Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur 2021

le mercredi 17 novembre 2021
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 18 novembre 2021
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

Partie A

1. Si l'on construit la rangée de 11 carrés de gauche à droite, le premier carré nécessitera 4 cure-dents et chaque carré suivant nécessitera 3 cure-dents supplémentaires. Ces 3 cure-dents forment le côté supérieur, le côté droit et le côté inférieur du carré. Le côté gauche est formé par le côté droit du carré précédent.
   Donc, il faut $4 + 10 \cdot 3 = 34$ cure-dents pour former une rangée de 11 carrés.

   Réponse : 34

2. D'après la définition de ∇, on a

$$\begin{aligned} 5\nabla x &= 30 \\ (5+1)(x-2) &= 30 \\ 6(x-2) &= 30 \\ x-2 &= 5 \end{aligned}$$

   Donc, $x = 7$.

   Réponse : $x = 7$

3. La pente de PR est égale à $\dfrac{2-0}{1-0} = 2$.
   Donc, l'équation de la droite parallèle à PR est de la forme $y = 2x + b$.
   Le milieu de QR a pour coordonnées $\left(\dfrac{4+1}{2}, \dfrac{0+2}{2}\right)$, soit le point $\left(\dfrac{5}{2}, 1\right)$.
   Puisque la droite d'équation $y = 2x + b$ passe par le point ayant pour coordonnées $\left(\dfrac{5}{2}, 1\right)$, alors $1 = 2 \cdot \dfrac{5}{2} + b$, d'où $1 = 5 + b$ ou $b = -4$.

   Réponse : -4

4. Tout au long de la solution, on exprime les probabilités dans les résultats sous forme de fractions des populations dont il est question.

   Puisqu'on interroge 2000 personnes à propos des effets secondaires et que $\frac{3}{25}$ de ces personnes ont des effets secondaires graves, alors $\frac{3}{25} \cdot 2000 = 240$ personnes ont des effets secondaires graves.

   Puisque 240 personnes ont des effets secondaires graves et que $\frac{2}{3}$ d'entre elles ont reçu le médicament A, alors $\frac{2}{3} \cdot 240 = 160$ personnes ont reçu le médicament A parmi celles présentant des effets secondaires graves.

   Cela signifie que $240 - 160 = 80$ personnes ont reçu le médicament B parmi celles présentant des effets secondaires graves.

	Médicament A	Médicament B	TOTAL
Effets secondaires légers			
Effets secondaires graves	160	80	240
TOTAL			

   Puisque 1000 personnes ont reçu le médicament A et que $\frac{19}{100}$ d'entre elles ont des effets secondaires graves ou légers, alors 190 personnes présentent des effets secondaires graves ou légers parmi celles ayant reçu le médicament A.

   Cela signifie que $190 - 160 = 30$ personnes présentent des effets secondaires légers parmi celles ayant reçu le médicament A.

	Médicament A	Médicament B	TOTAL
Effets secondaires légers	30		
Effets secondaires graves	160	80	240
TOTAL	190		

   De même, $\frac{3}{20} \cdot 1000 = 150$ personnes présentent des effets secondaires graves ou légers parmi celles ayant reçu le médicament B. Parmi ces 150 personnes, 80 présentent des effets secondaires graves, donc $150 - 80 = 70$ personnes présentent des effets secondaires légers.

	Médicament A	Médicament B	TOTAL
Effets secondaires légers	30	70	
Effets secondaires graves	160	80	240
TOTAL	190	150	

   Étant donné que 30 personnes présentant des effets secondaires légers ont reçu le médicament A et que 70 ont reçu le médicament B, alors la probabilité de choisir au hasard une personne ayant reçu le médicament B parmi celles présentant des effets secondaires légérs est égale à $\frac{70}{70+30} = \frac{70}{100} = \frac{7}{10}$.

   RÉPONSE : $\frac{7}{10}$

5. *Solution 1*

Puisque $\log_a(b^c) = c\log_a b$, alors

$$\begin{aligned}
\log_2(x^2) &= 2\log_2 x \\
\log_2(x^3) &= 3\log_2 x \\
2\log_x 8 &= 2\log_x(2^3) = 2\cdot 3\log_x 2 = 6\log_x 2 \\
20\log_x(32) &= 20\log_x(2^5) = 20\cdot 5\log_x 2 = 100\log_x 2
\end{aligned}$$

Soit $t = \log_2 x$.

Puisque x est également la base d'un logarithme dans l'équation, alors $x \neq 1$, d'où $t \neq 0$.

