Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire 2021

le mercredi 17 novembre 2021
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 18 novembre 2021
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

Partie A

1. L'aire d'un rectangle est égale à sa longueur multipliée par sa largeur. Donc, la largeur du rectangle est égale à l'aire divisée par la longueur.
   La largeur du rectangle A est égale à $\dfrac{36 \text{ cm}^2}{6 \text{ cm}} = 6$ cm.
   La largeur du rectangle B est égale à $\dfrac{36 \text{ cm}^2}{12 \text{ cm}} = 3$ cm.
   La largeur du rectangle C est égale à $\dfrac{36 \text{ cm}^2}{9 \text{ cm}} = 4$ cm.
   La plus petite de ces largeurs est de 3 cm. Donc, $x = 3$.
   (Puisque ces trois rectangles ont la même aire, on remarque que le rectangle ayant la plus petite largeur est celui ayant la plus grande longueur.)

   Réponse : $x = 3$

2. Les nombres premiers supérieurs à 10 et inférieurs à 20 sont 11, 13, 17, 19.
   (Puisque $12 = 2 \times 6$, $14 = 2 \times 7$, $15 = 3 \times 5$, $16 = 2 \times 8$ et $18 = 2 \times 9$, aucun de ces entiers n'est un nombre premier.)
   Ces nombres premiers ont une somme de
   $$11 + 13 + 17 + 19 = (11 + 19) + (13 + 17) = 30 + 30 = 60$$

   Réponse : 60

3. À partir du 22e étage, Taya et Jeanne montent chacune de $n - 22$ étages pour atteindre le $n^{\text{ième}}$ étage.
   Puisque Taya monte de chaque étage à l'étage suivant en 15 secondes, cela lui prend $15 \times (n - 22)$ secondes.
   Puisque Jeanne attend pendant 2 minutes, alors elle attend 120 secondes. Puisque Jeanne monte de chaque étage à l'étage suivant en 3 secondes, elle atteindra le $n^{\text{ième}}$ étage en $120 + 3 \times (n - 22)$ secondes.
   Puisque Taya et Jeanne atteignent le $n^{\text{ième}}$ étage exactement au même moment, alors
   $$\begin{aligned} 15 \times (n - 22) &= 120 + 3 \times (n - 22) \\ 15 \times (n - 22) - 3 \times (n - 2) &= 120 \\ 12 \times (n - 22) &= 120 \\ n - 22 &= 10 \end{aligned}$$
   Donc, $n = 32$.

   Réponse : $n = 32$

4. Puisque l'angle DQC est un angle plat, $\angle RQP = 180^\circ - \angle RQD - \angle PQC = 180^\circ - w^\circ - x^\circ$.
   Puisque l'angle BPC est un angle plat, $\angle RPQ = 180^\circ - \angle RPB - \angle QPC = 180^\circ - z^\circ - y^\circ$.
   Puisque les mesures des trois angles du triangle PQR ont une somme de 180°, alors
   $$\begin{aligned} \angle RQP + \angle RPQ + \angle PRQ &= 180^\circ \\ (180^\circ - w^\circ - x^\circ) + (180^\circ - z^\circ - y^\circ) + 30^\circ &= 180^\circ \\ 390^\circ - w^\circ - x^\circ - y^\circ - z^\circ &= 180^\circ \\ 210^\circ &= w^\circ + x^\circ + y^\circ + z^\circ \end{aligned}$$
   Donc, $w + x + y + z = 210$.

   Réponse : 210

5. D'après les règles, les 7 premiers nombres de la liste sont :

$$\mathbf{3},\ \mathbf{4},\ \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}},\ \frac{(5/3)+1}{4} = \frac{8/3}{4} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}},\ \frac{(2/3)+1}{5/3} = \frac{5/3}{5/3} = \mathbf{1},\ \frac{1+1}{2/3} = \frac{2}{2/3} = \mathbf{3},\ \frac{3+1}{1} = \mathbf{4}$$

