Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Pascal 2020

(9^{e} année – Secondaire III)

le mardi 25 février 2020
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 26 février 2020
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. La figure comprend 5 groupes de 5 carrés chacun.
Donc, il y a $5 \times 5 = 25$ carrés en tout.

Réponse : (E)

2. On a : $0{,}8 + 0{,}02 = 0{,}80 + 0{,}02 = 0{,}82$.

Réponse : (C)

3. *Solution 1*
Puisque $2x + 6 = 16$, alors $\dfrac{2x+6}{2} = \dfrac{16}{2}$, d'où $x + 3 = 8$.
Puisque $x + 3 = 8$, alors $x + 4 = (x + 3) + 1 = 8 + 1 = 9$.

Solution 2
Puisque $2x + 6 = 16$, alors $2x = 16 - 6 = 10$.
Puisque $2x = 10$, alors $\dfrac{2x}{2} = \dfrac{10}{2}$, d'où $x = 5$.
Puisque $x = 5$, alors $x + 4 = 5 + 4 = 9$.

Réponse : (C)

4. Les couples de diviseurs positifs de 24 sont :

1 et 24 2 et 12 3 et 8 4 et 6

Parmi ces couples, 3 et 8 sont les entiers strictement positifs dont la somme est 11.
Ces deux entiers strictement positifs ont une différence de $8 - 3 = 5$.

Réponse : (D)

5. *Solution 1*
Puisque le triangle a des côtés de longueurs $x - 1$, $x + 1$ et 7, alors son périmètre est égal à $(x - 1) + (x + 1) + 7$ ou $2x + 7$.
Puisque $x = 10$, le périmètre est égal à $2 \times 10 + 7$, soit 27.

Solution 2
Puisque $x = 10$, le triangle a des côtés de longueurs $x - 1 = 9$, $x + 1 = 11$ et 7.
Le périmètre du triangle est donc égal à $9 + 11 + 7$, soit 27.

Réponse : (D)

6. On remarque que $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ et que $2^4 = 2^3 \times 2 = 16$.
Donc, $\dfrac{2^4 - 2}{2^3 - 1} = \dfrac{16 - 2}{8 - 1} = \dfrac{14}{7} = 2$.
Par ailleurs, $\dfrac{2^4 - 2}{2^3 - 1} = \dfrac{2(2^3 - 1)}{2^3 - 1} = 2$.

Réponse : (E)

7. La suite d'Ewan commence par 3 et chaque nombre subséquent est 11 de plus que le nombre précédent.
Puisque chaque nombre dans la suite est égal à un multiple de 11 de plus que 3, alors, par la commutativité, chaque nombre dans la suite est 3 de plus qu'un multiple de 11. De plus, chaque tel entier strictement positif parait dans la suite d'Ewan.
Puisque $110 = 11 \times 10$ est un multiple de 11, alors $113 = 110 + 3$ est 3 de plus qu'un multiple de 11 et parait donc dans la suite d'Ewan.

Par ailleurs, on peut dresser la liste des termes de la suite d'Ewan de manière à atteindre la fourchette dans laquelle sont situés les choix de réponse :

$$3, 14, 25, 36, 47, 58, 69, 80, 91, 102, 113, 124, \ldots$$

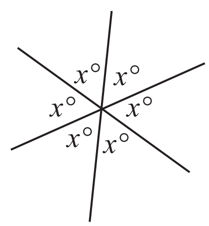
Réponse : (A)

8. Selon le graphique, Mathilde a vu 6 chardonnerets, 9 moineaux et 5 quiscales.
En tout, elle a vu $6 + 9 + 5 = 20$ oiseaux.
Donc, le pourcentage des oiseaux qui étaient des chardonnerets est égal à

$$\frac{6}{20} \times 100\ \% = \frac{3}{10} \times 100\ \% = 30\ \%$$

Réponse : (C)

9. Puisque deux angles opposés par le sommet ont la même mesure, alors chacun des six angles qui forment l'angle plein au centre a une mesure de x°.



