et AD est parallèle à BC. De plus, $AE = 2x$, x étant un nombre réel quelconque.



(i) Déterminer la longueur de AB en fonction de x.

(ii) Déterminer des entiers strictement positifs r et s pour lesquels $\dfrac{AC}{AD} = \sqrt{\dfrac{r}{s}}$.

6. (a) Supposons que $n > 5$ et que les nombres $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{n-2}, t_{n-1}, t_n$ forment une suite arithmétique de n termes. Si $t_3 = 5$, $t_{n-2} = 95$ et que les n termes ont une somme de 1000, quelle est la valeur de n ?

(Une *suite arithmétique* est une suite dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en ajoutant au terme précédent une constante appelée *raison*. Par exemple, $3, 5, 7$ et 9 sont les quatre premiers termes d'une suite arithmétique.)

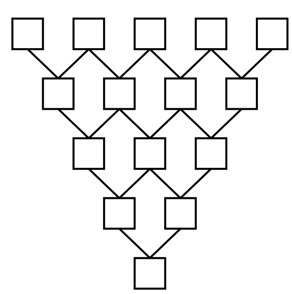
(b) On considère deux nombres réels a et r. Une suite géométrique de premier terme a et de raison r contient 4 termes. Les termes de cette suite géométrique ont une somme de $6 + 6\sqrt{2}$. Une seconde suite géométrique, également de premier terme a et de raison r, contient 8 termes. Les termes de cette seconde suite géométrique ont une somme de $30 + 30\sqrt{2}$. Déterminer toutes les valeurs possibles de a.

(Une *suite géométrique* est une suite dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en multipliant le terme précédent par une constante non nulle appelée *raison*. Par exemple, 3, -6, 12 et -24 sont les quatre premiers termes d'une suite géométrique.)

7. (a) Un sac ne contient que 3 boules vertes et 4 boules rouges. Victor retire les boules du sac au hasard, une à la fois, et les place sur une table. Chaque boule du sac a la même chance d'être choisie. Victor arrête de retirer les boules lorsqu'il y a deux boules de la même couleur sur la table. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 1 boule rouge et au moins 1 boule verte sur la table au moment où Victor arrête de retirer les boules ?

(b) Supposons que $f(a) = 2a^2 - 3a + 1$ pour tous les nombres réels a et que $g(b) = \log_{\frac{1}{2}} b$ avec $b > 0$. Déterminer toutes les valeurs de θ dans l'intervalle $0 \leq \theta \leq 2\pi$ qui vérifient $f(g(\sin\theta)) = 0$.

8. (a) Cinq entiers distincts doivent être choisis de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ et placés dans un certain ordre dans la rangée supérieure de cases de la figure ci-contre. Chaque case qui n'est pas dans la rangée supérieure contient le produit des nombres entiers dans les deux cases qui lui sont reliées dans la rangée directement au-dessus. Déterminer le nombre de façons dont les entiers peuvent être choisis et placés dans la rangée supérieure de manière que l'entier dans la case du bas soit 9 953 280 000.



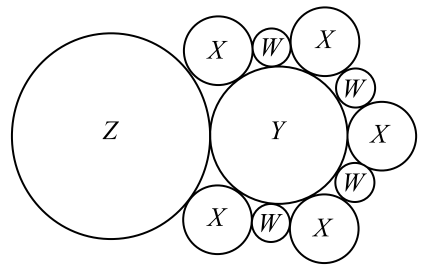
(b) Démontrer que l'entier $\dfrac{(1!)(2!)(3!)\cdots(398!)(399!)(400!)}{200!}$ est un carré parfait. (Dans cette fraction, le numérateur est le produit des factorielles des entiers de 1 à 400.)

9. (a) Soit $a = 5$ et $b = 4$. Déterminer tous les couples d'entiers (K, L) pour lesquels $K^2 + 3L^2 = a^2 + b^2 - ab$.

   (b) Pour tous les entiers K et L, démontrer qu'il existe au moins un couple d'entiers (a, b) tel que $K^2 + 3L^2 = a^2 + b^2 - ab$.

   (c) Pour tous les entiers a et b, démontrer qu'il existe au moins un couple d'entiers (K, L) tel que $K^2 + 3L^2 = a^2 + b^2 - ab$.

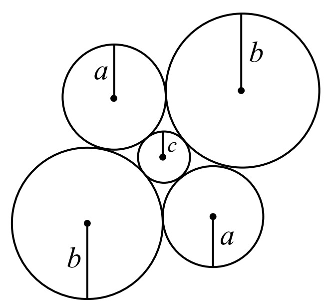
10. (a) La figure ci-contre contient onze cercles de quatre tailles différentes. Chaque cercle indiqué par la lettre W est de rayon 1, chaque cercle indiqué par la lettre X est de rayon 2, le cercle indiqué par la lettre Y est de rayon 4 et le cercle indiqué par la lettre Z est de rayon r. Chacun des cercles indiqué par la lettre W ou X est tangent à trois autres cercles. Le cercle Y est tangent aux dix autres cercles. Le cercle Z est tangent à trois autres cercles. Déterminer des entiers strictement positifs s et t pour lesquels $r = \dfrac{s}{t}$.



   (b) Soit c un entier strictement positif. Soit $f(c)$ le nombre de couples d'entiers strictement positifs (a, b) avec $c < a < b$ pour lesquels on peut dessiner deux cercles de rayon a, deux cercles de rayon b et un cercle de rayon c de manière que :

   - chaque cercle de rayon a soit tangent aux deux cercles de rayon b et au cercle de rayon c et
   - chaque cercle de rayon b soit tangent aux deux cercles de rayon a et au cercle de rayon c,

   comme dans la figure ci-contre. Déterminer tous les entiers strictement positifs c pour lesquels $f(c)$ est pair.



Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Euclide de 2021! Chaque année, plus de 260 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Si vous terminez l'école secondaire, nous vous souhaitons bon succès. Si vous retournez à l'école secondaire l'an prochain, encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2021.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
— des copies gratuites des concours précédents
— des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
— des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
— obtenir des renseignements au sujet des concours de 2021/2022
— jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne
— vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
— vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
— vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
— trouver les résultats de vos élèves dans les coucours