Donc,

$$\log_x 2 = \frac{\log 2}{\log x} = \frac{1}{(\log x)/(\log 2)} = \frac{1}{\log_2 x} = \frac{1}{t}$$

En partant de l'équation initiale, on a les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}
\log_2(x^2) + 2\log_x 8 &= \frac{392}{\log_2(x^3) + 20\log_x(32)} \\
2\log_2 x + 6\log_x 2 &= \frac{392}{3\log_2 x + 100\log_x 2} \\
2t + \frac{6}{t} &= \frac{392}{3t + \frac{100}{t}} \qquad \text{(à l'aide de } t = \log_2 x\text{)} \\
\frac{2t^2+6}{t} &= \frac{392t}{3t^2+100} \qquad \text{(car } t \neq 0\text{)} \\
\frac{t^2+3}{t} &= \frac{196t}{3t^2+100} \\
(t^2+3)(3t^2+100) &= 196t^2 \\
3t^4 + 109t^2 + 300 &= 196t^2 \\
3t^4 - 87t^2 + 300 &= 0 \\
t^4 - 29t^2 + 100 &= 0 \\
(t^2-25)(t^2-4) &= 0 \\
(t+5)(t-5)(t+2)(t-2) &= 0
\end{aligned}$$

Donc, $t = -5$ ou $t = 5$ ou $t = -2$ ou $t = 2$.

Donc, $\log_2 x = -5$ ou $\log_2 x = 5$ ou $\log_2 x = -2$ ou $\log_2 x = 2$.

Donc, $x = 2^{-5} = \dfrac{1}{32}$ ou $x = 2^5 = 32$ ou $x = 2^{-2} = \dfrac{1}{4}$ ou $x = 2^2 = 4$.

On peut rapporter ces valeurs de x dans l'équation donnée pour vérifier qu'elles satisfont à l'équation.

Solution 2
Soit $a = \log_2 x$ et $b = \log_x 2$.
Alors $2^a = x$ et $x^b = 2$, d'où $2^{ab} = (2^a)^b = x^b = 2$.
Puisque $2^{ab} = 2$, alors $ab = 1$.
Comme dans la Solution 1,

$$\begin{aligned}
\log_2(x^2) &= 2\log_2 x = 2a \\
\log_2(x^3) &= 3\log_2 x = 3a \\
2\log_x 8 &= 6\log_x 2 = 6b \\
20\log_x(32) &= 100\log_x 2 = 100b
\end{aligned}$$

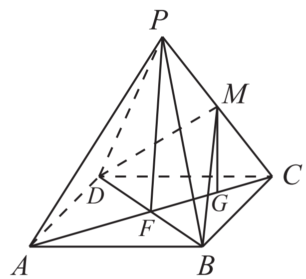
En partant de l'équation initiale, on a les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}
\log_2(x^2) + 2\log_x 8 &= \frac{392}{\log_2(x^3) + 20\log_x(32)} \\
2a + 6b &= \frac{392}{3a + 100b} \\
(2a + 6b)(3a + 100b) &= 392 \\
(a + 3b)(3a + 100b) &= 196 \\
3a^2 + 109ab + 300b^2 &= 196 \\
3a^2 + 60ab + 300b^2 &= 196 - 49ab \\
3a^2 + 60ab + 300b^2 &= 147 \qquad (\text{car } ab = 1) \\
a^2 + 20ab + 100b^2 &= 49 \\
(a + 10b)^2 &= 7^2
\end{aligned}$$

D'où $a + 10b = 7$ ou $a + 10b = -7$.
Puisque $ab = 1$, alors $b = \frac{1}{a}$, d'où $a + \frac{10}{a} = 7$ ou $a + \frac{10}{a} = -7$.
À partir de ces équations, on obtient $a^2 + 10 = 7a$ (ou de manière équivalente $a^2 - 7a + 10 = 0$) et $a^2 + 10 = -7a$ (ou de manière équivalente $a^2 + 7a + 10 = 0$).
On factorise pour obtenir $(a - 2)(a - 5) = 0$ ou $(a + 2)(a + 5) = 0$, d'où $a = 2, 5, -2, -5$.
Puisque $a = \log_2 x$, alors $x = 2^{-5} = \frac{1}{32}$ ou $x = 2^5 = 32$ ou $x = 2^{-2} = \frac{1}{4}$ ou $x = 2^2 = 4$.
On peut rapporter ces valeurs de x dans l'équation donnée pour vérifier qu'elles satisfont à l'équation.

Réponse : $x = \frac{1}{32}, 32, \frac{1}{4}, 4$

6. Soit $2a$ la longueur des côtés de la base carrée $ABCD$ et $2h$ la hauteur de la pyramide (la distance à laquelle P se trouve au-dessus de la base).
Soit F le point d'intersection des diagonales AC et BD de la base. Par symétrie, P est situé directement au-dessus de F ; c'est-à-dire que PF est perpendiculaire au plan du carré $ABCD$.
On remarque que $AB = BC = CD = DA = 2a$ et que $PF = 2h$. On veut déterminer la valeur de $2a$.
Soit G le milieu de FC.
On joint P à F et M à G.