Puisque le 6e nombre est égal au 1er nombre, que le 7e nombre est égal au 2e nombre et que chaque nombre de la liste dépend des deux nombres précédents, alors le 8e nombre est égal au 3e nombre, ce qui signifie que le 9e nombre sera égal au 4e nombre et ainsi de suite.
Autrement dit, la liste se répétera tous les 5 nombres puisque chaque groupe de 5 nombres est produit exactement de la même manière que les 5 nombres précédents.
Les 5 premiers nombres ont une somme de $3+4+\frac{5}{3}+\frac{2}{3}+1 = 8+\frac{7}{3} = 10\frac{1}{3}$.
Puisque $2021 \div 10\frac{1}{3} \approx 195{,}6$, alors 195 groupes de 5 nombres auront toujours une somme inférieure à 2021.
En fait, puisque $195 \times 10\frac{1}{3} = 1950 + 65 = 2015$ et $195 \times 5 = 975$, alors les 975 premiers nombres de la liste ont une somme de 2015.
Dans un tableau, on écrit les prochains termes et on calcule la « somme jusqu'à ce point » jusqu'à ce qu'on atteigne une somme qui soit un entier impair supérieur à 2021 :

Rang du terme	976	977	978	979	980	981	982
Terme	3	4	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	3	4
Somme jusqu'à ce point	2018	2022	$2023\frac{2}{3}$	$2024\frac{1}{3}$	$2025\frac{1}{3}$	$2028\frac{1}{3}$	$2032\frac{1}{3}$

Rang du terme	983	984	985	986	987	988	989
Terme	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	3	4	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$
Somme jusqu'à ce point	2034	$2034\frac{2}{3}$	$2035\frac{2}{3}$	$2038\frac{2}{3}$	$2042\frac{2}{3}$	$2044\frac{1}{3}$	2045

Donc, le plus petit entier strictement positif N pour lequel la somme des N premiers nombres de la liste est égale à un entier impair supérieur à 2021 est $N = 989$, ce qui correspond à une somme de 2045.

Réponse : 989

6. *Solution 1*
Supposons que Dragomir retire les chaussettes une par une. Il y a 12 chaussettes qu'il peut enlever en premier, puis 11 chaussettes en deuxième, puis 10 chaussettes en troisième, puis 9 chaussettes en quatrième.
Cela signifie qu'il y a $12 \times 11 \times 10 \times 9$ manières dont il peut retirer 4 chaussettes une par une.
Supposons qu'il y ait exactement une paire de chaussettes parmi les 4 chaussettes retirées. Il y a six possibilités différentes qui nous permettent d'obtenir ce résultat : la première et la deuxième chaussette forment une paire, la première et la troisième forment une paire, la première et la quatrième forment une paire, la deuxième et la troisième forment une paire, la deuxième et la quatrième forment une paire, ou la troisième et la quatrième forment une paire.
On détermine le nombre de manières dont chacune de ces possibilités peut se produire.

<u>1^er cas : la première et la deuxième chaussette forment une paire</u>
Il y a 12 chaussettes qu'il peut choisir en premier (aucune restriction).
Il y a 1 chaussette qu'il peut choisir en deuxième (la jumelle de la première).
Il y a 10 chaussettes qu'il peut choisir en troisième (n'importe laquelle des 10 chaussettes restantes).
Il y a 8 chaussettes qu'il peut choisir en quatrième (n'importe laquelle des 9 chaussettes restantes autres que la jumelle de la troisième).
Donc, cette possibilité peut se produire de $12 \times 1 \times 10 \times 8$ manières.

<u>2^e cas : la première et la troisième chaussette forment une paire</u>
Il y a 12 chaussettes qu'il peut choisir en premier (aucune restriction).
Il y a 10 chaussettes qu'il peut choisir en deuxième (toutes sauf la jumelle de la première).
Il y a 1 chaussette qu'il peut choisir en troisième (la jumelle de la première).
Il y a 8 chaussettes qu'il peut choisir en quatrième (toutes sauf la jumelle de la deuxième).
Donc, cette possibilité peut se produire de $12 \times 10 \times 1 \times 8$ manières.

<u>3^e cas : la première et la quatrième chaussette forment une paire</u>
Il y a 12 chaussettes qu'il peut choisir en premier (aucune restriction).
Il y a 10 chaussettes qu'il peut choisir en deuxième (toutes sauf la jumelle de la première).
Il y a 8 chaussettes qu'il peut choisir en troisième (toutes sauf la jumelle de la première et la jumelle de la deuxième).
Il y a 1 chaussette qu'il peut choisir en quatrième (la jumelle de la première).
Donc, cette possibilité peut se produire de $12 \times 10 \times 8 \times 1$ manières.

