Le CENTRE d'ÉDUCATION

en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Cayley 2021

(10$^{\text{e}}$ année – Secondaire IV)

le mardi 23 février 2021

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 24 février 2021

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On a $\dfrac{2+4}{1+2} = \dfrac{6}{3} = 2$.

Réponse : (C)

2. Puisque $542 \times 3 = 1626$, le résultat doit avoir 6 pour chiffre des unités.
Remarquons que le chiffre des unités d'un produit ne dépend que des chiffres des unités des nombres multipliés. Ainsi, on pourrait tout simplement obtenir le chiffre des unités en multipliant 2×3.

Réponse : (E)

3. Les cases du haut, de la gauche et du bas contribuent chacune 3 côtés de longueur 1 au périmètre.
La case restante contribue 1 côté de longueur 1 au périmètre.
Donc, le périmètre est égal à $3 \times 3 + 1 \times 1 = 10$.
Par ailleurs, le périmètre comprend 3 côtés droits verticaux, 3 côtés gauches verticaux, 2 côtés supérieurs horizontaux et 2 côtés inférieurs horizontaux, d'où on a donc un périmètre de $3 + 3 + 2 + 2 = 10$.

Réponse : (A)

4. Si $3x + 4 = x + 2$, alors $3x - x = 2 - 4$, d'où $2x = -2$ ou $x = -1$.

Réponse : (D)

5. *Solution 1*
10 % de 500 est égal à $\frac{1}{10}$ ou 0,1 de 500, soit à 50.
100 % de 500 est égal à 500.
Donc, 110 % de 500 est égal à $500 + 50$, soit à 550.

Solution 2
110 % de 500 est égal à $\dfrac{110}{100} \times 500 = 110 \times 5 = 550$.

Réponse : (E)

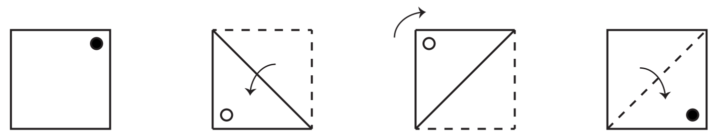
6. Puisque Eugène a nagé trois fois et qu'il a nagé pendant une durée moyenne de 34 minutes, il a nagé pendant $3 \times 34 = 102$ minutes en tout.
Puisqu'il a nagé pendant 30 minutes lundi et 45 minutes mardi, il a dû nager pendant $102 - 30 - 45 = 27$ minutes dimanche.

Réponse : (C)

7. Si $x = 1$, alors $x^2 = 1$ et $x^3 = 1$, donc $x^3 = x^2$.
Si $x > 1$, alors x^3 est égal à x fois x^2 ; puisque $x > 1$, alors x fois x^2 est supérieur à x^2, donc $x^3 > x^2$.
Donc, si x est positif et vérifie $x^3 < x^2$, alors on doit avoir $0 < x < 1$. On remarque que si $0 < x < 1$, alors x, x^2 et x^3 sont tous positifs et $x^3 = x^2 \times x < x^2 \times 1 = x^2$.
Parmi les choix de réponse, seul $x = \frac{3}{4}$ vérifie $0 < x < 1$. Donc, (B) est le bon choix de réponse.
Par ailleurs, on peut poser chacune des valeurs de x dans l'inéquation afin de vérifer qu'il s'agit de la seule bonne réponse.

Réponse : (B)

8. On dessine un point non ombré pour représenter l'emplacement du point lorsqu'il se trouve de l'autre côté de la feuille de papier. Donc, le point se déplace comme suit :

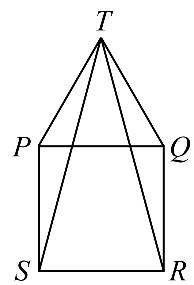


Réponse : (E)

9. Soit x l'âge actuel de Jeanne.
Il y a deux ans, Jeanne avait $x - 2$ ans.
Dans 12 ans, Jeanne aura $x + 12$ ans.
D'après l'énoncé, $x + 12 = 8(x - 2)$, d'où $x + 12 = 8x - 16$ ou $7x = 28$, soit $x = 4$.
On peut vérifier notre réponse : si Jeanne a 4 ans maintenant, donc elle avait 2 ans il y a 2 ans et elle aura 16 ans dans 12 ans ; puisque $16 = 2 \times 8$, on a donc la bonne réponse.