Sachant que l'angle plein au centre mesure 360°, alors $6 \times x^\circ = 360^\circ$.
Donc, $6x = 360$, d'où $x = 60$.

Réponse : (C)

10. Jorge a commencé à regarder une série de trois films à 13 heures.
Le premier film a duré 2 heures et 20 minutes et s'est donc terminé à 15 h 20.
Jorge a ensuite pris une pause de 20 minutes. Sa pause s'est donc terminée à 15 h 40.
Jorge a ensuite regardé le deuxième film dont la durée était de 1 heure et 45 minutes.
Après avoir regardé ce film pendant 20 minutes, il est 16 heures et il reste encore 1 heure et 25 minutes du film à regarder. Le deuxième film s'est donc terminé à 17 h 25.
Jorge a ensuite pris une pause de 20 minutes. Sa pause s'est donc terminée à 17 h 45.
Enfin, Jorge a regardé le troisième film dont la durée était de 2 heures et 10 minutes.
Ce dernier film s'est terminé à 19 h 55.

Réponse : (D)

11. Puisque 12 et 21 sont des multiples de 3 ($12 = 4 \times 3$ et $21 = 7 \times 3$), donc ni (A) ni (D) n'est le bon choix de réponse.
16 est un carré parfait ($16 = 4 \times 4$) donc (C) n'est pas le bon choix de réponse.
Les chiffres de 26 ont une somme de 8. Ce dernier n'étant pas un nombre premier, (E) n'est donc pas le bon choix de réponse.
Puisque 14 n'est pas un multiple de trois, puisqu'il n'est pas un carré parfait et puisque la somme de ses chiffres est égale à un nombre premier ($1 + 4 = 5$), alors (B) est le bon choix de réponse.

Réponse : (B)

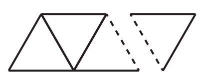
12. Puisque la moyenne des trois tailles est de 171 cm, ces trois tailles ont une somme de 3×171 cm, soit 513 cm.
Puisque Jiayin a une taille de 161 cm, alors Nathalie et Harpreet doivent avoir des tailles dont la somme est de 513 cm $-$ 161 cm $=$ 352 cm.
Puisque Harpreet et Nathalie sont de même taille, chacun d'eux a donc une taille de $\dfrac{352 \text{ cm}}{2}$ ou 176 cm.
Donc, Nathalie a une taille de 176 cm.

Réponse : (C)

13. Puisque le rapport du nombre de pommes au nombre de bananes est de 3 : 2, on représente respectivement les nombres de pommes et de bananes par $3n$ et $2n$, n étant un entier strictement positif quelconque.
Donc, le nombre total de pommes et de bananes est égal à $3n + 2n = 5n$. On remarque que ce dernier est un multiple de 5.
Parmi les choix de réponse, seul (E) 72 n'est pas un multiple de 5 et ne peut donc pas être égal au nombre total de pommes et de bananes.
(Chacun des autres choix de réponse est un multiple de 5 et peut être obtenu en choisissant la valeur appropriée de n.)

Réponse : (E)

14. La première figure comprend une seule tuile et a un périmètre de 3×7 cm $= 21$ cm.
À chaque fois que l'on ajoute une tuile, le périmètre de la figure augmente de 7 cm (soit la longueur d'un côté d'une tuile) car un des côtés de la nouvelle tuile recouvre un côté de la figure précédente et les longueurs de deux côtés de la nouvelle tuile sont ajoutées au périmètre total pour une augmentation nette d'une seule longueur de côté (ou 7 cm).



Puisque la première figure a un périmètre de 21 cm et qu'on veut créer la figure dont le périmètre est de 91 cm, le périmètre doit donc augmenter de 91 cm $-$ 21 cm $=$ 70 cm.
Puisque le périmètre augmente de 7 cm à chaque fois que l'on ajoute une tuile, on doit donc ajouter $\dfrac{70 \text{ cm}}{7 \text{ cm/tile}} = 10$ tuiles afin de créer la figure dont le périmètre est de 91 cm.
En tout, cette figure comprendra $1 + 10 = 11$ tuiles.