<u>4^e cas : la deuxième et la troisième chaussette forment une paire</u>
Il y a 12 chaussettes qu'il peut choisir en premier (aucune restriction).
Il y a 10 chaussettes qu'il peut choisir en deuxième (toutes sauf la jumelle de la première).
Il y a 1 chaussette qu'il peut choisir en troisième (la jumelle de la deuxième).
Il y a 8 chaussettes qu'il peut choisir en quatrième (toutes sauf la jumelle de la première).
Donc, cette possibilité peut se produire de $12 \times 10 \times 1 \times 8$ manières.

<u>5^e cas : la deuxième et la quatrième chaussette forment une paire</u>
Il y a 12 chaussettes qu'il peut choisir en premier (aucune restriction).
Il y a 10 chaussettes qu'il peut choisir en deuxième (toutes sauf la jumelle de la première).
Il y a 8 chaussettes qu'il peut choisir en troisième (toutes sauf la jumelle de la première et la jumelle de la deuxième).
Il y a 1 chaussette qu'il peut choisir en quatrième (la jumelle de la deuxième).
Donc, cette possibilité peut se produire de $12 \times 10 \times 8 \times 1$ manières.

<u>6^e cas : la troisième et la quatrième chaussette forment une paire</u>
Il y a 12 chaussettes qu'il peut choisir en premier (aucune restriction).
Il y a 10 chaussettes qu'il peut choisir en deuxième (toutes sauf la jumelle de la première).
Il y a 8 chaussettes qu'il peut choisir en troisième (toutes sauf la jumelle de la première et la jumelle de la deuxième).
Il y a 1 chaussette qu'il peut choisir en quatrième (la jumelle de la troisième).
Donc, cette possibilité peut se produire de $12 \times 10 \times 8 \times 1$ manières.

Dans chacun des six cas, il existe $12 \times 10 \times 8 \times 1$ manières de choisir les chaussettes.
Donc, la probabilité pour qu'il y ait exactement une paire de chaussettes identiques est égale à $\dfrac{6 \times 12 \times 10 \times 8 \times 1}{12 \times 11 \times 10 \times 9} = \dfrac{6 \times 8}{11 \times 9} = \dfrac{2 \times 8}{11 \times 3} = \dfrac{16}{33}$.

Solution 2
Puisqu'il y a 12 chaussettes dans le tiroir, alors il y a

$$\binom{12}{4} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 11 \times 5 \times 9 = 495$$

manières de choisir 4 chaussettes.
Ensuite, on compte le nombre de façons dont les 4 chaussettes choisies peuvent comprendre exactement une seule paire de chaussettes.
Il y a 6 paires possibles qui peuvent être choisies.
Les 2 chaussettes restantes doivent provenir de 2 paires différentes parmi les 5 paires restantes.
Si l'on nomme les paires restantes A, B, C, D, E, il y a 10 combinaisons possibles de deux paires parmi lesquelles on peut choisir ces 2 chaussettes : AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE. (On pourrait également utiliser un coefficient binomial pour calculer ce total.)
Pour chacune des 2 paires parmi lesquelles seront choisies ces 2 chaussettes, il y a en fait 2 chaussettes à choisir.
Donc, il y a $6 \times 10 \times 2 \times 2 = 240$ façons de choisir les 4 chaussettes de manière à remplir les conditions.

Cela signifie que la probabilité pour qu'il y ait exactement une paire de chaussettes identiques est égale à $\dfrac{240}{495} = \dfrac{16 \times 15}{33 \times 15} = \dfrac{16}{33}$.

Solution 3
Puisqu'il y a 12 chaussettes dans le tiroir, alors il y a

$$\binom{12}{4} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 11 \times 5 \times 9 = 495$$

manières de choisir 4 chaussettes.
Ces 4 chaussettes peuvent comprendre 0, 1, ou 2 paires de chaussettes identiques.
D'abord, on compte le nombre de façons dont les 4 chaussettes choisies peuvent comprendre aucune paire de chaussettes identiques ou 2 paires de chaussettes identiques. Ensuite, on soustrait ce nombre du nombre total de façons dont on pourrait choisir les 4 chaussettes pour obtenir le nombre de façons de choisir 1 paire de chaussettes identiques.