Réponse : (A)

10. On joint S et T ainsi que R et T.

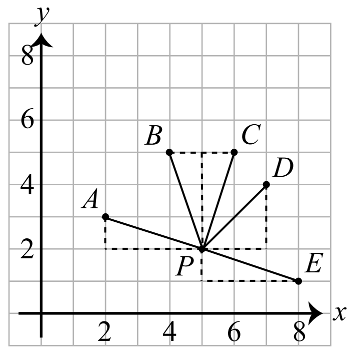


Puisque $PQRS$ est un carré, alors $\angle SPQ = 90°$.
Puisque le triangle PTQ est équilatéral, alors $\angle TPQ = 60°$.
Donc, $\angle SPT = \angle SPQ + \angle TPQ = 90° + 60°$.
Puisque $PQRS$ est un carré, alors $SP = PQ$.
Puisque le triangle PTQ est équilatéral, alors $TP = PQ$.
Puisque $SP = PQ$ et que $TP = PQ$, alors $SP = TP$, donc le triangle SPT est isocèle.
Donc, $\angle PTS = \frac{1}{2}(180° - \angle SPT) = \frac{1}{2}(180° - 150°) = 15°$.
De la même manière, on peut démontrer que $\angle QTR = 15°$.
Cela signifie que $\angle STR = \angle PTQ - \angle PTS - \angle QTR = 60° - 15° - 15° = 30°$.

Réponse : (D)

11. *Solution 1*

On peut atteindre chacun des points A, B, C et E à partir du point P en se déplaçant de 3 unités dans l'une des directions x ou y puis de 1 unité dans l'autre direction.
D'après le théorème de Pythagore, la distance de P à chacun de ces points est égale à $\sqrt{3^2+1^2}$ ou $\sqrt{10}$.



Donc, le point D est celui qui se trouve à une distance différente de P que les autres points.

Solution 2

Les 6 points ont pour coordonnées $A(2,3)$, $B(4,5)$, $C(6,5)$, $D(7,4)$, $E(8,1)$, $P(5,2)$.
Donc, les distances de P à chacun des cinq autres points sont :

$$\begin{aligned}
PA &= \sqrt{(5-2)^2+(2-3)^2} = \sqrt{3^2+(-1)^2} = \sqrt{10}\\
PB &= \sqrt{(5-4)^2+(2-5)^2} = \sqrt{1^2+(-3)^2} = \sqrt{10}\\
PC &= \sqrt{(5-6)^2+(2-5)^2} = \sqrt{(-1)^2+(-3)^2} = \sqrt{10}\\
PD &= \sqrt{(5-7)^2+(2-4)^2} = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{8}\\
PE &= \sqrt{(5-8)^2+(2-1)^2} = \sqrt{(-3)^2+1^2} = \sqrt{10}
\end{aligned}$$

On voit donc que le point D est celui qui se trouve à une distance différente de P que les autres points.

RÉPONSE : (D)

12. Puisque $x=2$ et $y=x^2-5$, alors $y=2^2-5=4-5=-1$.
Puisque $y=-1$ et $z=y^2-5$, alors $z=(-1)^2-5=1-5=-4$.

RÉPONSE : (E)

13. Puisque l'angle PQR est un angle plat, alors

$$x^\circ + y^\circ + x^\circ + y^\circ + x^\circ = 180^\circ$$

d'où $3x+2y=180$.
Puisque $x+y=76$ et $2x+2y+x=180$, alors $2(76)+x=180$ ou $x=180-152=28$.

RÉPONSE : (A)

14. *Solution 1*
Pour déterminer l'abscisse à l'origine de la droite initiale, on pose $y = 0$ pour obtenir $0 = 2x - 6$ ou $2x = 6$, soit $x = 3$.
Lorsque la droite subit une réflexion par rapport à l'axe des ordonnées, son abscisse à l'origine subit cette réflexion, d'où l'image a donc une abscisse à l'origine de $x = -3$.

Solution 2
Lorsqu'une droite subit une réflexion par rapport à l'axe des ordonnées, sa pente change de signe (c.-à-d. qu'elle est multipliée par -1).
Lorsqu'une droite subit une réflexion par rapport à l'axe des ordonnées, son ordonnée à l'origine (qui est située sur l'axe des ordonnées) ne change pas.
Donc, lorsque la droite d'équation $y = 2x - 6$ subit une réflexion par rapport à l'axe des ordonnées, l'image est la droite d'équation $y = -2x - 6$.
Pour déterminer l'abscisse à l'origine de cette droite, on pose $y = 0$ pour obtenir $0 = -2x - 6$ ou $2x = -6$, soit $x = -3$.