Réponse : (B)

15. L'aire totale des régions ombrées est égale à la somme de l'aire du petit carré (9) et de l'aire de la région située entre le grand carré et le carré moyen.
Puisque le grand carré a une aire de 49 et que le carré moyen a une aire de 25, alors la région située entre le grand carré et le carré moyen a une aire égale à $49 - 25 = 24$.
Donc, l'aire totale des régions ombrées est égale à $9 + 24 = 33$.

Réponse : (A)

16. On développe chacune des expressions des cinq choix de réponse :
(A) $3(x+2) = 3x+6$
(B) $\dfrac{-9x-18}{-3} = \dfrac{-9x}{-3} + \dfrac{-18}{-3} = 3x+6$
(C) $\dfrac{1}{3}(3x) + \dfrac{2}{3}(9) = x+6$
(D) $\dfrac{1}{3}(9x+18) = 3x+6$
(E) $3x - 2(-3) = 3x + (-2)(-3) = 3x+6$
L'expression qui n'est pas équivalente à $3x+6$ est celle de (C).

Réponse : (C)

17. Puisqu'il y a deux prix possibles que Jamie peut gagner et que les deux sont équiprobables, la probabilité que Jamie gagne 30 \$ est de $\frac{1}{2}$ et la probabilité que Jamie gagne 40 \$ est de $\frac{1}{2}$.
Si Jamie gagne 30 \$, Ben doit gagner 20 \$ afin que la somme de leurs prix soit égale à 50 \$. La probabilité que Ben gagne 20 \$ est de $\frac{1}{3}$ car le tirage au sort auquel il participe a trois résultats équiprobables.
Si Jamie gagne 40 \$, Ben doit gagner 10 \$ afin que la somme de leurs prix soit égale à 50 \$. La probabilité que Ben gagne 10 \$ est de $\frac{1}{3}$.
Puisque Ben et Jamie participent à deux tirages au sort différents, on peut supposer que les résultats sont indépendants, donc la probabilité que Jamie gagne 30 \$ et que Ben gagne 20 \$ est égale à $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.
De même, la probabilité que Jamie gagne 40 \$ et que Ben gagne 10 \$ est égale à $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.
Donc, la probabilité que leurs prix aient une somme de 50 \$ est égale à $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Réponse : (B)

18. Puisque la racine carrée de n est située entre 17 et 18, alors n est situé entre $17^2 = 289$ et $18^2 = 324$.
Puisque n est un multiple de 7, on doit compter le nombre de multiples de 7 entre 289 et 324.
Puisque $41 \times 7 = 287$ et $42 \times 7 = 294$, alors 294 est le plus petit multiple de 7 qui est supérieur à 289.
Puisque $46 \times 7 = 322$ et $47 \times 7 = 329$, alors 322 est le plus grand multiple de 7 qui est inférieur à 324.
Cela signifie que les multiples de 7 situés entre 289 et 324 sont : $42 \times 7 = 294$, $43 \times 7 = 301$, $44 \times 7 = 308$, $45 \times 7 = 315$ et $46 \times 7 = 322$. On a donc 5 tels multiples.
(Par ailleurs, on remarque qu'on aurait pu déterminer qu'il y avait 5 tels multiples en calculant $46 - 42 + 1$, d'où on obtient 5.)
Donc, il y a 5 valeurs possibles de n.

