Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Cayley

(10^e année – Sec. IV)

le mardi 23 février 2021

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 24 février 2021

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 60 minutes

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Directives

1. Attendez le signal du surveillant ou de la surveillante avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponses. Au besoin, demandez à l'enseignante ou à l'enseignant d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur droite de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école et le nom de la ville.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats admissibles.**
6. Le concours est composé de questions à choix multiple. Chaque question est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. Notation: Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C.
   Une réponse fautive n'est *pas* pénalisée.
   Chaque question laissée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 10 questions.
8. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui visuel seulement.
9. Après le signal du surveillant ou de la surveillante, vous aurez 60 minutes pour terminer.
10. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Pascal, Cayley ou Fermat.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

Notation: Une réponse fautive *n'est pas pénalisée.* On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 10 questions.

Partie A (5 points par bonne réponse)

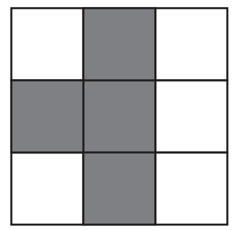
1. L'expression $\dfrac{2+4}{1+2}$ est égale à :

   (A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 4 **(E)** 5

2. Le nombre 542 a 2 pour chiffre des unités. Lorsqu'on multiplie 542 par 3, quel est le chiffre des unités du résultat ?

   (A) 9 **(B)** 3 **(C)** 5 **(D)** 4 **(E)** 6

3. Dans le quadrillage 3×3 ci-contre, certaines des cases 1×1 sont ombrées. Quel est le périmètre de la région ombrée ?

   (A) 10 **(B)** 14 **(C)** 8
   (D) 18 **(E)** 20

4. Si $3x + 4 = x + 2$, quelle est la valeur de x ?

   (A) 0 **(B)** -4 **(C)** -3 **(D)** -1 **(E)** -2

5. Parmi les nombres suivants, lequel est égal à 110 % de 500 ?

   (A) 610 **(B)** 510 **(C)** 650 **(D)** 505 **(E)** 550

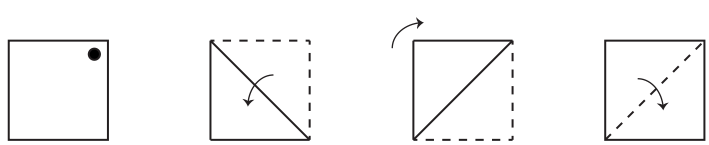
6. Eugène a nagé dimanche, lundi et mardi. Lundi, il a nagé pendant 30 minutes. Mardi, il a nagé pendant 45 minutes. Sachant que la moyenne des trois jours était de 34 minutes, pendant combien de minutes a-t-il nagé dimanche ?

   (A) 20 **(B)** 25 **(C)** 27 **(D)** 32 **(E)** 37,5

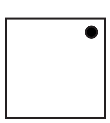
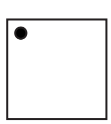
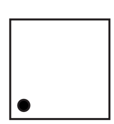
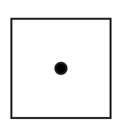
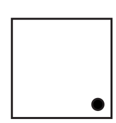
7. Parmi les valeurs suivantes de x, laquelle vérifie $x^3 < x^2$?

   (A) $x = \frac{5}{3}$ **(B)** $x = \frac{3}{4}$ **(C)** $x = 1$ **(D)** $x = \frac{3}{2}$ **(E)** $x = \frac{21}{20}$

8. Dans la figure ci-dessous, un morceau de papier carré a un point dans son coin supérieur droit et repose sur une table. Le carré est plié le long de sa diagonale puis subit une rotation autour de son centre de 90° dans les sens des aiguilles d'une montre. Finalement, le morceau de papier est déplié.

   De quoi aura l'air le morceau de papier une fois qu'il aura été déplié ?

   (A)  **(B)**  **(C)**  **(D)**  **(E)** 

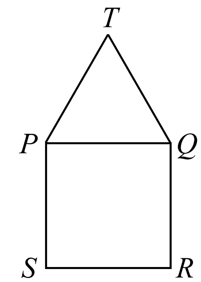
9. Dans 12 ans, Jeanne aura 8 fois l'âge qu'elle avait il y a 2 ans. Quel âge a-t-elle maintenant ?

(A) 4 **(B)** 8 **(C)** 10 **(D)** 2 **(E)** 6

10. Dans la figure ci-contre, le pentagone $TPSRQ$ est construit à partir du triangle équilatéral PTQ et du carré $PQRS$. Quelle est la mesure de l'angle STR ?