Réponse : (D)

15. Amélie a acheté $15n$ ananas qu'elle a ensuite vendus.
Puisqu'elle a acheté les ananas en groupes de 3, elle a acheté $\frac{15n}{3} = 5n$ groupes de 3 ananas.
Puisqu'elle a payé les ananas au prix de 2 \$ les trois, elle a dépensé $2\ \$ \times 5n = 10n\ \$$.
Puisqu'elle a vendu les ananas en groupes de 5, elle a vendu $\frac{15n}{5} = 3n$ groupes de 5 ananas.
Puisqu'elle a vendu les ananas au prix de 4 \$ les cinq, elle a gagné $4\ \$ \times 3n = 12n\ \$$.
Donc, en fonction de n, Amélie a réalisé un profit de $12n\ \$ - 10n\ \$ = 2n\ \$$.
Étant donné qu'elle a réalisé un profit de 100 \$, on a $2n\ \$ = 100\ \$$, d'où $2n = 100$ ou $n = 50$.

Réponse : (C)

16. D'après les lois des exposants, on a $3^{x+2} = 3^x \cdot 3^2 = 3^x \cdot 9$.
Puisque $3^x = 5$, alors $3^{x+2} = 3^x \cdot 9 = 5 \cdot 9 = 45$.

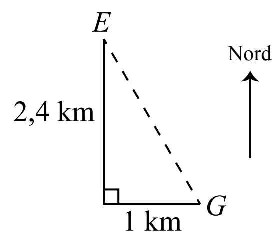
Réponse : (E)

17. On procède à rebours.
Il reste 1 bonbon à la fin du cinquième jour.
Puisque l'on a mangé $\frac{5}{6}$ des bonbons au cinquième jour, le bonbon à la fin du cinquième jour représente $\frac{1}{6}$ des bonbons restants à la fin du quatrième jour.
Donc, il restait $6 \times 1 = 6$ bonbons à la fin du quatrième jour.
Puisque l'on a mangé $\frac{4}{5}$ des bonbons au quatrième jour, ces 6 bonbons représentent $\frac{1}{5}$ des bonbons restants à la fin du troisième jour.
Donc, il restait $5 \times 6 = 30$ bonbons à la fin du troisième jour.
Puisque l'on a mangé $\frac{3}{4}$ des bonbons au troisième jour, ces 30 bonbons représentent $\frac{1}{4}$ des bonbons restants à la fin du deuxième jour.
Donc, il restait $4 \times 30 = 120$ bonbons à la fin du deuxième jour.
Puisque l'on a mangé $\frac{2}{3}$ des bonbons au deuxième jour, ces 120 bonbons représentent $\frac{1}{3}$ des bonbons restants à la fin du premier jour.
Donc, il restait $3 \times 120 = 360$ bonbons à la fin du premier jour.

Puisque l'on a mangé $\frac{1}{2}$ des bonbons au premier jour, ces 360 bonbons représentent $\frac{1}{2}$ des bonbons que contenait le sac initialement.
Donc, il y avait $2 \times 360 = 720$ bonbons dans le sac avant le premier jour.

Réponse : (B)

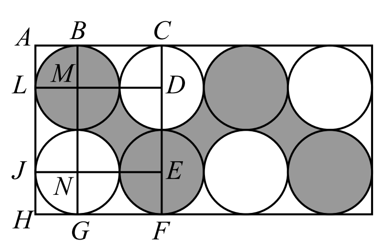
18. Pendant les 12 premières minutes, Elina court vers le nord tandis que Gustavo marche vers l'est.
Puisqu'il y a soixante minutes dans une heure, une durée de douze minutes correspond à $\frac{1}{5}$ d'une heure.
Lorsque Elina court à une vitesse de 12 km/h pendant $\frac{1}{5}$ d'une heure, elle parcourt $12 \text{ km/h} \times \frac{1}{5} \text{ h} = 2{,}4$ km vers le nord.
Lorsque Gustavo marche à une vitesse de 5 km/h pendant $\frac{1}{5}$ d'une heure, il parcourt $5 \text{ km/h} \times \frac{1}{5} \text{ h} = 1$ km vers l'est.
Rendus là, Elina et Gustavo changent de direction et se dirigent directement l'un vers l'autre.