Réponse : (D)

19. Chaque carte appartient à exactement une des catégories suivantes :
(A) lettre minuscule d'un côté, entier pair de l'autre côté
(B) lettre minuscule d'un côté, entier impair de l'autre côté
(C) lettre majuscule d'un côté, entier pair de l'autre côté
(D) lettre majuscule d'un côté, entier impair de l'autre côté
Selon l'énoncé,

> « Si une carte a une face qui contient une lettre minuscule, l'autre face doit contenir un entier impair. »

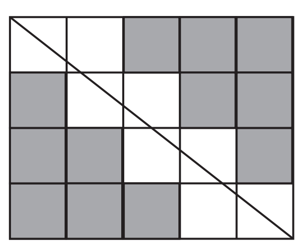
Si une carte appartient à la catégorie (B), (C) ou (D), elle ne va pas à l'encontre de l'énoncé. L'énoncé est donc vrai. Par contre, si une carte appartient à la catégorie (A), elle va à l'encontre de l'énoncé.
Par conséquent, il faut retourner toute carte qui pourrait appartenir à la catégorie (A). Des cartes données,
(i) 1 carte contient une lettre minuscule et pourrait appartenir à la catégorie (A),
(ii) 4 cartes contiennent chacune une lettre majuscule et n'appartiennent pas à la catégorie (A),
(iii) 2 cartes contiennent chacune un entier pair et pourraient appartenir à la catégorie (A) et
(iv) 8 cartes contiennent chacune un entier impair et n'appartiennent pas à la catégorie (A).
Afin de vérifier la véracité de l'énoncé, il faut retourner les 3 cartes dans (i) et (iii).

Réponse : (E)

20. Le cube $5 \times 5 \times 5$ initial a 6 faces dont chacune est de dimensions 5×5.
Lorsqu'on enlève les trois colonnes centrales du cube, un carré 1×1 disparait de chaque face du cube initial.
Cela signifie que l'aire de chaque face diminue de 1, soit $5 \times 5 - 1 = 24$. Donc, les 6 faces extérieures du cube ont une aire totale de $6 \times 24 = 144$.
Lorsqu'on enlève chacune des trois colonnes centrales du cube, on crée un « tube » de 5 cubes de long. Chacun de ces tubes est de dimensions $5 \times 1 \times 1$.
Puisque le cube central du cube $5 \times 5 \times 5$ initial est enlevé lorsqu'on enlève chacune des trois colonnes centrales, cela signifie que l'on peut séparer chacun des trois tubes $5 \times 1 \times 1$ en deux tubes de dimensions $2 \times 1 \times 1$.
L'aire latérale intérieure de chacun de ces tubes est composée de quatre faces dont chacune est de dimensions 2×1. (On pourrait aussi penser à la surface extérieure d'un prisme droit à base rectangulaire de dimensions $2 \times 1 \times 1$ tout en ignorant ses extrémités carrées.) Donc, l'aire latérale intérieure totale de 6 tubes ayant chacun 4 faces de dimensions 2×1 est égale à $6 \times 4 \times 2 \times 1 = 48$.
En tout, le solide a une aire totale de $144 + 48 = 192$.

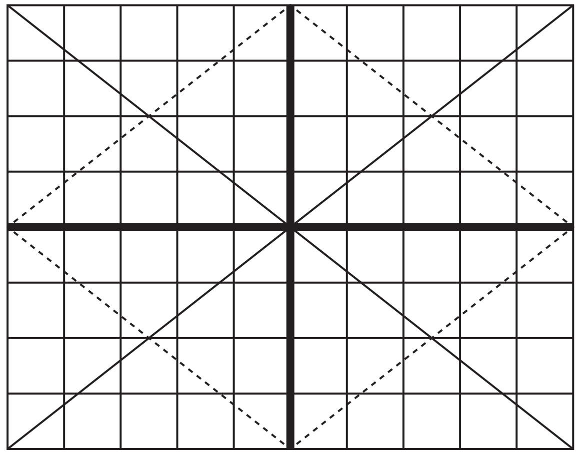
Réponse : (E)

21. Si on enlève une des deux diagonales du quadrillage 4×5, on remarque que 8 carrés sont traversés par l'autre diagonale tandis que 12 carrés ne le sont pas.



Le résultat est le même quelle que soit la diagonale que l'on enlève.

