Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatia 2020

le mercredi 15 avril 2020
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 16 avril 2020
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Douze sacs d'avocats coûtent 5,00 \$ $\times$ 12 = 60,00 \$.
Donc, le chef a dépensé 135,00 \$ − 60,00 \$ = 75,00 \$ dans l'achat de mangues.
Puisque chaque boîte de mangues lui a coûté 12,50 \$, le chef a donc acheté $\dfrac{75{,}00\ \$}{12{,}50\ \$} = 6$ boîtes de mangues.

(b) *Solution 1*
Puisqu'un sac d'avocats coûte 5,00 \$, alors un rabais de 10 % sur le coût régulier équivaut à $\frac{10}{100} \times 5{,}00$ \$ ou $0{,}10 \times 5{,}00$ \$, soit 0,50 \$.
Donc, le coût d'un sac d'avocats après rabais est de 5,00 \$ − 0,50 \$ = 4,50 \$.
Puisqu'une boîte de mangues coûte 12,50 \$, alors un rabais de 20 % sur le coût régulier équivaut à $\frac{20}{100} \times 12{,}50$ \$ ou $0{,}20 \times 12{,}50$ \$, soit 2,50 \$.
Donc, le coût d'une boîte d'avocats après rabais est de 12,50 \$ − 2,50 \$ = 10,00 \$.
Donc, les samedis, 8 sacs d'avocats et 4 boîtes de mangues coûtent

$$4{,}50\ \$ \times 8 + 10{,}00\ \$ \times 4 = 36{,}00\ \$ + 40{,}00\ \$ = 76{,}00\ \$$$

Solution 2
Puisqu'un sac d'avocats coûte 5,00 \$ et que le rabais offert est de 10 %, alors il faudra payer 100 % − 10 % = 90 % du prix régulier.
Donc, le coût d'un sac d'avocats après rabais est de $\frac{90}{100} \times 5{,}00\ \$ = 0{,}90 \times 5{,}00\ \$ = 4{,}50\ \$$.
Puisqu'une boîte de mangues coûte 12,50 \$ et que le rabais offert est de 20 %, alors il faudra payer 100 % − 20 % = 80 % du prix régulier.
Donc, le coût d'une boîte de mangues après rabais est de
$\frac{80}{100} \times 12{,}50\ \$ = 0{,}80 \times 12{,}50\ \$ = 10{,}00\ \$$.
Donc, les samedis, 8 sacs d'avocats et 4 boîtes de mangues coûtent

$$4{,}50\ \$ \times 8 + 10{,}00\ \$ \times 4 = 36{,}00\ \$ + 40{,}00\ \$ = 76{,}00\ \$$$

(c) Chaque sac d'avocats contient 6 avocats. La recette du chef cuisinier nécessite 100 avocats.
Puisque $6 \times 16 = 96$ et $6 \times 17 = 102$, le chef devra acheter 17 sacs d'avocats (16 sacs ne suffiront pas).
Chaque boîte de mangues contient 16 mangues. La recette du chef cuisinier nécessite 70 mangues.
Puisque $15 \times 4 = 60$ et $15 \times 5 = 75$, le chef devra acheter 5 boîtes de mangues.
En tout, cet achat lui a coûté $5{,}00\ \$ \times 17 + 12{,}50\ \$ \times 5 = 85{,}00\ \$ + 62{,}50\ \$ = 147{,}50\ \$$.

(d) Puisqu'un sac d'avocats coûte 5,00 \$, le prix auquel on peut acheter un nombre quelconque de sacs sera toujours un nombre entier.
Puisqu'une boîte de mangues coûte 12,50 \$, le prix des mangues n'est un nombre entier que lorsqu'on achète un nombre pair de boîtes (1 boîte coûte 12,50 \$, 2 boîtes coûtent 25,00 \$, 3 boîtes coûtent 37,50 \$, et ainsi de suite).
Puisque le chef cuisinier a dépensé exactement 75,00 \$ (soit un nombre entier), alors le chef cuisinier a dû acheter un nombre pair de boîtes de mangues.