On peut utiliser le théorème de Pythagore pour déterminer la distance qui les sépare au point où ils changent de direction : $\sqrt{(2{,}4 \text{ km})^2 + (1 \text{ km})^2} = 2{,}6$ km.
Puisque Elina et Gustavo se dirigent directement l'un vers l'autre, toujours à 12 km/h et à 5 km/h respectivement, ils réduisent la distance entre eux à une vitesse de 12 km/h+5 km/h = 17 km/h.
Donc, à partir du point où ils commencent à se diriger directement l'un vers l'autre, il leur faut $\dfrac{2.6 \text{ km}}{17 \text{ km/h}} \approx 0{,}153$ h pour se rejoindre.
Puisqu'il y a soixante minutes dans une heure, une durée de 0,153 heures est à peu près égale à 9,18 minutes.
Étant donné que Elina et Gustavo quittent l'école Cayley à 15 h et qu'ils voyagent pendant douze minutes vers le nord et vers l'est puis pendant neuf minutes l'un vers l'autre, ils se recontreront à nouveau vers 15 h 21.

Réponse : (E)

19. Chacun des quatre cercles ombrés est de rayon 1 et a donc une aire égale à $\pi \cdot 1^2$, soit π.
Ensuite, considérons l'un des trois espaces. Par symétrie, chacun des trois espaces a la même aire.
Parmi les trois espaces, considérons celui le plus à gauche.
On joint par des segments les centres des cercles délimitant l'espace de manière à former un quadrilatère. On joint également les centres de ces cercles aux points où ces cercles touchent les côtés du rectangle.



Ce quadrilatère est un carré ayant des côtés de longueur 2.
Ces côtés sont de longueur 2 car chacun de MD, DE, EN et NM est égal à la somme des longueurs de deux rayons, soit 2.
On démontre ensuite que les angles de $DMNE$ ont chacun une mesure de 90°.
Considérons le quadrilatère $ABML$. L'angle A a une mesure de 90° puisque la forme la plus grande est un rectangle. Les angles B et L ont tous deux des mesures de 90° puisque les rayons sont perpendiculaires aux tangentes à leurs points de tangence. Donc, $ABML$ a trois angles dont chacun a une mesure de 90°, cela signifie que son quatrième angle doit également avoir une mesure de 90°.
Considérons le quadrilatère $BCDM$. Les angles B et C ont tous deux des mesures de 90°. Puisque $BM = CD = 1$, cela signifie que $BCMD$ est un rectangle.
De la même manière, on peut voir que $JNGH$ est un carré tandis que $MLJN$ est un rectangle.
Considérons finalement $DMNE$. Au sommet M, les trois angles à l'extérieur de $DMNE$ ont chacun une mesure de 90°, d'où on a donc que l'angle à M situé à l'intérieur de $DMNE$ a une mesure de 90°.
De même, l'angle à N situé à l'intérieur de $DMNE$ a une mesure de 90°.
Puisque ces angles ont tous deux une mesure de 90° et que $MD = NE = 2$, alors $DMNE$ est un rectangle. Puisque ses quatre côtés ont chacun une longueur de 2, alors ce rectangle doit être un carré.

L'aire de l'espace délimité par les quatre cercles est donc égale à l'aire du carré moins l'aire des quatre secteurs de cercle à l'intérieur du carré. En fait, chacun de ces secteurs de cercle est le quart d'un cercle de rayon 1 car chacun a un angle au centre dont la mesure est de 90°.
Donc, l'aire de l'espace est égale à $2^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 1^2$, soit $4 - \pi$.
Donc, l'aire totale de la région ombrée est égale à $4\pi + 3(4 - \pi) = 4\pi + 12 - 3\pi = 12 + \pi$, ce qui est à peu près égal à 15,14.
Parmi les choix de réponse, 15 est le choix le plus près.

RÉPONSE : (D)

