Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur

le mercredi 17 novembre 2021

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 18 novembre 2021

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 2 heures

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Le questionnaire est divisé en deux parties. Dans chaque partie, les questions sont à peu près en ordre croissant de difficulté. Les premiers problèmes de la partie B sont probablement plus faciles que les derniers de la partie A.

PARTIE A

1. Cette partie est composée de six questions de 5 points chacune.
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse.** Le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

PARTIE B

1. Cette partie est composée de trois questions de 10 points chacune.
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse.** Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Inscrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille insérée.
3. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, et le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca. Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur

Remarques :

1. Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Inscrire toutes les solutions dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.
4. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
5. Les figures ne sont pas dessinées à l'échelle. Elles servent d'aide seulement.
6. Aucun élève ne peut passer le Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur et le Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire la même année.

PARTIE A

Pour chaque problème dans la partie A, le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée pour du travail pertinent inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

Renseignement utile pour la partie A :
Le volume d'une pyramide à base carrée est égal à un tiers multiplié par l'aire de sa base multipliée par sa hauteur. De même, le volume d'une pyramide à base triangulaire est égal à un tiers multiplié par l'aire de sa base multipliée par sa hauteur.

1. Dans la figure ci-contre, 10 cure-dents sont disposés de manière à former une rangée de 3 carrés. Combien de cure-dents faut-il au total pour former une rangée de 11 carrés ?

2. L'opération ∇ est définie par $a\nabla b = (a+1)(b-2)$, a et b étant des nombres réels. Par exemple, $4\nabla 5 = (4+1)(5-2) = 15$. Si $5\nabla x = 30$, quelle est la valeur de x ?

3. On considère les points $P(0,0)$, $Q(4,0)$ et $R(1,2)$. La droite d'équation $y = mx + b$ est parallèle à PR et passe au milieu de QR. Quelle est la valeur de b ?

4. Dans un essai clinique, 1000 personnes reçoivent le médicament A et 1000 autres personnes reçoivent le médicament B. On demande aux 2000 personnes si elles ont des effets secondaires graves, des effets secondaires légers ou aucun effet secondaire. Les résultats de l'essai sont résumés ci-dessous :

   (i) La probabilité pour qu'une personne choisie au hasard ait des effets secondaires graves est de $\frac{3}{25}$.

   (ii) La probabilité pour qu'une personne choisie au hasard parmi celles présentant des effets secondaires graves ait reçu le médicament A est de $\frac{2}{3}$.

   (iii) La probabilité pour qu'une personne choisie au hasard parmi celles ayant reçu le médicament A présente des effets secondaires graves ou légers est de $\frac{19}{100}$.

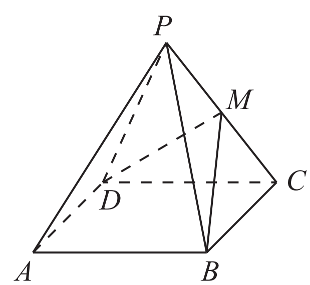
   (iv) La probabilité pour qu'une personne choisie au hasard parmi celles ayant reçu le médicament B présente des effets secondaires graves ou légers est de $\frac{3}{20}$.

   Quelle est la probabilité pour qu'une personne choisie au hasard parmi celles présentant des effets secondaires légers ait reçu le médicament B ?

5. Quels sont tous les nombres réels $x > 0$ qui vérifient l'équation ci-dessous ?

$$\log_2(x^2) + 2\log_x 8 = \frac{392}{\log_2(x^3) + 20\log_x(32)}$$

6. Dans la figure ci-contre, $PABCD$ est une pyramide dont la base est le carré $ABCD$ et dont les arêtes sont telles que $PA = PB = PC = PD$. Supposons que M est le milieu de PC et que $\angle BMD = 90°$. On enlève de la pyramide $PABCD$ la pyramide à base triangulaire $MBCD$ en coupant le long du triangle défini par les points M, B et D. Le solide résultant $PABMD$ a un volume de 288. Quelle est la longueur de AB ?



PARTIE B

Pour chaque question dans la partie B, la solution doit être bien organisée et doit aussi présenter certains mots d'explication ou de justification. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

1. (a) À l'aide de la factorisation, exprimer $x^2 - 4$ sous la forme d'un produit de deux expressions linéaires.

   (b) Déterminer l'entier k pour lequel $98^2 - 4 = 100k$.

   (c) Déterminer l'entier strictement positif n pour lequel $(20 - n)(20 + n) = 391$.

   (d) Démontrer que 3 999 991 n'est pas un nombre premier. (Un *nombre premier* est un entier strictement positif supérieur à 1 qui admet exactement deux diviseurs distincts, soit 1 et lui-même. Par exemple, 7 est un nombre premier.)

2. Étant donné un entier strictement positif n, une *suite Leistra* est une suite

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$$

de n termes qui remplit les conditions suivantes :

(P1) Chaque terme $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$ est un entier pair strictement positif.

(P2) Chaque terme $a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$ est obtenu en divisant le terme précédent de la suite par un entier entre 10 et 50 inclusivement. (Il n'est pas nécessaire que les diviseurs utilisés dans une suite soient tous pareils).

(P3) Il n'y a pas d'entier m entre 10 et 50, inclusivement, pour lequel $\dfrac{a_n}{m}$ est un entier pair.

Par exemple,

Suites Leistra
1000, 50, 2
1000, 100, 4
3000, 300, 30, 2
106

Suites qui ne sont pas des suites Leistra	Raison
1000, 50, 1	contredit (P1) – comprend un entier impair
1000, 200, 4	contredit (P2) – le diviseur 5 n'est pas situé entre 10 et 50 ($\frac{1000}{200} = 5$)
3000, 300, 30	contredit (P3) – la suite doit être prolongée car $\frac{30}{15} = 2$
104	contredit (P3) – la suite doit être prolongée car $\frac{104}{13} = 8$

(a) Déterminer toutes les suites Leistra avec $a_1 = 216$.

(b) Combien y a-t-il de suites Leistra avec $a_1 = 2 \times 3^{50}$?

(c) Combien y a-t-il de suites Leistra avec $a_1 = 2^2 \times 3^{50}$?

(d) Déterminer le nombre de suites Leistra avec $a_1 = 2^3 \times 3^{50}$.

(Pour les parties (b) et (c), on attribue le maximum de points pour une bonne réponse. Une partie des points pourrait être attribuée pour une solution incomplète ou pour du travail menant à une réponse incorrecte.)

3. Un couple de fonctions $f(x)$ et $g(x)$ est un *couple compatible* lorsque
   (i) $f(x)$ est un nombre réel pour tous les nombres réels x,
   (ii) $g(x)$ est un nombre réel pour tous les nombres réels x,
   (iii) $f(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$ pour tous les nombres réels x et y,
   (iv) $g(x+y) = g(x)g(y) - f(x)f(y)$ pour tous les nombres réels x et y,
   (v) $f(a) \neq 0$, a étant un nombre réel quelconque.

   Pour chaque couple compatible de fonctions $f(x)$ et $g(x)$:
   (a) Déterminer les valeurs de $f(0)$ et $g(0)$.
   (b) Si $h(x) = (f(x))^2 + (g(x))^2$ pour tous les nombres réels x, déterminer la valeur de $h(5)h(-5)$.
   (c) Si $-10 \leq f(x) \leq 10$ et $-10 \leq g(x) \leq 10$ pour tous les nombres réels x, déterminer la valeur de $h(2021)$.

Concours
canadien de
mathématiques
de niveau
supérieur
2021
(français)