Si le chef cuisinier avait acheté 2 boîtes de mangues, ces boîtes lui auraient coûté 25,00 \$, d'où il ne resterait que 75,00 \$ − 25,00 \$ = 50,00 \$ pour acheter 50,00 \$ $\div$ 5,00 \$ = 10 sacs d'avocats.
Dans ce cas, le chef cuisinier aurait $10 \times 6 = 60$ avocats et $2 \times 15 = 30$ mangues.
Puisque chaque assiette nécessitait 1 avocat et 2 mangues, il aurait pu préparer $30 \div 2 = 15$ assiettes (il a plus de 15 avocats mais seulement 30 mangues).

Si le chef cuisinier avait acheté 4 boîtes de mangues, ces boîtes lui auraient coûté

$4 \times 12{,}50$ \$ $= 50{,}00$ \$, d'où il ne resterait que $75{,}00$ \$ $- 50{,}00$ \$ $= 25{,}00$ \$ pour acheter $25{,}00$ \$ $\div 5{,}00$ \$ $= 5$ sacs d'avocats.
Dans ce cas, le chef cuisinier aurait $5 \times 6 = 30$ avocats et $4 \times 15 = 60$ mangues.
Puisque chaque assiette nécessitait 1 avocat et 2 mangues, il aurait pu préparer 30 assiettes.

Si le chef cuisinier avait acheté 6 boîtes de mangues, ces boîtes lui auraient coûté $6 \times 12{,}50$ \$ $= 75{,}00$ \$, d'où il ne resterait plus d'argent pour acheter des avocats.
L'achat de plus de 6 boîtes de mangues coûtera plus de 75,00 \$ au chef cuisinier.

Donc, si le chef cuisinier a acheté 30 avocats (5 sacs) et 60 mangues (4 boîtes), il aurait dépensé exactement 75,00 \$ et aurait deux fois plus de mangues que d'avocats ; ce qui lui aurait permis de préparer le plus grand nombre d'assiettes, soit 30.

2. (a) Puisque la parabole d'équation $y = \frac{1}{4}x^2$ et le rectangle parabolique ont tous deux l'axe des ordonnées comme axe de symétrie, alors le rectangle parabolique aura un deuxième sommet situé sur la parabole dont les coordonnées sont $(-6, 9)$.
Un troisième sommet du rectangle parabolique est situé au point où la droite verticale menée de $(6, 9)$ à l'axe des abscisses coupe ce dernier. Ce point a donc pour coordonnées $(6, 0)$.
De même, un quatrième sommet du rectangle parabolique est situé au point où la droite verticale menée de $(-6, 9)$ à l'axe des abscisses coupe ce dernier. Ce point a donc pour coordonnées $(-6, 0)$.

(b) Si l'un des sommets d'un rectangle parabolique a pour coordonnées $(-3, 0)$, alors un deuxième sommet a pour coordonnées $(3, 0)$, d'où le rectangle a donc une longueur de 6.
Le sommet situé directement au-dessus de $(3, 0)$ a une abscisse de 3.
Ce sommet est situé sur la parabole d'équation $y = \frac{1}{4}x^2$ et a donc une ordonnée égale à $\frac{1}{4}(3)^2 = \frac{9}{4}$.
La largeur du rectangle est donc égale à $\frac{9}{4}$. Donc, le rectangle parabolique ayant un sommet situé au point $(-3, 0)$ a une aire égale à $6 \times \frac{9}{4} = \frac{54}{4} = \frac{27}{2}$.

(c) Soit $(p, 0)$ un sommet du rectangle parabolique, p étant une valeur qui vérifie $p > 0$.
Un deuxième sommet (également situé sur l'axe des abscisses) a donc pour coordonnées $(-p, 0)$. Le rectangle a donc une longueur de $2p$.
Le troisième sommet du rectangle parabolique est situé au point où la droite verticale menée de $(p, 0)$ à la parabole coupe cette dernière ; la largeur du rectangle est donc égale à l'ordonnée de ce point, soit une largeur égale à $\frac{1}{4}p^2$.
Donc, un rectangle parabolique de longueur $2p$ et de largeur $\frac{1}{4}p^2$ a une aire égale à $2p \times \frac{1}{4}p^2 = \frac{1}{2}p^3$.
Si un tel rectangle parabolique avait une longueur de 36, alors $2p = 36$, d'où $p = 18$.
Ce rectangle aurait donc une aire de $\frac{1}{2}(18)^3 = 2916$.
Si un tel rectangle parabolique avait une largeur de 36, alors $\frac{1}{4}p^2 = 36$ ou $p^2 = 144$, d'où $p = 12$ (puisque $p > 0$).
Ce rectangle aurait donc une aire de $\frac{1}{2}(12)^3 = 864$.
Les deux rectangles paraboliques ayant des côtés de longueur 36 ont donc des aires de 2916 et 864.