20. Un entier est divisible à la fois par 12 et par 20 lorsqu'il est exactement divisible par le plus petit commun multiple de 12 et 20.
Les premiers multiples positifs de 20 sont 20, 40, 60. Puisque 60 est divisible par 12 et que ni 20 ni 40 ne sont divisibles par 12, alors 60 est le plus petit commun multiple de 12 et 20.
Puisque $60 \cdot 16 = 960$ et $60 \cdot 17 = 1020$, le plus petit multiple de 60 ayant quatre chiffres est $60 \cdot 17$.
Puisque $60 \cdot 166 = 9960$ et $60 \cdot 167 = 10\,020$, le plus grand multiple de 60 ayant quatre chiffres est $60 \cdot 166$.
Cela veut dire qu'il y a $166 - 17 + 1 = 150$ multiples de 60 ayant quatre chiffres.
Il faut maintenant retirer les multiples de 60 qui sont également des multiples de 16.
Puisque 240 est le plus petit commun multiple de 60 et 16, il faut retirer les multiples de 240 ayant quatre chiffres.
Puisque $240 \cdot 4 = 960$ et $240 \cdot 5 = 1200$, le plus petit multiple de 240 ayant quatre chiffres est $240 \cdot 5$.
Puisque $240 \cdot 41 = 9840$ et $240 \cdot 42 = 10\,080$, le plus grand multiple de 240 ayant quatre chiffres est $240 \cdot 41$.
Cela veut dire qu'il y a $41 - 5 + 1 = 37$ multiples de 240 ayant quatre chiffres.
Donc, il y a $150 - 37 = 113$ entiers strictement positifs de quatre chiffres qui sont divisibles à la fois par 12 et par 20 mais qui ne sont pas divisibles par 16.

RÉPONSE : (B)

21. On considère d'abord les couples d'entiers donnés dont la somme est un troisième entier figurant dans cette même liste. En commençant par les plus petits couples possibles, on a :

$$4 + 27 = 31 \qquad 12 + 15 = 27 \qquad 12 + 27 = 39$$

Il n'y a aucun autre couple d'entiers dont la somme est un troisième entier figurant dans cette même liste.
Cela signifie que chacune des trois sommes du problème doit être l'une des trois sommes ci-dessus.
Le seul entier qui parait trois fois dans les sommes ci-dessus est 27.
La seule variable qui parait trois fois dans les sommes de l'énoncé est c.
Donc, $c = 27$.
Cela signifie également que la somme $a + b = c$ doit être la somme $12 + 15 = 27$.
Puisque 12 parait dans deux sommes et 15 non, alors $a = 15$ et $b = 12$.
En faisant correspondre les valeurs que l'on connaît avec les équations que l'on a, on obtient :

$$\begin{aligned} a + b &= c & \qquad 15 + 12 &= 27 \\ b + c &= d & \qquad 12 + 27 &= 39 \\ c + e &= f & \qquad 27 + 4 &= 31 \end{aligned}$$

Donc, $a + c + f = 15 + 27 + 31 = 73$.

Réponse : (C)

22. Soit n l'entier dans le coin inférieur gauche.
Dans ce cas, les entiers dans la première colonne ont une somme de $64 + 70 + n$ ou $n + 134$.
Donc, les entiers le long de chaque rangée, de chaque colonne et de chaque diagonale ont également une somme de $n + 134$.
D'après la rangée du haut, on a que l'entier en haut à droite est égal à $(n + 134) - 64 - 10$ ou $n + 60$.
D'après la diagonale nord-est, on a que l'entier au centre est égal à $(n + 134) - n - (n + 60)$ ou $74 - n$.
D'après la deuxième rangée, on a que l'entier du milieu dans la colonne de droite est égal à $(n + 134) - 70 - (74 - n)$ ou $2n - 10$.
D'après la diagonale sud-est, on a que l'entier en bas à droite est égal à $(n+134)-64-(74-n)$ ou $2n - 4$.
D'après la troisième rangée, on a que l'entier au centre est égal à $(n + 134) - n - (2n - 4)$.
Donc, $x = (n + 134) - n - (2n - 4) = 138 - 2n$.

64	10	$n + 60$
70	$74 - n$	$2n - 10$
n	$138 - 2n$	$2n - 4$

D'après la troisième colonne,

$$\begin{aligned} (n + 60) + (2n - 10) + (2n - 4) &= n + 134 \\ 5n + 46 &= n + 134 \\ 4n &= 88 \\ n &= 22 \end{aligned}$$

Donc, $x = 130 - 2n = 130 - 44 = 94$. On peut voir la grille remplie ci-contre :

64	10	82
70	52	34
22	94	40

.