Pour choisir 4 chaussettes dont aucune n'est identique aux autres, on choisit 4 des 6 paires et on choisit 1 des 2 chaussettes de chaque paire.
Il y a $\dbinom{6}{4} = \dfrac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 15$ façons de choisir 4 des 6 paires et $2^4 = 16$ façons de choisir 1 des 2 chaussettes de chacune des 4 paires.

Donc, il y a $15 \times 16 = 240$ façons de choisir 4 chaussettes de manière qu'il n'y ait aucune paire de chaussettes identiques.

Pour choisir 2 paires de chaussettes identiques, on choisit 2 des 6 paires et on choisit les deux chaussettes de chaque paire.
Il y a $\binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$ façons de choisir 2 des 6 paires et une seule façon de choisir les deux chaussettes de chaque paire.
Donc, il y a $15 \times 1 = 15$ façons de choisir 4 chaussettes de manière qu'il y ait exactement 2 paires de chaussettes identiques.

Cela signifie qu'il y a $495 - 240 - 15 = 240$ façons de choisir 4 chaussettes de manière qu'il y ait exactement 1 paire de chaussettes identiques.

Cela signifie que la probabilité pour qu'il y ait exactement une paire de chaussettes identiques est égale à $\frac{240}{495} = \frac{16 \times 15}{33 \times 15} = \frac{16}{33}$.

Réponse : $\frac{16}{33}$

Partie B

1. (a) Puisque Karol utilise 28 tasses de Gridards et que la recette demande 4 tasses de Gridards, alors il a dû répéter la recette $28 \div 4 = 7$ fois.
Puisque la recette demande 3 tasses de Blurpos, et que la recette a été répétée 7 fois, il a dû utiliser $7 \times 3 = 21$ tasses de Blurpos.

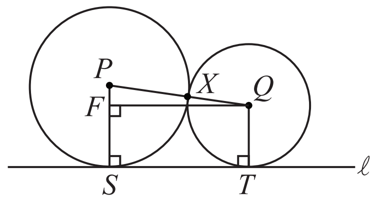
(b) Supposons que Karol a utilisé 48 tasses de Gridards.
Puisque $48 \div 4 = 12$, alors il a répété sa recette 12 fois et a donc utilisé $12 \times 3 = 36$ tasses de Blurpos.
Supposons plutôt que Karol utilise 48 tasses de Blurpos.
Puisque $48 \div 3 = 16$, alors il a répété sa recette 16 fois et a donc utilisé $16 \times 4 = 64$ tasses de Gridards.
Donc, les deux valeurs possibles de N sont 36 et 64.

(c) Karol commence avec 64 tasses de Gridards et 42 tasses de Blurpos. L'un de ces ingrédients sera « l'ingrédient limitant » ; c'est-à-dire que lorsque Karol répétera sa recette, il épuisera probablement l'un des ingrédients avant l'autre.
Si Karol a utilisé les 64 tasses de Gridards, alors il a dû répéter sa recette $64 \div 4 = 16$ fois.
Si Karol a utilisé les 42 tasses de Blurpos, alors il a dû répéter sa recette $42 \div 3 = 14$ fois.
Donc, il peut répéter la recette un maximum de 14 fois avant qu'il n'épuise l'un des ingrédients (dans ce cas, les Blurpos).
Karol prépare 60 Zafards à chaque fois qu'il utilise sa recette.
Donc, lorsque Karol répète sa recette 14 fois, il prépare $14 \times 60 = 840$ Zafards en tout.

(d) Supposons que Karol a utilisé sa recette une seule fois pour préparer des Zafards.
Autrement dit, on suppose que Karol a utilisé 4 tasses de Gridards et 3 tasses de Blurpos pour préparer 60 Zafards.
Il vend chaque Zafard au prix de 0,50 \$, ce qui lui rapporte $60 \times 0{,}50\ \$ = 30{,}00\ \$$.
Il réalise un profit de 0,30 \$ sur chaque Zafard vendu, ce qui signifie qu'il réalise un profit total de $60 \times 0{,}30\$ = 18{,}00\ \$$.
Puisque la vente des Zafards lui rapporte 30,00 \$ et que cela correspond à un profit total de 18,00 \$, alors les ingrédients ont dû lui coûter $30{,}00\ \$ - 18{,}00\ \$ = 12{,}00\ \$$.
Puisque chaque tasse de Gridards lui coûte 1,80 \$, alors les Gridards lui ont coûté $4 \times 1{,}80\ \$ = 7{,}20\ \$$ en tout.
Cela signifie que les Blurpos ont dû lui coûter $12{,}00\ \$ - 7{,}20\ \$ = 4{,}80\ \$$.
Puisqu'il a utilisé 3 tasses de Blurpos, alors chaque tasse de Blurpos lui a coûté $4{,}80\ \$ \div 3 = 1{,}60\ \$$.