On considère les triangles PCF et MCG.
Puisque M est le milieu de PC, alors $MC = \frac{1}{2}PC$.
Puisque G est le milieu de FC, alors $GC = \frac{1}{2}FC$.
Puisque les triangles PCF et MCG ont un angle commun en C et que cet angle est entre deux paires de côtés homologues qui partagent la même proportion, alors les triangles PCF et MCG sont semblables.
Puisque PF est perpendiculaire à FC, alors MG est perpendiculaire à GC.
De plus, $MG = \frac{1}{2}PF = h$ puisque les longueurs des côtés du triangle MCG sont moitié moins que celles du triangle PCF.
Le volume de la pyramide à base carrée $PABCD$ est égal à $\frac{1}{3}(AB^2)(PF) = \frac{1}{3}(2a)^2(2h) = \frac{8}{3}a^2h$.
On peut considérer que le triangle $MBCD$ a pour base le triangle rectangle BCD et pour hauteur MG.
Donc, le volume du triangle $MBCD$ est égal à $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD\right)(MG) = \frac{1}{6}(2a)^2h = \frac{2}{3}a^2h$.
Donc, en fonction de a et h, le volume du solide $PABMD$ est égal à $\frac{8}{3}a^2h - \frac{2}{3}a^2h = 2a^2h$.
Puisque $PABMD$ a un volume de 288, alors $2a^2h = 288$ ou $a^2h = 144$.
On n'a pas encore utilisé le fait que $\angle BMD = 90°$.
Puisque $\angle BMD = 90°$, alors le triangle BMD est rectangle en M. Donc, $BD^2 = BM^2+MD^2$.
Par symétrie, $BM = MD$. Donc, $BD^2 = 2BM^2$.
Puisque le triangle BCD est rectangle en C, alors $BD^2 = BC^2 + CD^2 = 2(2a)^2 = 8a^2$.
Puisque le triangle BGM est rectangle en G, alors $BM^2 = BG^2 + MG^2 = BG^2 + h^2$.
Puisque le triangle BFG est rectangle en F (les diagonales du carré $ABCD$ sont égales et perpendiculaires), alors

$$BG^2 = BF^2 + FG^2 = (\tfrac{1}{2}BD)^2 + (\tfrac{1}{4}AC)^2 = \tfrac{1}{4}BD^2 + \tfrac{1}{16}AC^2 = \tfrac{1}{4}BD^2 + \tfrac{1}{16}BD^2 = \tfrac{5}{16}BD^2 = \tfrac{5}{2}a^2$$

Puisque $2BM^2 = BD^2$, alors $2(BG^2 + h^2) = 8a^2$, d'où $\frac{5}{2}a^2 + h^2 = 4a^2$ ou $h^2 = \frac{3}{2}a^2$, soit $a^2 = \frac{2}{3}h^2$.
Puisque $a^2h = 144$, alors $\frac{2}{3}h^2 \cdot h = 144$ ou $h^3 = 216$, d'où $h = 6$.
Puisque $a^2h = 144$, alors $6a^2 = 144$ ou $a^2 = 24$.
Puisque $a > 0$, alors $a = 2\sqrt{6}$. Donc, $AB = 2a = 4\sqrt{6}$.

RÉPONSE : $4\sqrt{6}$

Partie B

1. (a) L'expression $x^2 - 4$ est une différence de carrés que l'on peut factoriser comme suit : $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$.

   (b) Lorsqu'on reporte $x = 98$ dans l'équation de la partie (a) ci-dessus, on obtient $98^2 - 4 = (98+2)(98-2) = 100 \cdot 96$, d'où $k = 96$.
   Par ailleurs, $98^2 - 4 = 9604 - 4 = 9600 = 100 \cdot 96$, d'où $k = 96$.

   (c) Si $(20-n)(20+n) = 391$, alors $20^2 - n^2 = 391$.
   On a donc $400 - n^2 = 391$, d'où on a $n^2 = 9$ ou $n = \pm 3$.
   Puisque n est positif, alors $n = 3$.
   On peut vérifier que $17 \cdot 23 = 391$.

   (d) On remarque que $3\,999\,991 = 4\,000\,000 - 9 = 2000^2 - 3^2 = (2000+3)(2000-3) = 2003 \cdot 1997$.
   Puisqu'on a exprimé $3\,999\,991$ sous la forme d'un produit de deux entiers strictement positifs qui sont tous deux supérieurs à 1, on peut conclure que $3\,999\,991$ n'est pas un nombre premier.