On peut construire un quadrillage 8×10 qui comprend deux diagonales à l'aide de quatre tels quadrillages 4×5 :



Lorsqu'on réunit les quatre quadrillages 4×5, on peut aligner leurs diagonales de manière à former les diagonales du quadrillage 8×10.
Dans chacun des quatre quadrillages 4×5, 12 des carrés 1×1 ne sont traversés par aucune des diagonales.
En tout, on a $4 \times 12 = 48$ carrés 1×1 qui ne sont traversés par aucune des diagonales.

Réponse : (D)

22. Puisque le point R est situé sur PQ, alors $PQ = PR + QR = 6 + 4 = 10$.
Les demi-cercles de diamètres 10, 6 et 4 sont respectivement de rayons 5, 3 et 2.
Un demi-cercle de diamètre PQ a une aire de $\frac{1}{2} \times \pi \times 5^2 = \frac{25}{2}\pi$.
Un demi-cercle de diamètre PR a une aire de $\frac{1}{2} \times \pi \times 3^2 = \frac{9}{2}\pi$.
Un demi-cercle de diamètre QR a une aire de $\frac{1}{2} \times \pi \times 2^2 = 2\pi$.
La région ombrée est composée de deux sections dont une est à gauche de PQ et l'autre à droite de PQ.
La section à gauche de PQ a une aire égale à l'aire du demi-cercle de diamètre PQ moins l'aire du demi-cercle de diamètre PR.
La section à gauche de PQ a donc une aire égale à $\frac{25}{2}\pi - \frac{9}{2}\pi = 8\pi$.
La section à droite de PQ a une aire égale à l'aire du demi-cercle de diamètre QR.
La section à droite de PQ a donc une aire égale à 2π.
En tout, la région ombrée a donc une aire de $8\pi + 2\pi = 10\pi$.
Puisque le grand cercle a un rayon de 5, son aire est égale à $\pi \times 5^2 = 25\pi$.
Puisque la région ombrée a une aire de 10π, alors l'aire de la région non ombrée est égale à $25\pi - 10\pi = 15\pi$.
Le rapport de l'aire de la région ombrée à l'aire de la région non ombrée est égal à $10\pi : 15\pi$, ce qui est équivalent à $2 : 3$.

Réponse : (B)

23. Puisque 4 joueurs participent au tournoi de dames et que chaque joueur joue contre chacun des autres joueurs une seule fois, alors chaque joueur joue 3 matchs.
Puisque chaque victoire rapporte 5 points et chaque match nul rapporte 2 points, voici les résultats possibles pour chaque joueur :
- 3 victoires, 0 défaite, 0 match nul : 15 points
- 2 victoires, 0 défaite, 1 match nul : 12 points
- 2 victoires, 1 défaite, 0 match nul : 10 points
- 1 victoire, 0 défaite, 2 matchs nuls : 9 points
- 1 victoire, 1 défaite, 1 match nul : 7 points
- 1 victoire, 2 défaites, 0 match nul : 5 points
- 0 victoire, 0 défaite, 3 matchs nuls : 6 points
- 0 victoire, 1 défaite, 2 matchs nuls : 4 points
- 0 victoire, 2 défaites, 1 match nul : 2 points
- 0 victoire, 3 défaites, 0 match nul : 0 point

Dans le troisième tableau des pointages finaux proposés, on voit que Deb a 2 points. Cela signifie qu'elle a fait 1 match nul. Si un joueur a fait match nul, alors un autre joueur a dû aussi faire match nul. Or, on ne peut obtenir 5 points ou 15 points comme pointages finaux s'il y eut un match nul. Donc, le troisième tableau n'est pas possible.

De même, Ali a 12 points dans le quatrième tableau et a donc fait 1 match nul. Or, on ne peut obtenir 0 point, 5 points ou 10 points comme pointages finaux s'il y eut un match nul. Donc, le quatrième tableau n'est pas possible.

Dans le deuxième tableau, Che et Deb ont chacun fait 2 matchs nuls. Puisque Che et Deb ne se sont affrontés qu'une seule fois, alors chacun d'eux a dû faire match nul contre un autre joueur. Or, cela n'est pas possible car, ayant 10 points chacun, ni Ali ni Bea n'ont fait match nul. Par conséquent, le deuxième tableau n'est pas possible.