2. (a) Puisque $ABCD$ est un rectangle et que $AB = 3$, alors $DC = 3$.
Donc, $DE = DC + CE = 3 + 6 = 9$.
Le trapèze $ABED$ a une aire de 48.
Puisque $ABCD$ est un rectangle, alors AD est perpendiculaire à DE, d'où on a donc que AD est une hauteur du trapèze $ABED$.
L'aire du trapèze $ABED$ est égale à $\frac{1}{2}(AB + DE) \times AD$.
(Par ailleurs, on pourrait remarquer que le trapèze $ABED$ est composé d'un rectangle ayant une base de 3 et dont la hauteur est inconnue, et d'un triangle rectangle ayant une base de 6 et dont la hauteur est égale à celle du rectangle et est également inconnue.)
Donc, $\frac{1}{2}(3 + 9) \times AD = 48$, ou $6 \times AD = 48$, d'où $AD = 8$.
Puisque $ABCD$ est un rectangle, alors $BC = AD = 8$.
Enfin, d'après le théorème de Pythagore, $BE = \sqrt{BC^2 + CE^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$.

(b) Au point Q, on abaisse une perpendiculaire jusqu'au point F sur PS.



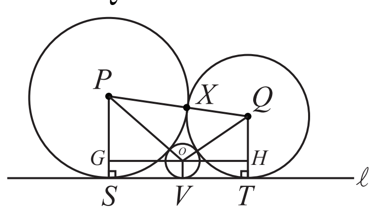
Le quadrilatère $FQTS$ a trois angles droits et doit donc être un rectangle.
Donc, $FS = QT$. Puisque QT est un rayon, alors $FS = QT = 16$.
Puisque PS est un rayon, alors $PS = 25$.
Donc, $PF = PS - FS = 25 - 16 = 9$.
On remarque que $PQ = PX + XQ = 25 + 16 = 41$ (les deux sont des rayons).
Le triangle PFQ est rectangle en F. Donc, d'après le théorème de Pythagore, on a

$$FQ = \sqrt{PQ^2 - PF^2} = \sqrt{41^2 - 9^2} = \sqrt{1681 - 81} = 40$$

Puisque $FQTS$ est un rectangle, $ST = FQ = 40$.
Enfin, l'aire du trapèze $PQTS$ est égale à

$$\tfrac{1}{2}(PS + QT) \times ST = \tfrac{1}{2}(25 + 16) \times 40 = 41 \times 20 = 820$$

(c) Supposons que le cercle de rayon r a pour centre O et qu'il touche la droite d au point V. On joint P à O et Q à O.
On joint V à O. Puisque le cercle est tangent à d au point V, alors OV est perpendiculaire à d. Au point O, on abaisse une perpendiculaire jusqu'au point G sur PS et une autre perpendiculaire jusqu'au point H sur QT.



Comme dans la partie (b), $GOVS$ est un rectangle avec $GS = OV = r$ et $SV = GO$.
Puisque $PS = 25$, alors $PG = PS - GS = 25 - r$.
Puisque PO relie les centres de deux cercles tangents extérieurement, alors la longueur de PO est égale à la somme des rayons des deux cercles. Autrement dit, $PO = 25 + r$.
En appliquant le théorème de Pythagore au triangle POG, on a

$$GO^2 = PO^2 - PG^2 = (25 + r)^2 - (25 - r)^2 = (625 + 50r + r^2) - (625 - 50r + r^2) = 100r$$

Puisque $GO > 0$, alors $GO = \sqrt{100r} = \sqrt{100} \times \sqrt{r} = 10\sqrt{r}$.
Donc, $SV = GO = 10\sqrt{r}$.
On utilise une analyse semblable,

$$HO^2 = QO^2 - QH^2 = (16 + r)^2 - (16 - r)^2 = (256 + 32r + r^2) - (256 - 32r + r^2) = 64r$$

Puisque $HO > 0$, alors $HO = \sqrt{64r} = \sqrt{64} \times \sqrt{r} = 8\sqrt{r}$.
Donc, $TV = HO = 8\sqrt{r}$.
D'après la partie (b), $ST = 40$. Donc, $SV + TV = 40$.
Donc, $10\sqrt{r} + 8\sqrt{r} = 40$ ou $18\sqrt{r} = 40$, d'où $\sqrt{r} = \frac{40}{18} = \frac{20}{9}$.
Donc, $r = \left(\frac{20}{9}\right)^2 = \frac{400}{81}$.