2. (a) On considère une suite Leistra de premier terme $a_1 = 216$.
   Dans la suite, a_2 doit être un entier pair de la forme $a_2 = \dfrac{a_1}{d} = \dfrac{216}{d}$, d étant un entier entre 10 et 50 inclusivement.
   Puisque $216 = 6^3 = 2^3 \times 3^3$, les diviseurs positifs de 216 sont

   $$1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 27, 36, 54, 72, 108, 216$$

   Dans cette liste, les diviseurs de 216 qui sont entre 10 et 50 sont 12, 18, 24, 27, 36.
   Lorsque 216 est divisé par ces entiers, les quotients sont respectivement 18, 12, 9, 8, 6.
   Puisque a_2 est pair, alors on peut avoir $a_2 = 18$ (avec $d = 12$) ou $a_2 = 12$ (avec $d = 18$) ou $a_2 = 8$ (avec $d = 27$) ou $a_2 = 6$ (avec $d = 36$).
   Si $a_2 = 18$, il n'y a pas de a_3 possible puisque 18 est le seul diviseur de $a_2 = 18$ qui est supérieur à 10, d'où on obtiendrait $a_3 = 1$, ce qui n'est pas pair.
   Si $a_2 = 12$, il n'y a pas de a_3 possible puisque 12 est le seul diviseur de $a_2 = 12$ qui est supérieur à 10, d'où on obtiendrait $a_3 = 1$, ce qui n'est pas pair.
   Si $a_2 = 8$ ou $a_2 = 6$, il n'y a pas de diviseur supérieur à 10.
   Cela signifie qu'aucune suite Leistra de premier terme $a_1 = 216$ ne peut avoir plus de deux termes.
   Donc, il y a quatre suites Leistra avec $a_1 = 216$, soit $216, 18$ et $216, 12$ et $216, 8$ et $216, 6$.

   (b) On considère une suite Leistra de premier terme $a_1 = 2 \times 3^{50}$.
   Dans la suite, a_2 doit être un entier pair de la forme $a_2 = \dfrac{a_1}{d_1} = \dfrac{2 \times 3^{50}}{d_1}$, d_1 étant un entier entre 10 et 50 inclusivement.
   Puisque a_1 ne comprend qu'un seul facteur 2 et puisque a_2 doit être pair, d_1 ne peut être pair.
   Donc, d_1 doit être un diviseur impair de $a_1 = 2 \times 3^{50}$ compris entre 10 et 50 inclusivement.
   Les diviseurs positifs impairs de $a_1 = 2 \times 3^{50}$ sont les entiers de la forme 3^j avec $0 \leq j \leq 50$; autrement dit, les diviseurs positifs impairs de a_1 sont des puissances de 3.
   Les quelques premières puissances de 3 sont 3, 9, 27, 81. La seule de ces dernières qui est située entre 10 et 50 est $3^3 = 27$. Donc, la seule valeur possible de d_1 est $d_1 = 3^3$, d'où $a_2 = \dfrac{a_1}{d_1} = 2 \times 3^{47}$.
   Le prochain terme de la suite est un entier pair strictement positif a_3 de la forme $a_3 = \dfrac{a_2}{d_2}$,

d_2 étant un entier entre 10 et 50 inclusivement. (Bien qu'il y ait encore des diviseurs entre 10 et 50 par lesquels on pourrait diviser pour obtenir un entier pair par la suite, (P3) nous dit que la suite *doit* continuer.)
D'après un argument semblable, $d_2 = 3^3$, d'où $a_3 = 2 \times 3^{44}$.
Puisqu'on obtient chaque terme a_i suivant en divisant son terme précédent par un entier, alors chaque a_i est lui-même un diviseur de a_1, ce qui signifie que les diviseurs de chaque a_i sont un sous-ensemble des diviseurs du terme a_1 initial.
Dans ce cas, cela signifie que 3^3 est le seul diviseur par lequel on pourra diviser dans cette suite. Il faudra donc diviser par 3^3 jusqu'à ce qu'on ne puisse plus le faire.
On prolonge donc la suite Leistra de la manière suivante :

$$2 \times 3^{50}, 2 \times 3^{47}, 2 \times 3^{44}, \ldots, 2 \times 3^8, 2 \times 3^5$$

où le dernier terme occupe le 16ᵉ rang.
On peut à nouveau diviser par 3^3 pour obtenir

$$2 \times 3^{50}, 2 \times 3^{47}, 2 \times 3^{44}, \ldots, 2 \times 3^8, 2 \times 3^5, 2 \times 3^2$$

Donc, le dernier terme est désormais égal à 18. Comme dans la partie (a), on ne peut prolonger la suite.
Donc, avec $a_1 = 2 \times 3^{50}$, la suite est complètement déterminée sans choix. Il y a donc exactement 1 suite Leistra avec $a_1 = 2 \times 3^{50}$.