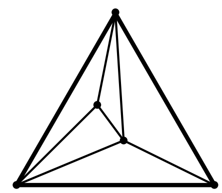
(d) Soit $(m, 0)$ un sommet du rectangle parabolique, m étant une valeur qui vérifie $m > 0$.
Un deuxième sommet (également situé sur l'axe des abscisses) a donc pour coordonnées $(-m, 0)$. Le rectangle a donc une longueur de $2m$.
Le troisième sommet du rectangle parabolique est situé au point où la droite verticale menée de $(m, 0)$ à la parabole coupe cette dernière ; la largeur du rectangle est donc égale

à l'ordonnée de ce point, soit une largeur égale à $\frac{1}{4}m^2$.
Donc, un rectangle parabolique de longueur $2m$ et de largeur $\frac{1}{4}m^2$ a une aire égale à $2m \times \frac{1}{4}m^2 = \frac{1}{2}m^3$.
Si la longueur et la largeur d'un tel rectangle parabolique sont égales, alors

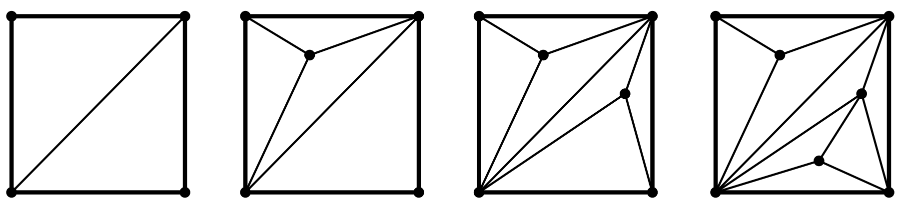
$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}m^2 &= 2m \\ m^2 &= 8m \\ m^2 - 8m &= 0 \\ m(m-8) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $m = 8$ (puisque $m > 0$). Donc, un rectangle parabolique dont la longueur et la largeur sont égales a une aire de $\frac{1}{2}(8)^3 = 256$.

3. (a) Lorsque $n \geq 3$ et $k \geq 0$, la valeur de $T(n,k)$ est constante pour tous les emplacements possibles des k points situés à l'intérieur du polygone et pour tous les triangulations possibles.
À l'aide de la triangulation dans la figure ci-contre, on peut donc déterminer que $T(3,2) = 5$.

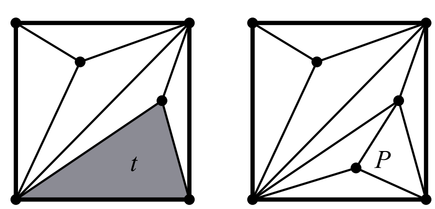


(b) On commence d'abord en dessinant des triangulations pour déterminer les valeurs de $T(4,k)$ lorsque $k = 0$, 1, 2, 3.



$T(4,0)=2$ $T(4,1)=4$ $T(4,2)=6$ $T(4,3)=8$

Bien qu'on obtiendrait ces quatre mêmes réponses peu importe les emplacements des points situés à l'intérieur du quadrilatère (que l'on surnommera désormais « points intérieurs ») ou les manières dont les triangulations ont été créées, les diagrammes ci-dessus ont été créés pour nous aider à visualiser une régularité.
À partir des réponses, on voit que $T(4,k+1) = T(4,k) + 2$ lorsque $k = 0, 1, 2$.
Il faut justifier pourquoi cette observation est vraie pour tous les entiers k ($k \geq 0$) afin qu'on puisse utiliser ce résultat pour déterminer la valeur de $T(4,100)$.
Remarquez que chaque triangulation après la première a été créée en plaçant un nouveau point intérieur dans la triangulation précédente.
De plus, puisque chaque carré est divisé en triangles, alors chaque nouveau point intérieur est placé *dans* un triangle de la triangulation précédente (puisque 3 points ne peuvent être situés sur la même droite).
Par exemple, on voit dans les figures ci-contre que P est situé à l'intérieur du triangle t de la triangulation précédente.
De plus, chacun des triangles autre que t n'est pas affecté par l'ajout de P. Donc ces triangles contribuent le même nombre de triangles (5) à la valeur de $T(4,3)$ qu'ils ne contribuaient à la valeur de $T(4,2)$.