3. (a) L'élément clé de la stratégie de Baptiste est de choisir 2 au tour #2 (son premier tour).
Au tour #1, Alphonse doit choisir 1 et porte le total cumulé à 1.
Au tour #2, Baptiste choisit 2 et porte le total cumulé à 3.
Au tour #3, Alphonse peut choisir 1, 2 ou 3, ce qui porterait respectivement le total cumulé à 4, à 5 ou à 6.
Au tour #4, Baptiste peut choisir 1, 2, 3 ou 4, et choisit donc 4, 3 ou 2 (correspondant respectivement aux choix 1, 2, ou 3 d'Alphonse) pour porter le total cumulé à 8 dans chacun des cas.
Donc, si Baptiste choisit 2 au tour #2 et choisit ensuite de manière appropriée au tour #4, il gagnera toujours.

(b) Alphonse a une stratégie gagnante lorsque $N = 17$.
Pour le démontrer, on utilise le fait que $1 + 4 + 5 + 7 = 17$.

Au tour #1, Alphonse doit choisir 1.

Au tour #2, Baptiste peut choisir 1 ou 2 ; au tour #3, Alphonse peut choisir 1, 2 ou 3.
Quel que soit le choix de Baptiste au tour #2, Alphonse peut choisir un nombre pour que la somme des nombres choisis pendant ces deux tours soit égale à 4.
(Si Baptiste choisit 1, Alphonse choisit 3. Si Baptiste choisit 2, Alphonse choisit 2.)
Ainsi, Alphonse peut s'assurer de porter le total cumulé après les trois premiers tours à $1 + 4 = 5$.

Au tour #4, Baptiste peut choisir 1, 2, 3 ou 4 ; au tour #5, Alphonse peut choisir 1, 2, 3, 4 ou 5.
Quel que soit le choix de Baptiste au tour #4, Alphonse peut choisir un nombre pour que la somme des nombres choisis pendant ces deux tours soit égale à 5.
(Si Baptiste choisit 1, 2, 3 ou 4, Alphonse choisit respectivement 4, 3, 2 ou 1.)
Ainsi, Alphonse peut s'assurer de porter le total cumulé après les cinq premiers tours à $5 + 5 = 10$.

Au tour #6, Baptiste peut choisir 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 ; au tour #7, Alphonse peut choisir 1, 2, 3, 4, 5, 6 ou 7.
Quel que soit le choix de Baptiste au tour #6, Alphonse peut choisir un nombre pour que la somme des nombres choisis pendant ces deux tours soit égale à 7.
(Si Baptiste choisit x (avec $1 \leq x \leq 6$), Alphonse choisit $7 - x$. Remarquons que $1 \leq 7 - x \leq 6$.)
Ainsi, Alphonse peut s'assurer de porter le total cumulé après les sept tours à $10 + 7 = 17$.
Remarquons également qu'en suivant cette méthode, Baptiste peut porter le total cumulé après le tour #6 à $10 + 6 = 16$ au plus. Il ne peut donc pas défaire la stratégie d'Alphonse en gagnant plus tôt.

Donc, Alphonse a une stratégie gagnante lorsque $N = 17$.

(c) Lorsque $N = 1$, Alphonse gagne automatiquement.
Lorsque $N = 2$ ou $N = 3$, Baptiste a une stratégie gagnante en choisissant respectivement 1 ou 2 à son premier tour.
Lorsque $N = 4$ ou $N = 5$, Alphonse a une stratégie gagnante en choisissant 2 ou 3 si Baptiste choisit 1 (ce qui porte le total cumulé précédent à 2) ou en choisissant 1 ou 2 si Baptiste choisit 2 (ce qui porte le total cumulé précédent à 3).
Lorsque $N = 6$, Baptiste a une stratégie gagnante en choisissant 1 au tour #2, ce qui oblige Alphonse à porter le total cumulé ou à 3, ou à 4, ou à 5 après le tour #3, après quoi Baptiste peut gagner en choisissant 3, 2 ou 1 au tour #4.