(A) 10° **(B)** 15° **(C)** 20°

(D) 30° **(E)** 45°

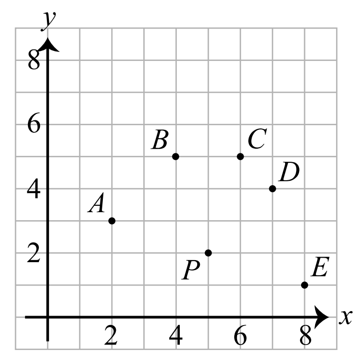


Partie B (6 points par bonne réponse)

11. Dans la figure ci-contre, lequel des points se trouve à une distance différente de P que les autres points ?

(A) A **(B)** B **(C)** C

(D) D **(E)** E



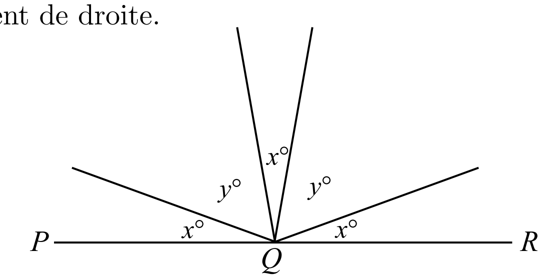
12. Sachant que $x = 2$, que $y = x^2 - 5$ et que $z = y^2 - 5$, quelle est la valeur de z ?

(A) -6 **(B)** -8 **(C)** 4 **(D)** 76 **(E)** -4

13. Dans la figure ci-contre, PQR est un segment de droite. Si $x + y = 76$, quelle est la valeur de x ?

(A) 28 **(B)** 30 **(C)** 35

(D) 36 **(E)** 38



14. La droite d'équation $y = 2x - 6$ subit une réflexion par rapport à l'axe des ordonnées. Quelle est l'abscisse à l'origine de l'image ?

(A) -12 **(B)** 6 **(C)** -6 **(D)** -3 **(E)** 0

15. Amélie a acheté $15n$ ananas qu'elle a ensuite vendus, n étant un entier strictement positif. Elle a réalisé un profit de 100 \$. (Son *profit* correspond à la différence entre le montant total qu'elle a gagné en vendant les ananas et le montant total qu'elle a dépensé pour acheter les ananas.) Elle a payé les ananas au prix de 2 \$ les trois et les a vendus au prix de 4 \$ les cinq. Quelle est la valeur de n ?

(A) 100 **(B)** 20 **(C)** 50 **(D)** 30 **(E)** 8

16. Si $3^x = 5$, quelle est la valeur de 3^{x+2} ?

(A) 10 **(B)** 25 **(C)** 2187 **(D)** 14 **(E)** 45

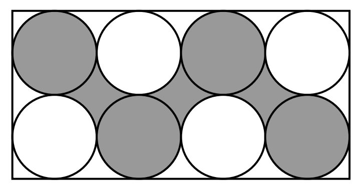
17. Des amis se partagent un sac de bonbons.
Au premier jour, ils mangent $\frac{1}{2}$ des bonbons dans le sac.
Au deuxième jour, ils mangent $\frac{2}{3}$ des bonbons restants.
Au troisième jour, ils mangent $\frac{3}{4}$ des bonbons restants.
Au quatrième jour, ils mangent $\frac{4}{5}$ des bonbons restants.
Au cinquième jour, ils mangent $\frac{5}{6}$ des bonbons restants.
À la fin du cinquième jour, il reste 1 bonbon dans le sac.
Combien de bonbons y avait-il dans le sac avant le premier jour ?

(A) 512 **(B)** 720 **(C)** 1024 **(D)** 1440 **(E)** 2048

18. Elina et Gustavo quittent l'école Cayley à 15 h 00. Elina court vers le nord à une vitesse constante de 12 km/h. Gustavo marche vers l'est à une vitesse constante de 5 km/h. Au bout de 12 minutes, Elina et Gustavo changent de direction et se dirigent directement l'un vers l'autre, toujours à 12 km/h et à 5 km/h respectivement. Aux alentours de quelle heure vont-ils se retrouver ?

(A) 15 h 24 **(B)** 15 h 35 **(C)** 15 h 25 **(D)** 15 h 29 **(E)** 15 h 21

19. Dans la figure ci-contre, huit cercles, chacun étant de rayon 1, sont tracés à l'intérieur d'un rectangle. Quatre cercles sont tangents à deux côtés du rectangle et à deux autres cercles tandis que quatre cercles sont tangents à un côté du rectangle et à trois autres cercles. De plus, une région a été ombrée. Cette région est composée de trois espaces (chaque espace étant délimité par un ensemble différent de quatre cercles) ainsi que de quatre cercles. L'aire de la région ombrée est plus près de :



(A) 12 **(B)** 13 **(C)** 14
(D) 15 **(E)** 16

20. Combien d'entiers strictement positifs de quatre chiffres sont divisibles à la fois par 12 et par 20 mais ne sont pas divisibles par 16 ?