(c) On considère les suites Leistra avec $a_1 = 2^2 \times 3^{50}$.
Les diviseurs que l'on peut utiliser pour construire la suite Leistra sont les diviseurs de $2^2 \times 3^{50}$ desquels on obtient un quotient pair.
Puisque a_1 comprend deux facteurs 2, ces diviseurs peuvent donc inclure 0 ou 1 facteur 2 afin de préserver la parité du quotient.
Cela signifie que les diviseurs sont de la forme 3^j ou 2×3^j et sont compris entre 10 et 50 inclusivement.
D'après (b), le seul diviseur possible de la forme 3^j dans cet intervalle est $3^3 = 27$.
De plus, les entiers de la forme 2×3^j avec $j = 1, 2, 3$ sont 6, 18, 54, d'où on a donc que le seul diviseur possible dans l'intervalle donné est 18.
Cela signifie qu'on ne peut employer que les diviseurs 27 et 18 dans cette suite Leistra. De plus, on remarque que le diviseur 18 ne peut être employé qu'une seule fois au plus, sinon le quotient restant (et donc le terme suivant) serait impair.
Supposons que le diviseur 18 n'est pas utilisé.
D'après un argument semblable à celui de (b), on obtient la suite

$$2^2 \times 3^{50}, 2^2 \times 3^{47}, 2^2 \times 3^{44}, \ldots, 2^2 \times 3^8, 2^2 \times 3^5, 2^2 \times 3^2$$

Le dernier terme de cette liste est $2^2 \times 3^2 = 36$. Ce terme ne peut être le dernier terme de la suite car $\frac{36}{18} = 2$. Donc, si 36 était le dernier terme, cela contredirait (P3).
Donc, la suite ne peut utiliser uniquement 27 comme diviseur et doit utiliser 18 au moins une fois et au plus une fois (donc exactement une seule fois).
Donc, toute suite Leistra de premier terme $a_1 = 2^2 \times 3^{50}$ doit utiliser le diviseur 18 exactement une fois et le diviseur 27 plusieurs fois.
Si l'on prolonge la suite ci-dessus en utilisant le diviseur 18 pour générer un dernier terme, on obtient

$$2^2 \times 3^{50}, 2^2 \times 3^{47}, 2^2 \times 3^{44}, \ldots, 2^2 \times 3^8, 2^2 \times 3^5, 2^2 \times 3^2, 2$$

Dans ce cas, la suite utilise le diviseur $3^3 = 27$ un total de 16 fois et le diviseur 18 une seule fois.
Le diviseur $3^3 = 27$ ne peut être utilisé 17 fois puisque $(3^3)^{17} = 3^{51}$ et que l'on ne peut obtenir un quotient entier en divisant 2×3^{50} par 3 un total de cinquante et une fois.
De plus, puisque $(3^3)^{15} \times (2 \times 3^2) = 2 \times 3^{47}$ et $\dfrac{2^2 \times 3^{50}}{2 \times 3^{47}} = 2 \times 3^3$, le diviseur $3^3 = 27$ doit être utilisé plus de 15 fois, car s'il n'est utilisé que 15 fois, la suite devra être prolongée en divisant à nouveau par 27.
Donc, les suites Leistra de premier terme $a_1 = 2^2 \times 3^{50}$ ont tous 18 termes et sont générées en divisant seize fois par 27 et une fois par 18. Tout ordre de ces diviseurs générera une suite d'entiers pairs et donc une suite Leistra.
Il y a 17 façons de disposer ces 17 diviseurs car il y a 17 places à choisir pour placer le 18 et les places restantes sont occupées par les 27.
Puisqu'on peut disposer les diviseurs de 17 façons, alors il y a 17 suites Leistra avec $a_1 = 2^2 \times 3^{50}$.