Lorsque $N = 7$, Baptiste a une stratégie gagnante en choisissant 1 au tour #2, ce qui oblige Alphonse à porter le total cumulé ou à 3, ou à 4, ou à 5 après le tour #3, après quoi Baptiste peut gagner en choisissant 4, 3 ou 2 au tour #4.
On a déjà évalué le cas $N = 8$ dans la partie (a).
À l'aide d'arguments semblables, on peut démontrer qu'Alphonse a une stratégie gagnante lorsque $N = 9$, $N = 10$ et $N = 11$, et que Baptiste a une stratégie gagnante lorsque $N = 12$, $N = 13$, $N = 14$ et $N = 15$.
Jusqu'à maintenant, on a :

Alphonse a une stratégie gagnante	Baptiste a une stratégie gagnante
$N = 1$	$N = 2, 3$
$N = 4, 5$	$N = 6, 7, 8$
$N = 9, 10, 11$	$N = 12, 13, 14, 15$

Ces petites valeurs de N suggèrent qu'Alphonse a une stratégie gagnante pour k valeurs de N à partir de $N = k^2$ (c'est-à-dire pour $N = k^2$ jusqu'à $N = k^2 + k - 1$ inclusivement) et que Baptiste a une stratégie gagnante pour $k+1$ valeurs de N jusqu'à $N = (k+1)^2 - 1$ (c'est-à-dire pour $N = k^2 + k$ jusqu'à $N = k^2 + 2k$ inclusivement).

On remarque que $45^2 = 2025$ et que $46^2 = 2116$.
D'après nos hypothèses, on pourrait supposer que Baptiste a une stratégie gagnante lorsque

$$N = 1980, 1981, 1982, \ldots, 2023, 2024$$

tandis qu'Alphonse a une stratégie gagnante lorsque

$$N = 2025, 2026, 2027, \ldots, 2068, 2069$$

et Baptiste a une stratégie gagnante lorsque

$$N = 2070, 2071, 2072, \ldots, 2114, 2115$$

Si cela s'avère vrai, alors $m = 2069$ est le plus petit entier strictement positif m (avec $m > 2021$) pour lequel Alphonse a une stratégie gagnante lorsque $N = m$ et Baptiste a une stratégie gagnante lorsque $N = m + 1$.
Pour démontrer cela, on doit montrer qu'aucune des valeurs de $m = 2022$ à $m = 2068$ ne remplit les conditions alors que $m = 2069$ les remplit. Pour le faire, on démontre que Baptiste a une stratégie gagnante lorsque $N = 2022$ et $N = 2023$, qu'Alphonse a une stratégie gagnante pour $N = 2025$ jusqu'à $N = 2069$, et que Baptiste a une stratégie gagnante lorsque $N = 2070$. (Pouvez-vous expliquer pourquoi on n'a pas besoin de considérer $N = 2024$?)

On considère $N = 2025$.
On remarque que

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \ldots + 85 + 87 + 89 &= 45 + (1 + 89) + (3 + 87) + \cdots (41 + 49) + (43 + 47) \\ &= 45 + 22 \cdot 90 \\ &= 2025 \end{aligned}$$

Le tableau suivant résume la stratégie d'Alphonse, en fonction des mouvements de Baptiste :

Tour(s)	Détails	Condition
#1	A doit choisir 1	
#2 et #3	B peut choisir 1 ou 2 A choisit respectivement 2 ou 1	Somme des deux tours est de 3
#4 et #5	B peut choisir 1, 2, 3 ou 4 A choisit respectivement 4, 3, 2 ou 1	Somme des deux tours est de 5
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
#$(2q)$ et #$(2q+1)$ $(1 \leq q \leq 44)$	B peut choisir $1, 2, 3, \ldots, 2q-1$ ou $2q$ A choisit respectivement $2q, 2q-1, \ldots, 2, 1$	Somme des deux tours est de $2q+1$

Donc, après 89 tours et en utilisant cette stratégie, Alphonse peut s'assurer de porter le total cumulé à

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 87 + 89 = 2025$$

Alphonse a donc une stratégie gagnante.