RÉPONSE : (E)

23. Après deux lancers chacun, Robbie a un score de 8 tandis que Francine a un score de 10. Donc, afin que Robbie soit vainqueur (autrement dit, afin qu'il ait le score le plus élevé des deux), le nombre qu'il obtient au troisième lancer doit être 3 de plus que le nombre qu'obtient Francine.
Si Robbie lance un 1, un 2 ou un 3, son lancer ne peut être 3 de plus que celui de Francine.
Si Robbie lance un 4 et qu'il est vainqueur, cela signifie que Francine a lancé un 1.
Si Robbie lance un 5 et qu'il est vainqueur, cela signifie que Francine a lancé soit un 1 ou un 2.
Si Robbie lance un 6 et qu'il est vainqueur, cela signifie que Francine a lancé soit un 1, un 2 ou un 3.
On a donc les combinaisons possibles de lancers telles que Robbie soit vainqueur. On doit donc calculer les probabilités.
Remarquons que le dé que lancent Robbie et Francine est un dé particulier à six faces.
Soit p la probabilité d'obtenir un 1.
D'après l'énoncé du problème, la probabilité d'obtenir un 2 est égale à $2p$, la probabilité d'obtenir un 3 est égale à $3p$ et les probabilités d'obtenir un 4, un 5 et un 6 sont respectivement égales à $4p$, $5p$ et $6p$.
Puisque les probabilités d'obtenir un 1, un 2, un 3, un 4, un 5 ou un 6 ont une somme de 1, alors on a l'équation $p + 2p + 3p + 4p + 5p + 6p = 1$, d'où $21p = 1$ ou $p = \frac{1}{21}$.
Donc, la probabilité que Robbie et Francine lancent respectivement un 4 et un 1 est égale au produit des probabilités de chacun de ces événements, ce qui est égal à $\frac{4}{21} \cdot \frac{1}{21}$.
De plus, la probabilité que Robbie lance un 5 et que Francine lance un 1 ou un 2 est égale à $\frac{5}{21} \cdot \frac{1}{21} + \frac{5}{21} \cdot \frac{2}{21}$.
Enfin, la probabilité que Robbie lance un 6 et que Francine lance un 1, un 2 ou un 3 est égale à

$$\frac{6}{21} \cdot \frac{1}{21} + \frac{6}{21} \cdot \frac{2}{21} + \frac{6}{21} \cdot \frac{3}{21}$$

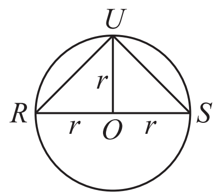
Donc, la probabilité que Robbie soit vainqueur est égale à

$$\frac{4}{21} \cdot \frac{1}{21} + \frac{5}{21} \cdot \frac{1}{21} + \frac{5}{21} \cdot \frac{2}{21} + \frac{6}{21} \cdot \frac{1}{21} + \frac{6}{21} \cdot \frac{2}{21} + \frac{6}{21} \cdot \frac{3}{21} = \frac{4+5+10+6+12+18}{21 \cdot 21} = \frac{55}{441}$$

Cette fraction est irréductible car $55 = 5 \cdot 11$ et $441 = 3^2 \cdot 7^2$.
Lorsqu'on exprime cette fraction sous la forme souhaitée, on a que $r = 55$ et que $s = 41$, d'où $r + s = 96$.

RÉPONSE : (A)

24. Soit O le centre de la base circulaire supérieure et r le rayon du cylindre.
Il faut déterminer la valeur de QT^2.
Puisque RS est situé directement au-dessus de PQ, alors RP et PQ sont perpendiculaires.
Cela signifie que le triangle TPQ est rectangle en P.
Puisque PQ est un diamètre, alors $PQ = 2r$.
D'après le théorème de Pythagore, $QT^2 = PT^2 + PQ^2 = n^2 + (2r)^2 = n^2 + 4r^2$.
Il faut donc déterminer les valeurs de n et r ; ce que l'on va faire à l'aide des renseignements fournis quant à QU et UT dans l'énoncé du problème.
On joint U à O.
Puisque U est situé à mi-chemin entre R et S, alors les arcs RU et US sont chacun un quart du cercle qui délimite la face supérieure du cylindre.
Cela signifie que $\angle UOR = \angle UOS = 90°$.



On applique le théorème de Pythagore aux triangles UOR et UOS (qui sont tous deux rectangles en O) pour obtenir

$$UR^2 = UO^2 + OR^2 = r^2 + r^2 = 2r^2 \qquad \text{et} \qquad US^2 = 2r^2$$

Puisque RP et QS sont tous deux perpendiculaires à la face supérieure du cylindre, on peut appliquer le théorème de Pythagore aux triangles TRU et QSU pour obtenir

$$QU^2 = QS^2 + US^2 = m^2 + 2r^2$$
$$UT^2 = TR^2 + UR^2 = (PR - PT)^2 + 2r^2 = (QS - n)^2 + 2r^2 = (m - n)^2 + 2r^2$$