(d) On considère les suites Leistra $a_1 = 2^3 \times 3^{50}$.
Les diviseurs que l'on peut utiliser pour construire la suite Leistra sont les diviseurs de $2^2 \times 3^{50}$ desquels on obtient un quotient pair.
Puisque a_1 comprend trois facteurs 2, ces diviseurs peuvent donc inclure 0, 1 ou 2 facteurs 2 afin de préserver la parité du quotient.
D'après (c), ces diviseurs sont 18 et 27 ainsi que tous les diviseurs de la forme $2^2 \times 3^j$ qui sont compris entre 10 et 50 inclusivement.
Puisque les entiers de la forme $2^2 \times 3^j$ avec $j = 0, 1, 2, 3$ sont 4, 12, 36, 108, les diviseurs possibles dans l'intervalle donné sont 12 et 36.
Donc, ces suites Leistra sont générées à l'aide des diviseurs 27, 18, 12 et 36. Pour compter le nombre de suites Leistra, on compte le nombre de façons dont on peut disposer les diviseurs possibles tout en remarquant qu'au plus deux facteurs 2 peuvent être inclus dans l'ensemble des diviseurs utilisés et au plus cinquante facteurs 3 peuvent être inclus dans l'ensemble des diviseurs utilisés.
À partir du nombre de facteurs 2, on peut voir que soit (i) les diviseurs sont tous impairs, (ii) un diviseur 12 est utilisé, (iii) un diviseur 36 est utilisé, (iv) deux diviseurs 18 sont utilisés ou (v) un diviseur 18 est utilisé. Toute autre combinaison des diviseurs pairs ne remplira pas les conditions des suites Leistra.

<u>1^er^ cas : 27 seulement</u>

On remarque que $27^{16} = (3^3)^{16} = 3^{48}$ et que ce dernier est un diviseur de a_1.
Puisque $27 = 3^3$, on ne peut utiliser 17 ou plus de diviseurs 27 car a_1 ne comprend que 50 facteurs 3.
De plus, on ne peut utiliser 15 ou moins de diviseurs 27 car la suite ne peut être prolongée en divisant par un autre 27.
Puisque $\dfrac{a_1}{(3^3)^{16}} = \dfrac{2^3 \times 3^{50}}{3^{48}} = 2^3 \times 3^2$, alors la suite ne peut utiliser uniquement des diviseurs 27 car on pourrait prolonger la suite qui l'a fait en divisant par 12, par exemple.
Donc, il n'y a pas de suites dans ce cas.

<u>2^e^ cas : 27 et 12</u>

Le diviseur 12 ne peut être utilisé qu'une seule fois, sinon on éliminerait trop de facteurs 2. Puisque $12 \times 27^{15} = 2^2 \times 3^{46}$, $12 \times 27^{16} = 2^2 \times 3^{49}$ et $12 \times 27^{17} = 2^2 \times 3^{52}$, alors on doit utiliser le diviseur 27 exactement seize fois. (Si 27 est utilisé 17 fois, on éliminerait trop de facteurs 3 ; si 27 est utilisé 15 fois, on peut prolonger la suite en divisant à nouveau par

27. Si 27 est utilisé 16 fois, le quotient est égal à $\dfrac{2^3 \times 3^{50}}{2^2 \times 3^{49}} = 2 \times 3 = 6$, ce qui terminerait la suite.)
Donc, les suites Leistra peuvent être générées en utilisant exactement seize diviseurs 27 et un diviseur 12.
Comme on peut utiliser ces diviseurs dans n'importe quel ordre, alors il existe 17 telles suites, comme dans la partie (c).

<u>3e cas : 27 et 36</u>
Le diviseur 36 ne peut être utilisé qu'une seule fois, sinon on éliminerait trop de facteurs 2.
Puisque $36 \times 27^{15} = 2^2 \times 3^{47}$, $36 \times 27^{16} = 2^2 \times 3^{50}$ et $36 \times 27^{17} = 2^2 \times 3^{53}$, alors on doit utiliser le diviseur 27 exactement seize fois.
Donc, les suites Leistra peuvent être générées en utilisant exactement seize diviseurs 27 et un diviseur 36.
Comme on peut utiliser ces diviseurs dans n'importe quel ordre, alors il existe 17 telles suites, comme dans la partie (c).

<u>4e cas : 27 et deux 18</u>
On remarque que 18 ne peut pas être utilisé plus de deux fois et que 18 ne peut pas être combiné avec 12 ou 36, sinon le quotient restant serait soit impair, soit un nombre qui n'est pas un entier.
Puisque $18^2 \times 27^{14} = 2^2 \times 3^{46}$, $18^2 \times 27^{15} = 2^2 \times 3^{49}$ et $18^2 \times 27^{16} = 2^2 \times 3^{52}$, alors on doit utiliser le diviseur 27 exactement quinze fois.
Donc, les suites Leistra peuvent être générées en utilisant exactement quinze diviseurs 27 et deux diviseurs 18.
Il y a $\dbinom{17}{2} = \dfrac{17 \times 16}{2} = 136$ façons de choisir 2 des 17 positions dans la suite des diviseurs pour placer les 18. Les places restantes sont occupées par des 27.
Donc, il existe 136 telles suites.