(A) 111 **(B)** 113 **(C)** 125 **(D)** 150 **(E)** 149

Partie C (8 points par bonne réponse)

21. Les variables a, b, c, d, e et f représentent les nombres 4, 12, 15, 27, 31 et 39 dans un ordre quelconque. Supposons que

$$a+b=c$$
$$b+c=d$$
$$c+e=f$$

Quelle est la valeur de $a+c+f$?

(A) 58 **(B)** 70 **(C)** 73 **(D)** 82 **(E)** 85

22. On doit écrire des entiers dans les cases de la grille 3×3 ci-contre, un entier par case, de manière que les entiers le long de chaque rangée, de chaque colonne et de chaque diagonale aient la même moyenne. Les entiers 10, 64 et 70 paraissent déjà dans la grille. Lorsqu'on remplit les six cases restantes de la grille, quel entier prendra la place de x ?

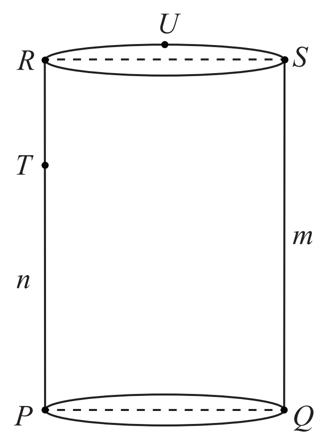
64	10	
70		
	x	

(A) 78 **(B)** 82 **(C)** 86
(D) 90 **(E)** 94

23. On lance un dé particulier à six faces. Les faces du dé sont numérotées de 1 à 6 et le dé est tel qu'il est x fois plus probable d'obtenir le nombre x que d'obtenir un 1. Par exemple, il est 5 fois plus probable d'obtenir un 5 que d'obtenir un 1. De même, il est 2 fois plus probable d'obtenir un 2 que d'obtenir un 1. Robbie et Francine jouent un jeu où ils lancent chacun ce dé trois fois ; le total de leurs trois lancers est leur score. Le vainqueur est le joueur ayant le score le plus élevé. Si les deux joueurs obtiennent le même score, aucun des deux ne gagne. Après deux lancers chacun, Robbie a un score de 8 tandis que Francine a un score de 10. L'expression irréductible $\dfrac{r}{400+s}$ représente la probabilité que Robbie soit vainqueur, r et s étant des entiers strictement positifs. Quelle est la valeur de $r+s$?

(A) 96 **(B)** 86 **(C)** 76 **(D)** 66 **(E)** 56

24. Dans la figure ci-contre, on voit un cylindre dont la base circulaire inférieure a PQ pour diamètre tandis que la base circulaire supérieure a RS pour diamètre. De plus, le diamètre RS est situé directement au-dessus du diamètre PQ. Le point U est situé sur le cercle supérieure à mi-chemin entre R et S. Le point T est situé sur le cylindre de manière à être directement au-dessus de P. Supposons que $QS = m$ et que $PT = n$, m et n étant des entiers qui vérifient $1 < n < m$. Si $QU = 9\sqrt{33}$ et $UT = 40$, quel est le reste lorsque l'entier égal à QT^2 est divisé par 100 ?



(A) 29 **(B)** 49 **(C)** 9
(D) 89 **(E)** 69

25. Les points $J(2,7)$, $K(5,3)$ et $L(r,t)$ forment un triangle dont l'aire est inférieure ou égale à 10. Soit $\mathcal{R}$ la région formée par tous tels points L où r et t vérifient respectivement $0 \le r \le 10$ et $0 \le t \le 10$. Lorsqu'elle est exprimée sous forme de fraction irréductible, l'aire de $\mathcal{R}$ est égale à $\dfrac{300+a}{40-b}$, a et b étant des entiers strictement positifs. Quelle est la valeur de $a+b$?

(A) 82 **(B)** 71 **(C)** 60 **(D)** 49 **(E)** 93

**Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE**
cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Cayley de 2021! Chaque année, plus de 265 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignante ou votre enseignant à vous inscrire au concours Galois qui aura lieu en avril.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
— plus d'information à propos du concours Galois
— des copies gratuites des concours précédents
— des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
— des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
— inscrire vos élèves aux concours Fryer, Galois et Hypatie qui auront lieu en avril
— jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne
— vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
— vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
— vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
— trouver les résultats de vos élèves dans les coucours