Puisque $QU = 9\sqrt{33}$, alors $QU^2 = 9^2 \cdot 33 = 2673$.
Puisque $UT = 40$, alors $UT^2 = 1600$.
Donc,

$$m^2 + 2r^2 = 2673$$
$$(m - n)^2 + 2r^2 = 1600$$

On développe les équations équivalentes suivantes en soustrayant la deuxième équation de la première :

$$\begin{aligned} m^2 - (m - n)^2 &= 1073 \\ m^2 - (m^2 - 2mn + n^2) &= 1073 \\ 2mn - n^2 &= 29 \cdot 37 \\ n(2m - n) &= 29 \cdot 37 \end{aligned}$$

Puisque m et n sont des entiers, alors $2m - n$ est un entier. Donc, n et $2m - n$ est un couple de facteurs de $29 \cdot 37 = 1073$.
Puisque 29 et 37 sont des nombres premiers, l'entier 1073 n'a que quatre diviseurs positifs, soit 1, 29, 37, 1073.

D'où les possibilités suivantes :

n	$2m-n$	$m=\frac{1}{2}((2m-n)+n)$
1	1073	537
29	37	33
37	29	33
1073	1	537

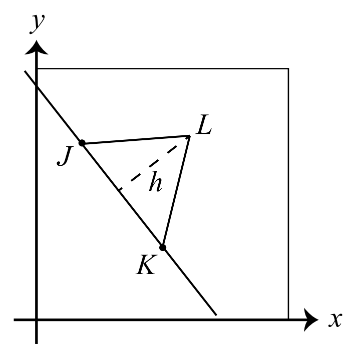
Puisque $m > n$, alors n ne peut être 37 ou 1073.
Puisque $QU > QS$, alors $m < 9\sqrt{33} \approx 51{,}7$.
D'où on a donc $n = 29$ et $m = 33$.
Puisque $(m-n)^2 + 2r^2 = 1600$, on obtient $2r^2 = 1600 - (m-n)^2 = 1600 - 4^2 = 1584$. Donc,

$$QT^2 = n^2 + 4r^2 = 29^2 + 2(2r^2) = 841 + 3168 = 4009$$

Lorsque l'entier égal à QT^2 est divisé par 100, le reste est 9.

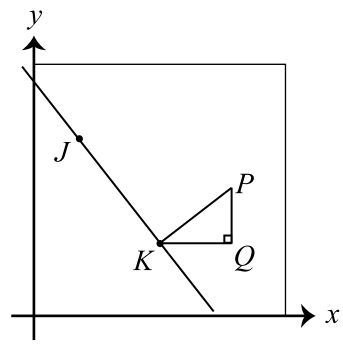
Réponse : (C)

25. La distance entre $J(2,7)$ et $K(5,3)$ est égale à $\sqrt{(2-5)^2+(7-3)^2} = \sqrt{3^2+4^2} = 5$.
Donc, si l'on considère le triangle JKL comme ayant JK pour base et h pour hauteur, alors on veut $\frac{1}{2} \cdot JK \cdot h \leq 10$, soit $h \leq 10 \cdot \frac{2}{5} = 4$.
Autrement dit, $L(r,t)$ peut être n'importe quel point (où r et t vérifient $0 \leq r \leq 10$ et $0 \leq t \leq 10$) tel que la perpendiculaire abaissée depuis ce point jusqu'à la droite passant par J et K a une longueur inférieure ou égale à 4.



La droite passant par $J(2,7)$ et $K(5,3)$ a une pente égale à $\dfrac{7-3}{2-5} = -\dfrac{4}{3}$.
Donc, l'équation de cette droite est $y - 7 = -\dfrac{4}{3}(x-2)$.
En multipliant chaque membre par 3, on obtient $3y - 21 = -4x + 8$ ou $4x + 3y = 29$.
On détermine l'équation de la droite au-dessus de cette dernière qui lui est parallèle et qui est telle que la perpendiculaire reliant les deux droites a une longueur de 4.
L'équation de cette droite est de la forme $4x + 3y = c$, c étant un nombre réel, puisqu'elle est parallèle à la droite d'équation $4x + 3y = 29$.
Pour déterminer la valeur de c, il faut déterminer les coordonnées d'un point sur cette droite.
Pour déterminer un tel point, on abaisse une perpendiculaire de longueur 4 depuis un point P au dessus de la droite jusqu'au point K.
Puisque JK a une pente de $-\dfrac{4}{3}$ et que KP et JK sont perpendiculaires, alors KP a une pente de $\dfrac{3}{4}$.