<u>5e cas : 27 et un 18</u>
Puisque $18 \times 27^{15} = 2 \times 3^{47}$, $18 \times 27^{16} = 2 \times 3^{50}$ et $18 \times 27^{17} = 2 \times 3^{53}$, alors le diviseur 27 doit être utilisé exactement 16 fois, ce qui fait de sorte que $2^2 = 4$ est le dernier terme.
Comme dans les 2e et 3e cas, il y a 17 telles suites.

Ayant examiné toutes les possibilités, il y a donc $17 + 17 + 136 + 17 = 187$ suites Leistra avec $a_1 = 2^3 \times 3^{50}$.

3. (a) En utilisant $f(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$ avec $x = y = 0$, on obtient $f(0) = 2f(0)g(0)$.
On a donc $f(0)(2g(0) - 1) = 0$.
Donc, $f(0) = 0$ ou $g(0) = \frac{1}{2}$.

En utilisant $g(x+y) = g(x)g(y) - f(x)f(y)$ avec $x = y = 0$, on obtient

$$g(0) = (g(0))^2 - (f(0))^2$$

Si $g(0) = \frac{1}{2}$, on obtient $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} - (f(0))^2$, d'où $(f(0))^2 = -\frac{1}{4}$.
Puisque $f(0)$ est un nombre réel, alors $(f(0))^2 \geq 0$. On a donc $(f(0))^2 \neq -\frac{1}{4}$.
Donc, $g(0) \neq \frac{1}{2}$, ce qui signifie que $f(0) = 0$.

Puisque $f(a) \neq 0$, a étant un nombre réel quelconque, on pose $x = a$ et $y = 0$ pour obtenir

$$f(a+0) = f(a)g(0) + g(a)f(0)$$

Puisque $f(0) = 0$, on obtient $f(a) = f(a)g(0)$.
Puisque $f(a) \neq 0$, on peut diviser par $f(a)$ pour obtenir $g(0) = 1$.
Donc, $f(0) = 0$ et $g(0) = 1$.
(On remarque que les fonctions $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \cos x$ remplissent les conditions, donc il existe bien au moins un couple compatible de fonctions.)

(b) *Solution 1*
Soit t un nombre réel.
D'après (a), $f(0) = 0$ et $g(0) = 1$. Donc, $(f(0))^2 + (g(0))^2 = 1$, d'où

$$\begin{aligned}
1 &= (f(t + (-t)))^2 + (g(t + (-t)))^2 \\
&= (f(t)g(-t) + g(t)f(-t))^2 + (g(t)g(-t) - f(t)f(-t))^2 \\
&= (f(t))^2(g(-t))^2 + 2f(t)g(-t)g(t)f(-t) + (g(t))^2(f(-t))^2 \\
&\qquad + (g(t))^2(g(-t))^2 - 2g(t)g(-t)f(t)f(-t) + (f(t))^2(f(-t))^2 \\
&= (f(t))^2(g(-t))^2 + 2f(t)f(-t)g(t)g(-t) + (g(t))^2(f(-t))^2 \\
&\qquad + (g(t))^2(g(-t))^2 - 2f(t)f(-t)g(t)g(-t) + (f(t))^2(f(-t))^2 \\
&= (f(t))^2(g(-t))^2 + (g(t))^2(g(-t))^2 + (f(t))^2(f(-t))^2 + (g(t))^2(f(-t))^2 \\
&= (g(-t))^2((f(t))^2 + (g(t))^2) + (f(-t))^2((f(t))^2 + (g(t))^2) \\
&= ((f(t))^2 + (g(t))^2)((f(-t))^2 + (g(-t))^2) \\
&= h(t)h(-t)
\end{aligned}$$

Puisque $h(t)h(-t) = 1$ pour tous les nombres réels t, alors si l'on pose $t = 5$, on obtient $h(5)h(-5) = 1$, ce qu'il fallait démontrer.

Solution 2
Soit t un nombre réel. Alors

$$\begin{aligned}
h(t)h(-t) &= ((f(t))^2 + (g(t))^2)((f(-t))^2 + (g(-t))^2) \\
&= (f(t))^2(f(-t))^2 + (f(t))^2(g(-t))^2 + (g(t))^2(f(-t))^2 + (g(t))^2(g(-t))^2
\end{aligned}$$