$T(4,2)=6$ $T(4,3)=8$

Le triangle t contribue 1 à la valeur de $T(4,2)$.
Afin de diviser t en région triangulaires, on joint P à chacun des 3 sommets du triangle t (aucune autre triangulation de cette région n'est possible).

Donc, l'emplacement de P (peu importe son emplacement précis à condition qu'il soit situé à l'intérieur de t et non sur un bord) divise le triangle t en 3 triangles.

C'est-à-dire que t contribue 1 à la valeur de $T(4, 2)$, tandis que la région définie par t contribue 3 à la valeur de $T(4, 3)$ après qu'on ait placé P.

En résumé, la valeur de $T(4, k + 1)$ est 2 de plus que la valeur de $T(4, k)$ pour tous les entiers k ($k \geq 0$) car :

— le $(k+1)^e$ point intérieur peut être placé n'importe où dans la triangulation de $T(4, k)$ (à condition qu'il ne soit pas sur un bord)

— plus précisément, le $(k + 1)^e$ point intérieur est situé à l'intérieur d'un triangle dans la triangulation de $T(4, k)$

— ce triangle contribuait 1 à la valeur de $T(4, k)$

— après qu'on ait placé le $(k + 1)^e$ point intérieur à l'intérieur de ce triangle et qu'on l'ait relié à chacun des 3 sommets du triangle, cette région contribue maintenant 3 à la valeur de $T(4, k + 1)$

— soit une augmentation nette de 2 triangles, donc $T(4, k + 1) = T(4, k) + 2$ pour tous les entiers k ($k \geq 0$).

$T(4, 0) = 2$ et le nombre de triangles augmente de 2 pour chaque point intérieur supplémentaire.

Donc, le nombre de triangles augmente de $2k$ pour k points intérieurs supplémentaires, d'où on a donc $T(4, k) = T(4, 0) + 2k = 2 + 2k$ pour tous les entiers k ($k \geq 0$).

D'après cette formule, on obtient donc $T(4, 100) = 2 + 2(100) = 202$.

(c) Dans la triangulation d'un polygone régulier à n sommets comprenant aucun point intérieur, on peut choisir de relier l'un des n sommets à chacun des $n - 3$ sommets restants qui ne lui sont pas adjacents.

Toutes telles triangulations de tels polygones réguliers sont composées de $n - 2$ triangles, d'où $T(n, 0) = n - 2$ pour tous les entiers n ($n \geq 3$) (puisque $T(n, 0)$ est constant).

Le raisonnement dans la partie (b) s'applique à tout polygone régulier ayant $n \geq 3$ sommets.

C'est-à-dire que chaque point intérieur supplémentaire qui est ajouté à la triangulation de $n \geq 3$ sommets et $k \geq 0$ points intérieurs résulte en une augmentation nette de 2 triangles.

Donc, $T(n, k + 1) = T(n, k) + 2$ pour tous les polygones réguliers ayant $n \geq 3$ sommets et $k \geq 0$ points intérieurs.

Donc, le nombre de triangles augmente de $2k$ pour k points intérieurs supplémentaires, d'où on a donc $T(n, k) = T(n, 0) + 2k = (n - 2) + 2k$ pour tous les entiers k ($k \geq 0$).

D'après cette formule $T(n, k) = (n-2)+2k$, on obtient donc $T(n, n) = (n-2)+2n = 3n-2$ et $3n - 2 = 2020$ lorsque $n = \frac{2022}{3} = 674$.

4. (a) *Solution 1*

Si x_0 est pair, alors x_0^2 est pair, d'où $x_1 = x_0^2 + 1$ est impair.
Si x_1 est impair, alors x_1^2 est impair, d'où $x_2 = x_1^2 + 1$ est pair.
Donc, si x_0 est pair, alors x_2 est pair, d'où $x_2 - x_0$ est pair.

Si x_0 est impair, alors x_0^2 est impair, d'où $x_1 = x_0^2 + 1$ est pair.
Si x_1 est pair, alors x_1^2 est pair, d'où $x_2 = x_1^2 + 1$ est impair.
Donc, si x_0 est impair, alors x_2 est impair, d'où $x_2 - x_0$ est pair.