On trace de P une droite verticale et de K une droite horizontale. Ces droites se coupent en Q.



Puisque KP a une pente de $\frac{3}{4}$, alors $PQ : QK = 3 : 4$, on a donc que le triangle KQP est semblable au triangle remarquable 3-4-5.

Puisque $KP = 4$, alors $PQ = \frac{3}{5}KP = \frac{12}{5}$ et $QK = \frac{4}{3}KP = \frac{16}{5}$.

Donc, le point P a pour coordonnées $\left(5 + \frac{16}{5}, 3 + \frac{12}{5}\right)$ ou $\left(\frac{41}{5}, \frac{27}{5}\right)$.

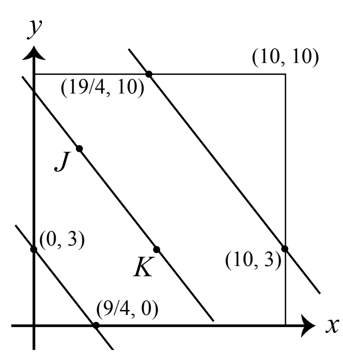
Puisque P est situé sur la droite d'équation $4x + 3y = c$, alors

$$c = 4 \cdot \frac{41}{5} + 3 \cdot \frac{27}{5} = \frac{164}{5} + \frac{81}{5} = \frac{245}{5} = 49$$

d'où l'équation de la droite parallèle à JK et située à une distance de 4 unités au-dessus d'elle est $4x + 3y = 49$.

De la même manière, on détermine que l'équation de la droite parallèle à JK et située à une distance de 4 unités en dessous d'elle est $4x + 3y = 9$. (Remarquons que $49 - 29 = 29 - 9$.)

On a donc la figure suivante :



Les points L qui remplissent les conditions énoncées sont exactement les points dans le carré qui sont situés en dessous de la droite d'équation $4x + 3y = 49$ et au dessus de la droite d'équation $4x + 3y = 9$. Autrement dit, la région $\mathcal{R}$ est la région à l'intérieur du carré qui est délimitée par les deux droites.

Pour déterminer l'aire de $\mathcal{R}$, on soustrait de l'aire du carré délimité par les droites $x = 0$, $x = 10$, $y = 0$ et $y = 10$ (ce dernier a une aire égale à $10 \cdot 10$, soit 100) l'aire des deux triangles à l'intérieur du carré qui ne se trouvent pas dans la région délimitée par les deux droites.

La droite d'équation $4x + 3y = 9$ coupe l'axe des ordonnées au point $(0, 3)$ (ce qu'on peut déterminer en posant $x = 0$) et coupe l'axe des abscisses au point $\left(\frac{9}{4}, 0\right)$ (ce qu'on peut déterminer en posant $y = 0$).

La droite d'équation $4x + 3y = 49$ coupe la droite $x = 10$ au point $(10, 3)$ (ce qu'on peut déterminer en posant $x = 10$) et coupe la droite $y = 10$ au point $\left(\frac{19}{4},10\right)$ (ce qu'on peut déterminer en posant $y = 10$).
Le triangle du bas qui est à l'intérieur du carré mais à l'extérieur de $\mathcal{R}$ a une aire de $\frac{1}{2}\cdot 3\cdot \frac{9}{4} = \frac{27}{8}$.
Le triangle du haut qui est à l'intérieur du carré mais à l'extérieur de $\mathcal{R}$ a une base dont la longueur est de $10 - \frac{19}{4}$, soit $\frac{21}{4}$, et une hauteur de $10 - 3$, soit 7. L'aire de ce triangle est donc égale à $\frac{1}{2} \cdot \frac{21}{4} \cdot 7 = \frac{147}{8}$.
Enfin, cela signifie que l'aire de $\mathcal{R}$ est égale à

$$100 - \frac{27}{8} - \frac{147}{8} = 100 - \frac{174}{8} = 100 - \frac{87}{4} = \frac{313}{4}$$

Cette fraction est irréductible puisque les seuls diviseurs du dénominateur supérieurs à 1 sont 2 et 4, tandis que le numérateur est impair.
Lorsqu'on exprime cette aire sous la forme $\frac{300 + a}{40 - b}$, a et b étant des entiers strictement positifs, on obtient $a = 13$ et $b = 36$, d'où $a + b = 49$.

Réponse : (D)