Puisque $f(0) = 0$, alors $f(a + (-t)) = 0$, d'où

$$0 = f(t)g(-t) + g(t)f(-t)$$

Donc, $f(t)g(-t) = -g(t)f(-t)$.
Puisque $g(0) = 1$, alors $g(a + (-t)) = 1$, d'où $g(t)g(-t) - f(t)f(-t) = 1$.
On élève chaque membre au carré pour obtenir

$$\begin{aligned}
1 &= (g(t)g(-t) - f(t)f(-t))^2 \\
&= (g(t))^2(g(-t))^2 - 2g(t)g(-t)f(t)f(-t) + (f(t))^2(f(-t))^2 \\
&= (f(t))^2(f(-t))^2 - f(t)g(-t)g(t)f(-t) - f(t)g(-t)g(t)f(-t) + (g(t))^2(g(-t))^2 \\
&= (f(t))^2(f(-t))^2 - f(t)g(-t)(-f(t)g(-t)) - (-g(t)f(-t))g(t)f(-t) + (g(t))^2(g(-t))^2 \\
&\qquad \text{(en utilisant } f(t)g(-t) = -g(t)f(-t) \text{ deux fois)} \\
&= (f(t))^2(f(-t))^2 + (f(t))^2(g(-t))^2 + (g(t))^2(f(-t))^2 + (g(t))^2(g(-t))^2 \\
&= h(t)h(-t)
\end{aligned}$$

de ci-dessus. On remarque que cela est vérifié par tout nombre réel t.
On pose $a = 5$ pour obtenir $h(5)h(-5) = 1$, ce qu'il fallait démontrer.

(c) D'après (b), on pose $t = 2021$ pour obtenir $h(2021)h(-2021) = 1$.
On va montrer que $h(2021) = 1$.
Puisque $h(2021)h(-2021) = 1$, alors $h(2021) \neq 0$ et $h(-2021) \neq 0$.
Supposons que $h(2021) \neq 1$.
Puisque $h(x) = (f(x))^2 + (g(x))^2$, alors $h(x) \geq 0$ pour tous les nombres réels x.
De plus, puisque $-10 \leq f(x) \leq 10$ et $-10 \leq g(x) \leq 10$ pour tous les nombres réels x, alors

$$h(x) = (f(x))^2 + (g(x))^2 \leq 10^2 + 10^2 = 200$$

pour tous les nombres réels x.
Puisque $h(2021) \neq 1$ et $h(2021) \neq 0$, alors soit $h(2021) > 1$ et $0 < h(-2021) < 1$, soit $h(-2021) > 1$ et $0 < h(2021) < 1$.
Or, pour tout nombre réel s,

$$f(2s) = f(s + s) = f(s)g(s) + g(s)f(s) = 2f(s)g(s)$$

et

$$g(2s) = g(s + s) = g(s)g(s) - f(s)f(s) = (g(s))^2 - (f(s))^2$$

d'où

$$\begin{aligned}
h(2s) &= (f(2s))^2 + (g(2s))^2 \\
&= (2f(s)g(s))^2 + ((g(s))^2 - (f(s))^2)^2 \\
&= 4(f(s))^2(g(s))^2 + (g(s))^4 - 2(f(s))^2(g(s))^2 + (f(s))^4 \\
&= (f(s))^4 + 2(f(s))^2(g(s))^2 + (g(s))^4 \\
&= ((f(s))^2 + (g(s))^2)^2 \\
&= (h(s))^2
\end{aligned}$$

Puisque $h(2s) = (h(s))^2$, alors

$$h(4s) = (h(2s))^2 = ((h(s))^2)^2 = (h(s))^4$$

et

$$h(8s) = (h(4s))^2 = ((h(s))^4)^2 = (h(s))^8$$

De manière générale, si $h(2^k s) = (h(s))^{2^k}$, k étant un entier strictement positif quelconque, alors

$$h(2^{k+1}s) = h(2 \cdot 2^k s) = ((h(s))^{2^k})^2 = (h(s))^{2^{k+1}}$$

On voit donc que $h(2^n s) = (h(s))^{2^n}$ pour tout entier strictement positif n. (On a utilisé un processus appelé *le raisonnement par induction*.)
On sait que $h(2021) > 1$ ou $h(-2021) > 1$.
Si $h(2021) > 1$, soit $b = 2021$ et $c = h(2021)$.
Si $h(-2021) > 1$, soit $b = -2021$ et $c = h(-2021)$.
Puisque $c > 1$, alors c^m croît sans limite au fur et à mesure que m augmente.
En particulier, $c^m > 200$ lorsque $m > \log_c 200$.
On sait que $h(2^n b) = c^{2^n}$ pour tout entier strictement positif n.
Donc, lorsque $2^n > \log_c 200$, on a $h(2^n b) > 200$, ce qui n'est pas possible puisqu'on a vu plus haut que $h(x) \leq 200$ pour tous les nombres réels x.
On a donc une contradiction. Cela veut dire que la supposition que $h(2021) \neq 1$ ne peut être vraie. Donc, $h(2021) = 1$. (En fait, la modification de l'argument ci-dessus montre que $h(x) = 1$ pour tous les nombres réels x.)