Donc, $x_2 - x_0$ est pair pout toutes les valeurs possibles de x_0.

Solution 2

En utilisant la définition à deux reprises et en simplifiant, on obtient :

$$\begin{aligned}
x_2 &= (x_1)^2 + 1 \\
x_2 &= ((x_0)^2 + 1)^2 + 1 \\
x_2 &= (x_0)^4 + 2(x_0)^2 + 2 \\
x_2 &= (x_0)^4 + 2((x_0)^2 + 1) \\
x_2 - x_0 &= (x_0)^4 + 2((x_0)^2 + 1) - x_0
\end{aligned}$$

Pour démontrer que $x_2 - x_0$ est pair, on peut démontrer que $(x_0)^4 + 2((x_0)^2 + 1) - x_0$ est pair (puisque les expressions sont égales).
Puisque $2((x_0)^2 + 1)$ est le produit d'un entier quelconque et 2, ce terme sera pair pour toutes les valeurs possibles de x_0.
Si x_0 est pair, alors $(x_0)^4$ est pair, d'où $(x_0)^4 + 2((x_0)^2 + 1) - x_0$, soit la somme et différence de trois termes pairs, est donc pair.
Si x_0 est impair, alors $(x_0)^4$ est impair et $(x_0)^4 - x_0$ est pair, d'où $(x_0)^4 + 2((x_0)^2 + 1) - x_0$ est donc pair.
Donc, $x_2 - x_0$ est pair pour toutes les valeurs possibles de x_0.

Solution 3

En utilisant la définition à deux reprises et en simplifiant, on obtient :

$$\begin{aligned}
x_2 &= (x_1)^2 + 1 \\
x_2 &= ((x_0)^2 + 1)^2 + 1 \\
x_2 &= (x_0)^4 + 2(x_0)^2 + 2 \\
x_2 - x_0 &= (x_0)^4 + 2(x_0)^2 - x_0 + 2 \\
x_2 - x_0 &= (x_0)^4 + (x_0)^2 + (x_0)^2 - x_0 + 2 \\
x_2 - x_0 &= (x_0)^2((x_0)^2 + 1) + x_0(x_0 - 1) + 2
\end{aligned}$$

Pour démontrer que $x_2 - x_0$ est pair, on peut démontrer que $(x_0)^2((x_0)^2 + 1) + x_0(x_0 - 1) + 2$ est pair (puisqu'ils sont égaux).
Puisque $x_0 - 1$ est 1 de moins que x_0, alors x_0 et $x_0 - 1$ sont des entiers consécutifs, d'où l'un d'eux est donc pair.
Donc, le produit $x_0(x_0 - 1)$ est pair.
De même, puisque $(x_0)^2$ est 1 de moins que $(x_0)^2 + 1$, alors ces entiers sont consécutifs, d'où l'un d'eux est donc pair.
Donc, le produit $(x_0)^2((x_0)^2 + 1)$ est pair.
Puisque $(x_0)^2((x_0)^2 + 1) + x_0(x_0 - 1) + 2$ est la somme de trois entiers pairs, alors $x_2 - x_0$ est pair pour toutes les valeurs possibles de x_0.

(b) Un entier est divisible par 10 uniquement lorsque son chiffre des unités est 0.
La différence $x_{2026} - x_{2020}$ a 0 comme chiffre des unités uniquement lorsque les chiffres des unités de x_{2026} et x_{2020} sont égaux.
Donc, on montrera que pour toutes les valeurs possibles de x_0, le chiffre des unités de x_{2026} est égal au chiffre des unités de x_{2020}, d'où $x_{2026} - x_{2020}$ sera donc divisible par 10.
Lorsqu'on divise un entier non négatif par 10, le reste est l'un des entiers de 0 à 9.
Donc, pour chaque choix possible de x_0, il existe un entier non négatif k tel que x_0 peut être exprimé de l'une des manières suivantes : $10k$, $10k + 1$, $10k + 2$, $\ldots$, $10k + 8$, $10k + 9$.
Par exemple, si x_0 a 4 comme chiffre des unités, alors $x_0 = 10k + 4$, k étant un entier non négatif, d'où $x_1 = (10k + 4)^2 + 1 = 100k^2 + 80k + 17 = 10(10k^2 + 8k + 1) + 7$. Ce dernier a donc 7 comme chiffre des unités.