Le premier tableau est possible :

Résultat	Ali	Bea	Che	Deb
Ali gagne contre Bea	5 points	0 point		
Ali gagne contre Che	5 points		0 point	
Ali gagne contre Deb	5 points			0 point
Bea et Che font match nul		2 points	2 points	
Bea gagne contre Deb		5 points		0 point
Che et Deb font match nul			2 points	2 points
TOTAL	15 points	7 points	4 points	2 points

Donc, parmi les quatre pointages finaux proposés, un seul est possible.

Réponse : (B)

24. Si Lucas ne choisit qu'un seul nombre, on a 8 sommes possibles (soit les 8 nombres eux-mêmes : 2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, 81).

Pour compter le nombre de sommes supplémentaires à inclure lorsque Lucas choisit deux nombres, on crée un tableau en ajoutant le nombre dans la colonne au nombre dans la rangée quand il est inférieur au nombre dans la rangée (on n'a pas besoin d'ajouter les nombres dans les deux sens ou d'ajouter un nombre à lui-même) :

+	2	5	7	12	19	31	50	81
2		7	9	14	21	33	52	83
5			12	17	24	36	55	86
7				19	26	38	57	88
12					31	43	62	93
19						50	69	100
31							81	112
50								131
81								

On remarque deux choses dans le tableau. Dans un premier temps, à chaque fois qu'on ajoute deux nombres consécutifs de la liste initiale dont la somme n'est pas trop grande, on obtient un autre nombre de la liste. On ne considère pas ce nombre comme étant une nouvelle somme car on l'a déjà pris en compte précédemment comme la somme d'un seul nombre. Dans un deuxième temps, les sommes restantes sont toutes distinctes et il y a 20 sommes supplémentaires qui sont inférieures ou égales à 100.

Enfin, on considère les sommes formées de trois nombres de la liste.
Dans ce cas, la propriété que la somme de deux nombres consécutifs de la liste est égale au nombre suivant de la liste devient très importante.
Si les trois nombres choisis sont trois nombres consécutifs de la liste et que leur somme n'est pas trop grande, il s'avère que cette somme est égale à la somme de deux nombres de la liste car, des trois nombres, les deux les plus grands peuvent être combinés en un nombre encore plus grand de la liste.
Par exemple, $5 + 7 + 12 = 5 + (7 + 12) = 5 + 19$, qui a déjà été pris en compte.
Si deux des trois nombres choisis sont consécutifs dans la liste, la même chose se produit. Par exemple, $12 + 19 + 50 = (12 + 19) + 50 = 31 + 50$ et $2 + 31 + 50 = 2 + (31 + 50) = 2 + 81$.
Donc, à ce point, toute somme supplémentaire doit provenir de trois nombres dont aucun n'est consécutif à un autre.
On compte ces cas individuellement et séquentiellement, sachant qu'on ne cherche que les sommes inférieures à 100 et qu'on ne peut inclure des nombres consécutifs de la liste :

- $2 + 7 + 19 = 28$; $2 + 7 + 31 = 40$; $2 + 7 + 50 = 59$; $2 + 7 + 81 = 90$
- $2 + 12 + 31 = 45$; $2 + 12 + 50 = 64$; $2 + 12 + 81 = 95$
- $2 + 19 + 50 = 71$
- $5 + 12 + 31 = 48$; $5 + 12 + 50 = 67$; $5 + 12 + 81 = 98$
- $5 + 19 + 50 = 74$
- $7 + 19 + 50 = 76$

Toute autre combinaison de 3 entiers de la liste comprend soit 2 nombres consécutifs (et donc a déjà été pris en compte), soit 81 et l'un de 31 ou 19 (ce qui est donc trop grand).
Dans ce cas, il y a 13 sommes supplémentaires.

En réunissant les trois cas, on a $8 + 20 + 13 = 41$ sommes distinctes qui sont inférieures ou égales à 100.