On considère le cas où N est égal à l'un de $2026, 2027, \ldots, 2068, 2069$.
Soit $k = N - 2025$. On remarque que $1 \leq k \leq 44$.
La stratégie gagnante d'Alphonse pour ces valeurs de N consiste à reproduire la stratégie ci-dessus pour $N = 2025$ mais en la modifiant de la manière suivante : pour k de ses tours parmi tour #3, tour #5, ..., tour #87, tour #89 (il y a 44 tours dans cette liste), il s'assure que la somme combinée est 1 de plus que la somme combinée correspondante dans la stratégie pour $N = 2025$.
De cette manière, Alphonse peut s'assurer de porter le total cumulé à $2025 + k = N$ après le tour #89. Alphonse a donc une stratégie gagnante.
(On remarque que dans le cas où $N = 2025$, en choisissant l'un de $2q, 2q-1, \ldots, 2, 1$ au tour $2q+1$, Alphonse pouvait s'assurer que les nombres choisis aux tours #$(2q)$ et #$(2q+1)$ aient une somme de $2q+1$. Puisque Alphonse peut choisir jusqu'à $2q+1$ au tour $2q+1$, alors il peut faire de sorte que son choix au tour $2q+1$ soit 1 de plus que celui dans le cas $N = 2025$. De cette manière, il peut s'assurer que les nombres choisis aux tours $2q$ et $2q+1$ aient une somme égale à $(2q+1)+1$.)

On considère $N = 2070$.
On remarque que

$$\begin{aligned} 2 + 4 + 6 + \ldots + 86 + 88 + 90 &= 90 + (2 + 88) + (4 + 86) + \cdots (42 + 48) + (44 + 46) \\ &= 90 + 22 \cdot 90 \\ &= 2070 \end{aligned}$$

Le tableau suivant résume la stratégie de Baptiste, en fonction des mouvements d'Alphonse :

Tour(s)	Détails	Condition
#1 et #2	A doit choisir 1 B choisit 1	Somme des deux tours est de 2
#3 et #4	A peut choisir 1, 2 ou 3 B choisit respectivement 3, 2 ou 1	Somme des deux tours est de 4
#5 et #6	A peut choisir 1, 2, 3, 4 ou 5 B choisit respectivement 5, 4, 3, 2 ou 1	Somme des deux tours est de 6
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\#(2q-1)$ et $\#(2q)$ $(1 \leq q \leq 45)$	A peut choisir $1, 2, 3, \ldots, 2q-2$ ou $2q-1$ A choisit respectivement $2q-1, 2q-2, \ldots, 2, 1$	Somme des deux tours est de $2q$

Donc, après 90 tours et en utilisant cette stratégie, Baptiste peut s'assurer de porter le total cumulé à

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 86 + 88 + 90 = 2070$$

Baptiste a donc une stratégie gagnante.

On considère $N = 2022$ et $N = 2023$.
On remarque que

$$2+4+7+9+\cdots+87+89 = 6+(7+89)+(9+87)+\cdots+(47+49) = 6+21\times 96 = 2022$$

et

$$2+5+7+9+\cdots+87+89 = 7+(7+89)+(9+87)+\cdots+(47+49) = 7+21\times 96 = 2023$$

(La première somme commence avec $2+4$ et continue avec la somme de tous les nombres impairs de 7 à 89. La seconde somme commence avec 2 et continue avec la somme de tous les nombres impairs de 5 à 89.)
En suivant l'idée des cas ci-dessus, notamment en faisant de sorte que les nombres du tour #1 et du tour #2 aient une somme de 2, que les nombres du tour #3 et du tour #4 aient une somme de 4 ou 5, et que les nombres des couples de tours #5 et #6 jusqu'à #87 et #88 aient respectivement une somme de $7, 9, \ldots, 87, 89$, Baptiste peut garantir que le total cumulé après le tour #88 sera égal à 2022 ou à 2023. (Par exemple, aux tours #5 et #6, si Alphonse choisit 1, 2, 3, 4 ou 5 au tour #5, alors Baptiste choisira respectivement 6, 5, 4, 3 ou 2 au tour #6.)

Pour résumer, on a montré que Baptiste a une stratégie gagnante lorsque $N = 2022$ et $N = 2023$, Alphonse a une stratégie gagnante pour $N = 2025$ jusqu'à $N = 2069$ et Baptiste a une stratégie gagnante lorsque $N = 2070$, d'où on a donc $m = 2069$.