Puisque x_1 n'est déterminé que par x_0 ($x_1 = (x_0)^2 + 1$), le chiffre des unités de x_1 est uniquement déterminé par le chiffre des unités de x_0.
Par exemple, si x_0 a 4 comme chiffre des unités, alors le chiffre des unités de x_1 est égal au chiffre des unités de $(4)^2 + 1$, soit 7.
De façon plus générale, si le chiffre des unités de x_i (i étant un entier non négatif) est égal à u, alors le chiffre des unités de x_{i+1} est égal à celui de $u^2 + 1$.
(Pouvez-vous expliquer pourquoi cela est vrai ?)
Par exemple, si l'on sait que $x_{15} = 29$, alors le chiffre des unités de x_{16} est égal à celui de $9^2 + 1 = 82$, soit 2.
Étant donné qu'on connaît tous les chiffres des unités possibles de x_0, cela nous fournit une méthode efficace pour déterminer le chiffre des unités de x_1, de x_2, de x_3 et ainsi de suite.
Pour chacun des 10 chiffres des unités possibles de x_0 (soit de 0 à 9), on dresse la liste des chiffres des unités des termes x_1 à x_7 dans le tableau ci-dessous :

x_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_1	1	2	5	0	7	6	7	0	5	2
x_2	2	5	6	1	0	7	0	1	6	5
x_3	5	6	7	2	1	0	1	2	7	6
x_4	6	7	0	5	2	1	2	5	0	7
x_5	7	0	1	6	5	2	5	6	1	0
x_6	0	1	2	7	6	5	6	7	2	1
x_7	1	2	5	0	7	6	7	0	5	2

On voit dans le tableau que pour chacun des chiffres des unités possibles de x_0, le chiffre des unités de x_1 est égal à celui de x_7.
Donc, en commençant par x_1, chaque colonne dans le tableau se répétera tous les 6 termes.
Donc, indépendamment de la valeur de départ x_0, x_{i+6} et x_i auront le même chiffre des unités pour tous les entiers i ($i \geq 1$).
Puisque $2026 - 2020 = 6$, alors x_{2026} et x_{2020} ont le même chiffre des unités, d'où $x_{2026} - x_{2020}$ a 0 comme chiffre des unités ; $x_{2026} - x_{2020}$ est donc divisible par 10.

(c) Puisque $x_{115} - 110 = (x_{115} - 5) - 105$, alors $x_{115} - 110$ est divisible par 105 uniquement lorsque $x_{115} - 5$ est divisible par 105.
De plus, $105 = 3 \times 5 \times 7$ et chacun de $3, 5, 7$ est un nombre premier, d'où $x_{115} - 5$ est divisible par 105 lorsqu'il est exactement divisible par 3, par 5 et par 7.
Chaque x_i est soit un multiple de 3, soit 1 de plus qu'un multiple de 3, soit 2 de plus qu'un multiple de 3.
Supposons que x_i est un multiple de 3. Alors $x_i = 3k$, k étant un entier non négatif, d'où

$$x_{i+1} = (x_i)^2 + 1 = (3k)^2 + 1 = 3(3k^2) + 1.$$

C'est-à-dire que ce dernier est 1 de plus qu'un multiple de 3.
Si x_i est 1 de plus qu'un multiple de 3, alors $x_i = 3k + 1$, k étant un entier non négatif, d'où

$$x_{i+1} = (x_i)^2 + 1 = (3k + 1)^2 + 1 = 9k^2 + 6k + 2 = 3(3k^2 + 2k) + 2.$$

C'est-à-dire que ce dernier est 2 de plus qu'un multiple de 3.
Si x_i est 2 de plus qu'un multiple de 3, alors $x_i = 3k + 2$, k étant un entier non négatif, d'où

$$x_{i+1} = (x_i)^2 + 1 = (3k + 2)^2 + 1 = 9k^2 + 12k + 5 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 2.$$