Réponse : (E)

25. Avant de commencer notre solution, on considère les faits suivants quant aux nombres premiers et aux factorisations premières :

F1. Le « théorème fondamental de l'arithmétique » s'énonce ainsi : Tout entier strictement positif supérieur à 1 peut être écrit comme un produit de nombres premiers d'une unique façon. (Si l'entier strictement positif est lui-même premier, ce produit n'est constitué que du nombre premier.) On voit ce théorème de manière implicite lorsqu'on crée l'arbre de facteurs pour un entier quelconque. Par exemple, 1500 est égal à $2^2 \times 3^1 \times 5^3$ et il n'existe aucune autre factorisation de 1500 sous forme de produits de nombres premiers. De plus, la factorisation première d'un nombre demeure inchangée même si l'on réorganise ses facteurs premiers dans un ordre différent.

F2. Si n est un entier strictement positif et d est un entier strictement positif qui est un diviseur de n, alors les seuls facteurs premiers possibles de d sont ceux de n. Par exemple, si d est un diviseur positif de $n = 1500$, alors les seuls facteurs premiers possibles de d sont 2, 3 et 5. Cela signifie, par exemple, que d n'est pas divisible par 7, par 11 ou par tout autre nombre premier qui n'est pas 2, 3 ou 5. d peut ou non être divisible par chacun des suivants : 2, 3 ou 5.

F3. Si n est un entier strictement positif, d est un entier strictement positif qui est un diviseur de n, et p est un facteur premier de n et de d, alors p ne peut diviser d « plus de fois » qu'il ne divise n. Par exemple, si d est un diviseur positif de $n = 1500 = 2^2 \times 3^1 \times 5^3$ qui est divisible par 5, alors d peut être divisible par 5 ou par 5^2 ou par 5^3 mais ne peut pas être divisible par 5^4 ou par 5^5 ou par quelconque puissance de 5 qui serait supérieure à ces derniers.

F4. Un entier strictement positif m supérieur à 1 est un carré parfait lorsque chaque puissance première de sa factorisation première a un exposant pair. Par example, $n = 1500 = 2^2 \times 3^1 \times 5^3$ n'est pas un carré parfait mais $m = 22500 = 2^2 \times 3^2 \times 5^4$ l'est. Ceci est vrai car si m est un carré parfait, alors $m = r^2$ (r étant un entier strictement positif quelconque) d'où on peut écrire la factorisation première de m en écrivant la factorisation première de r deux fois. Par exemple, si $r = 150 = 2^1 \times 3^1 \times 5^2$, alors $m = 2^1 \times 3^1 \times 5^2 \times 2^1 \times 3^1 \times 5^2 = 2^2 \times 3^2 \times 5^4$. De plus, si la factorisation première de m comprend une puissance première avec un exposant impair, alors ces nombres premiers ne peuvent pas être répartis de manière égale entre deux groupes égaux dont chacun représente la racine carrée de m ; ce qui signifierait que $\sqrt{m}$ n'est pas un entier.

F5. Une méthode pour trouver le plus grand commun diviseur (pgcd) de deux entiers strictement positifs n et t consiste à écrire la factorisation première des deux et de créer un nouvel entier d (le pgcd) qui est le produit des plus grandes puissances premières communes que n et t admettent comme diviseurs. Par exemple, si $n = 1500 = 2^2 \times 3^1 \times 5^3$ et $t = 7000 = 2^3 \times 5^3 \times 7^1$, alors le plus grand commun diviseur de n et de t est égal à $2^2 \times 5^3 = 500$. On justifie cette méthode à l'aide de l'information présentée dans F2 (puisque d est un diviseur de n et de t, il n'admet que des facteurs premiers qui sont communs aux deux) et dans F3 (puisque d ne peut comprendre une puissance première qui est trop grande si n et t doivent l'admettre tous les deux comme diviseur).

On peut maintenant commencer la solution.

Soit $(205\,800, 35k)$ un couple heureux.

