Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire

le mercredi 17 novembre 2021
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)
le jeudi 18 novembre 2021
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 2 heures

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Le questionnaire est divisé en deux parties. Dans chaque partie, les questions sont à peu près en ordre croissant de difficulté. Les premiers problèmes de la partie B sont probablement plus faciles que les derniers de la partie A.

PARTIE A

1. Cette partie est composée de six questions de 5 points chacune.
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse.** Le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

PARTIE B

1. Cette partie est composée de trois questions de 10 points chacune.
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse.** Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Inscrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille insérée.
3. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, et le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca. Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire

Remarques :

1. Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Inscrire toutes les solutions dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.
4. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
5. Les figures ne sont pas dessinées à l'échelle. Elles servent d'aide seulement.
6. Aucun élève ne peut passer le Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur et le Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire la même année.

PARTIE A

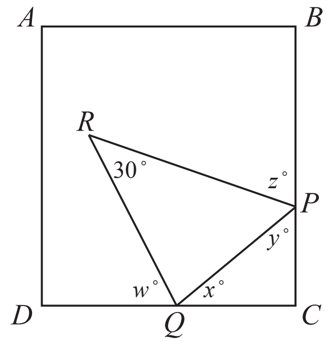
Pour chaque problème dans la partie A, le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée pour du travail pertinent inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

1. Le rectangle A a une longueur de 6 cm et une aire de 36 cm^2.
   Le rectangle B a une longueur de 12 cm et une aire de 36 cm^2.
   Le rectangle C a une longueur de 9 cm et une aire de 36 cm^2.
   Le rectangle ayant la plus petite largeur a une largeur de x cm. Quelle est la valeur de x ?

2. Quelle est la somme de tous les nombres premiers supérieurs à 10 et inférieurs à 20 ? (Un *nombre premier* est un entier strictement positif supérieur à 1 qui admet exactement deux diviseurs distincts, soit 1 et lui-même. Par exemple, 7 est un nombre premier.)

3. À partir du 22$^{\text{e}}$ étage de leur immeuble, Taya emprunte les escaliers et Jeanne l'ascenseur pour monter aux étages supérieurs de l'immeuble. À partir du moment où Taya commence à monter, Jeanne doit attendre l'ascenseur pendant 2 minutes avant de pouvoir monter elle aussi. Taya monte de chaque étage à l'étage suivant en 15 secondes. L'ascenseur monte de chaque étage à l'étage suivant en 3 secondes. Taya et Jeanne atteignent le $n^{\text{ième}}$ étage exactement au même moment. Quelle est la valeur de n ?

4. Dans la figure ci-contre, $ABCD$ est un rectangle, P est situé sur BC, Q est situé sur CD, et R est situé à l'intérieur de $ABCD$. De plus, $\angle PRQ = 30°$, $\angle RQD = w°$, $\angle PQC = x°$, $\angle CPQ = y°$ et $\angle BPR = z°$. Quelle est la valeur de $w + x + y + z$?



5. On écrit une liste de nombres selon les règles suivantes :
   - Le premier nombre est 3 et le deuxième nombre est 4.
   - Chaque nombre après le deuxième est obtenu an ajoutant 1 au nombre précédent puis en divisant par le nombre précédant ce dernier. En d'autres mots, pour n'importe quels trois nombres consécutifs a, b, c, on a $c = \dfrac{b+1}{a}$.

   D'après les règles, le troisième nombre de la liste est égal à $\dfrac{4+1}{3}$, soit $\dfrac{5}{3}$.

   Quel est le plus petit entier strictement positif N pour lequel la somme des N premiers nombres de la liste est égale à un entier impair supérieur à 2021 ?

6. Dragomir a 6 paires de chaussettes dans un tiroir. Chaque paire de chaussettes est différente de toutes les autres paires dans le tiroir. Il retire, au hasard et une à la fois, 4 chaussettes individuelles du tiroir. Parmi ces 4 chaussettes, quelle est la probabilité pour qu'il y ait exactement une paire de chaussettes identiques ?

PARTIE B

Pour chaque question dans la partie B, la solution doit être bien organisée et doit aussi présenter certains mots d'explication ou de justification. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

> *Renseignement utile pour la partie B* :
> Pour tous les nombres réels a et b, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

1. Karol utilise des Gridards et des Blurpos pour préparer des Zafards. La recette demande 4 tasses de Gridards et 3 tasses de Blurpos pour préparer 60 Zafards. Il peut également préparer de plus gros lots de Zafards en conservant ces mêmes rapports d'ingrédients.

   (a) Lundi, Karol utilise 28 tasses de Gridards pour préparer des Zafards. Déterminer le nombre de tasses de Blurpos qu'il a utilisé.