C'est-à-dire que ce dernier est 2 de plus qu'un multiple de 3.
Chaque choix possible de x_0 est soit un multiple de 3, soit 1 de plus qu'un multiple de 3, soit 2 de plus qu'un multiple de 3.
Si x_0 est un multiple de 3, alors x_1 est 1 de plus qu'un multiple de 3 et x_2, x_3, x_4, $\ldots$, et ainsi de suite sont chacun 2 de plus qu'un multiple de 3.
Si x_0 est 1 ou 2 de plus qu'un multiple de 3, alors x_1, x_2, x_3, x_4, $\ldots$, et ainsi de suite sont chacun 2 de plus qu'un multiple de 3.
Donc, $x_2, x_3, x_4, \ldots$, et ainsi de suite sont tous 2 de plus qu'un multiple de 3 (indépendamment de x_0). Donc, pour pour tous les entiers i ($i \geq 2$), x_i est un nombre que l'on peut exprimer sous la forme $3k+2$, k étant un entier non négatif.
Donc, $x_{115} - 5 = 3k + 2 - 5 = 3(k-1)$ est divisible par 3 pour tous les choix possibles de $x_0 = n$.
Donc, il faut seulement déterminer quand $x_{115} - 5$ est divisible par 5 et par 7.

Quelles sont les valeurs possibles de x_0 telles que $x_{115} - 5$ est divisible par 5 ?
$x_{115} - 5$ est divisible par 5 uniquement lorsque x_{115} est divisible par 5.
Chaque x_i est soit un multiple de 5, soit 1 de plus qu'un multiple de 5, soit 2 de plus qu'un multiple de 5, soit 3 de plus qu'un multiple de 5, soit 4 de plus qu'un multiple de 5.
En ce qui concerne la division par 5, on indique dans le tableau ci-dessous les restes de x_{i+1} étant donné chacun des 5 restes possibles de x_i (soit de 0 à 4) :

x_i	$x_{i+1} = (x_i)^2 + 1$
$5k$	$25k^2 + 1 = 5(5k^2) + 1$
$5k+1$	$25k^2 + 10k + 2 = 5(5k^2 + 2k) + 2$
$5k+2$	$25k^2 + 20k + 5 = 5(5k^2 + 4k + 1)$
$5k+3$	$25k^2 + 30k + 10 = 5(5k^2 + 6k + 2)$
$5k+4$	$25k^2 + 40k + 17 = 5(5k^2 + 8k + 3) + 2$

On formule donc les observations suivantes à partir de ce tableau :
— si x_i est un multiple de 5, alors x_{i+1} est 1 de plus qu'un multiple de 5
— si x_i est 1 de plus qu'un multiple de 5, alors x_{i+1} est 2 de plus qu'un multiple de 5
— si x_i est 2 de plus qu'un multiple de 5, alors x_{i+1} est un multiple de 5
— si x_i est 3 de plus qu'un multiple de 5, alors x_{i+1} est un multiple de 5
— si x_i est 4 de plus qu'un multiple de 5, alors x_{i+1} est 2 de plus qu'un multiple de 5
À l'aide de ces observations, on indique dans le tableau suivant les restes des divisions de x_1, x_2, x_3, x_4 par 5 pour chacun des restes possibles de x_0 :

x_0	0	1	2	3	4
x_1	1	2	0	0	2
x_2	2	0	1	1	0
x_3	0	1	2	2	1
x_4	1	2	0	0	2

En ce qui concerne la division par 5, on voit dans le tableau que pour chacun des restes possibles de x_0, le reste de x_1 est égal à celui de x_4.
Donc, à partir de x_1, chaque colonne dans le tableau se répétera tous les 3 termes. Donc, indépendamment de la valeur de départ x_0, x_{i+3} et x_i ont les mêmes restes après une division par 5 pour tous les entiers i ($i \geq 1$).
Puisque $115 = 3(37) + 4$, alors x_{115} et x_4 ont les mêmes restes après une division par 5, d'où x_{115} est donc divisible par 5 pour tous les choix de $x_0 = n$ qui sont soit 2 de plus qu'un multiple de 5, soit 3 de plus qu'un multiple de 5.