On écrit la factorisation première de 205 800 :

$$\begin{aligned}
205\,800 &= 2058 \times 100 \\
&= 2 \times 1029 \times (2 \times 5)^2 \\
&= 2 \times 3 \times 343 \times 2^2 \times 5^2 \\
&= 2 \times 3 \times 7^3 \times 2^2 \times 5^2 \\
&= 2^3 \times 3^1 \times 5^2 \times 7^3
\end{aligned}$$

On remarque aussi que $35k = 5^1 \times 7^1 \times k$.
Soit d le plus grand commun diviseur de 205 800 et $35k$.
On veut déterminer le nombre de valeurs possibles de $k \leq 2940$ pour lesquelles d est un carré parfait.
Puisque 5 et 7 sont chacun des diviseurs premiers de 205 800 et $35k$, alors 5 et 7 sont aussi des diviseurs premiers de d (F5).
Afin que d soit un carré parfait, 5 et 7 doivent tous les deux diviser d un nombre pair de fois (F4).
Puisque les puissances premières de 5 et de 7 dans la factorisation première de 205 800 sont respectivement 5^2 et 7^3, alors afin que d soit un carré parfait, 5^2 et 7^2 doivent tous les deux être des facteurs de d.
Puisque $d = 5 \times 7 \times k$, alors $k = 5 \times 7 \times j = 35j$, j étant un entier strictement positif quelconque.
Puisque $k \leq 2940$, alors $35j \leq 2940$, d'où $j \leq 84$.
On sait donc que d est le pgcd de $2^3 \times 3^1 \times 5^2 \times 7^3$ et $5^2 \times 7^2 \times j$.
Quelles informations supplémentaires cela nous donne-t-il sur j ?

- j n'est pas divisible par 3, sinon d admettrait 3^1 comme facteur (puisque 205 800 et $35k$ seraient tous les deux divisibles par 3) et ne pourrait admettre 3^2 comme facteur (car 205 800 ne l'admet pas non plus) ce qui voudrait dire que d n'est pas un carré parfait.
- j n'est pas divisible par 7, sinon d admettrait 7^3 comme facteur et non une plus grande puissance de 7, dans ce cas d ne serait pas un carré parfait.
- Si j est divisible par 2, alors la factorisation première de j doit comprendre 2^2. Autrement dit, la factorisation première de j ne peut comprendre 2^1 ou 2^3.
- j est divisible par 5 car, même si c'est le cas, la puissance de 5 dans d est déjà limitée par la puissance de 5 dans 205 800.
- j est divisible par des nombres premiers autres que 2, 3, 5 ou 7 puisque 205 800 ne l'est pas et donc le pgcd ne sera pas affecté.

Finalement, on considère deux cas : j est divisible par 2^2 mais non par une plus grande puissance de 2, et j n'est pas divisible par 2.

1^{er} cas : j est divisible par 2^2 mais non par une plus grande puissance de 2

Dans ce cas, $j = 2^2h = 4h$, h étant un entier impair strictement positif quelconque.
Puisque $j \leq 84$, alors $4h \leq 84$, d'où $h \leq 21$.
Sachant que j n'est pas divisible par 3 ou par 7, cela signifie que les valeurs possibles de h sont $1, 5, 11, 13, 17, 19$.
Chacune de ces valeurs de h produit une valeur de j qui remplit les cinq conditions dans la liste ci-dessus.
Il y a donc 6 valeurs de j dans ce cas.

2e cas : j n'est pas divisible par 2

Dans ce cas, j est impair.
Sachant que j n'est pas divisible par 3 ou par 7 et que $j \leq 84$, cela signifie que les valeurs possibles de j sont :

$$1, 5, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 55, 59, 61, 65, 67, 71, 73, 79, 83$$

Il y a donc 24 valeurs de j dans ce cas.

En tout, il y a 30 valeurs de j et donc 30 valeurs possibles de $k \leq 2940$ pour lesquelles $(205\,800, 35k)$ est un couple heureux.

Réponse : (D)