   (b) Mardi, Karol utilise 48 tasses de l'un des ingrédients et N tasses de l'autre ingrédient pour préparer des Zafards. Déterminer les deux valeurs possibles de N.

   (c) Mercredi, Karol a 64 tasses de Gridards et 42 tasses de Blurpos disponibles. Déterminer le plus grand nombre de Zafards qu'il peut préparer.

   (d) Jeudi, Karol prépare des Zafards qu'il compte vendre. Ses seuls frais proviennent de l'achat de Gridards et de Blurpos. Il vend chaque Zafard au prix de 0,50 \$ et réalise un profit de 0,30 \$ sur chaque Zafard vendu. Karol achète chaque tasse de Gridards pour 1,80 \$. Déterminer combien lui coûte chaque tasse de Blurpos.

2. (a) Dans la Figure 1, le trapèze $ABED$ est formé en joignant le triangle BCE (qui est rectangle en C) au rectangle $ABCD$. Sachant que $AB = 3$, $CE = 6$ et que le trapèze $ABED$ a une aire de 48, déterminer la longueur de BE.

   (b) Dans la Figure 2, des cercles de centres P et Q touchent le segment de droite d (autrement dit, les cercles sont tangents à d) aux points respectifs S et T et sont tangents l'un à l'autre au point X. Puisque ces cercles se touchent en X, alors le segment de droite PQ passe par X. On a donc $PQ = PX + XQ$. Puisque les cercles touchent le segment de droite d en S et T, alors PS et QT sont perpendiculaires à d. Étant donné que le cercle de centre P a un rayon de 25 et que le cercle de centre Q a un rayon de 16, déterminer l'aire du trapèze $PQTS$.

   (c) La Figure 3 est formée en ajoutant un cercle de rayon r à la Figure 2. Ce cercle touche d et chacun des deux autres cercles, comme dans la figure ci-dessous. Déterminer la valeur de r.

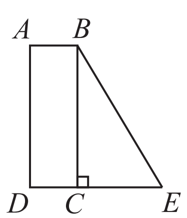


Figure 1

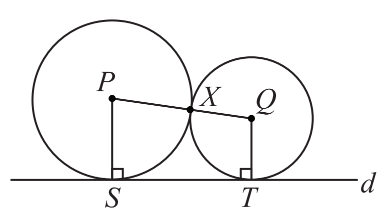


Figure 2

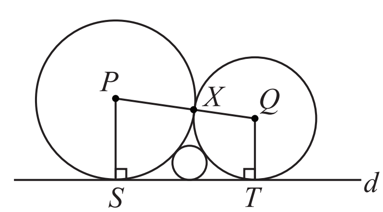


Figure 3

3. Soit N un entier strictement positif quelconque. Alphonse et Baptiste jouent à un jeu dans lequel ils additionnent à tour de rôle des entiers à un total cumulé. Le premier à jouer est toujours Alphonse et le total de départ est toujours 0. Au tour k, le joueur dont c'est le tour peut ajouter au total cumulé l'un des nombres entiers de 1 à k. Le gagnant est le joueur qui porte le total à exactement N.

   Par exemple, si $N = 10$, un jeu *pourrait* se dérouler comme ci-dessous. (Bien que Alphone soit le gagnant dans l'exemple ci-dessous, il est possible qu'il ne le soit pas toujours lorsque $N = 10$.)

Tour #	Joueur	Entiers possibles	Choix	Total cumulé
1	Alphonse	1	1	1
2	Baptiste	1, 2	2	3
3	Alphonse	1, 2, 3	1	4
4	Baptiste	1, 2, 3, 4	3	7
5	Alphonse	1, 2, 3, 4, 5	3	10

   Pour chaque valeur de N, il existe une stratégie gagnante pour un de ces joueurs. (Une *stratégie gagnante* est une méthode que ce joueur peut employer pour garantir une victoire, peu importe comment son adversaire joue.)

   (a) Si $N = 8$, démontrer que Baptiste a une stratégie gagnante en décrivant une méthode spécifique et en expliquant pourquoi cette méthode garantit une victoire.

   (b) Si $N = 17$, déterminer lequel des deux joueurs a une stratégie gagnante. Votre solution doit décrire une stratégie spécifique et expliquer pourquoi cette stratégie est une stratégie gagnante.

   (c) Déterminer le plus petit entier strictement positif m (avec $m > 2021$) pour lequel Alphonse a une stratégie gagnante lorsque $N = m$ et Baptiste a une stratégie gagnante lorsque $N = m + 1$.

Concours
canadien de
mathématiques
de niveau
intermédiaire
2021
(français)