Enfin, quelles sont les valeurs possibles de x_0 telles que $x_{115} - 5$ est divisible par 7 ?
$x_{115} - 5$ est divisible par 7 uniquement lorsque x_{115} est 5 de plus qu'un multiple de 7.
Chaque x_i est exactement l'un des suivants : un multiple de 7, 1 de plus qu'un multiple de 7, 2 de plus qu'un multiple de 7, et ainsi de suite jusqu'à 6 de plus qu'un multiple de 7.
En ce qui concerne la division par 7, on indique dans le tableau ci-dessous les restes de x_{i+1} étant donné chacun des 7 restes possibles de x_i (soit de 0 à 6) :

x_i	$x_{i+1} = (x_i)^2 + 1$
$7k$	$49k^2 + 1 = 7(7k^2) + 1$
$7k+1$	$49k^2 + 14k + 2 = 7(7k^2 + 2k) + 2$
$7k+2$	$49k^2 + 28k + 5 = 7(7k^2 + 4k) + 5$
$7k+3$	$49k^2 + 42k + 10 = 7(7k^2 + 6k + 1) + 3$
$7k+4$	$49k^2 + 56k + 17 = 7(7k^2 + 8k + 2) + 3$
$7k+5$	$49k^2 + 70k + 26 = 7(7k^2 + 10k + 3) + 5$
$7k+6$	$49k^2 + 84k + 37 = 7(7k^2 + 12k + 5) + 2$

On formule donc les observations suivantes à partir de ce tableau :
— si x_i est un multiple de 7, alors x_{i+1} est 1 de plus qu'un multiple de 7
— si x_i est 1 de plus qu'un multiple de 7, alors x_{i+1} est 2 de plus qu'un multiple de 7
— si x_i est 2 de plus qu'un multiple de 7, alors x_{i+1} est 5 de plus qu'un multiple de 7
— si x_i est 3 de plus qu'un multiple de 7, alors x_{i+1} est 3 de plus qu'un multiple de 7
— si x_i est 4 de plus qu'un multiple de 7, alors x_{i+1} est 3 de plus qu'un multiple de 7
— si x_i est 5 de plus qu'un multiple de 7, alors x_{i+1} est 5 de plus qu'un multiple de 7
— si x_i est 6 de plus qu'un multiple de 7, alors x_{i+1} est 2 de plus qu'un multiple de 7
À l'aide de ces observations, on indique dans le tableau suivant les restes des divisions de x_1, x_2, x_3, x_4 par 7 pour chacun des restes possibles de x_0 :

x_0	0	1	2	3	4	5	6
x_1	1	2	5	3	3	5	2
x_2	2	5	5	3	3	5	5
x_3	5	5	5	3	3	5	5
x_4	5	5	5	3	3	5	5

On voit dans le tableau que si x_0 est $0, 1, 2, 5$ ou 6 de plus qu'un multiple de 7, alors x_i est 5 de plus qu'un multiple de 7 pour tous les entiers i ($i \geq 3$).
De plus, si x_0 est 3 ou 4 de plus qu'un multiple de 7, alors x_i est 3 de plus qu'un multiple de 7 pour tous les entiers i ($i \geq 1$) (et n'est donc jamais 5 de plus qu'un multiple de 7).
Donc, $x_{115} - 5$ est un multiple de 7 uniquement lorsque x_0 n'est pas 3 ou 4 de plus qu'un multiple de 7.

Résumé :

$x_{115} - 110$ est divisible par 105 uniquement lorsque
— x_0 est 2 ou 3 de plus qu'un multiple de 5 et
— x_0 est un multiple de 7 ou est $1, 2, 5$ ou 6 de plus qu'un multiple de 7.
Les valeurs de x_0 situés dans l'intervalle $1 \leq x_0 \leq 35$ qui satisfont ces propriétés sont :

$$2, 7, 8, 12, 13, 22, 23, 27, 28, 33$$

Les valeurs de x_0 dans l'intervalle $36 \leq x_0 \leq 100$ qui satisfont ces propriétés doivent chacun être supérieur à l'un des nombres dans la liste ci-dessus par un multiple de $5 \times 7 = 35$.
Donc, il y a 10 valeurs x_0 possibles dans la liste originale, 10 autres de $2 + 35 = 37$ à $33 + 35 = 68$, et 9 autres de $2 + 2(35) = 72$ à $28 + 2(35) = 98$; soit 29 valeurs possibles en

tout (remarquez que $33 + 2(35) > 100$).
Si Parsa choisit un entier n ($1 \leq n \leq 100$) au hasard et qu'elle pose $x_0 = n$, la probabilité que $x_{115} - 110$ soit divisible par 105 est égale à $\frac{29}{100}$.