



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatie

(11^e année – Sec. V)

le mercredi 15 avril 2020

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 16 avril 2020

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)



UNIVERSITY OF
WATERLOO

Durée : 75 minutes

©2020 University of Waterloo

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 4

Chaque question vaut 10 points.

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci :



- Chacune vaut 2 ou 3 points.
- Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
- **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.

2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci :



- Elles valent le reste des 10 points attribués à la question.
- La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
- Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
- Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, et leur niveau scolaire, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca. Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

NOTE :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de  , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de  , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent être présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
7. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Fryer, Galois ou Hypatie.

1. Une épicerie vend des sacs d'avocats à 5,00 \$ le sac et des boîtes de mangues à 12,50 \$ la boîte. Un sac d'avocats contient 6 avocats tandis qu'une boîte de mangues contient 15 mangues. Le nombre de sacs achetés et le nombre de boîtes achetées seront toujours des nombres entiers.



- (a) Vendredi, un chef cuisinier a acheté 12 sacs d'avocats et un certain nombre de boîtes de mangues. Si le coût total était de 135,00 \$, combien de boîtes de mangues a-t-il achetées ?



- (b) Les samedis seulement, l'épicerie offre un rabais de 10 % sur le coût régulier d'un sac d'avocats et un rabais de 20 % sur le coût régulier d'une boîte de mangues. Quel est le coût total de 8 sacs d'avocats et 4 boîtes de mangues les samedis ?

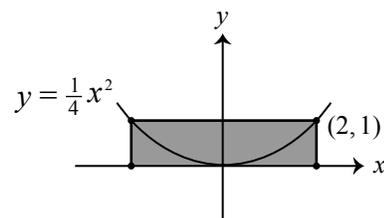


- (c) Lundi, le chef cuisinier a préparé un mets dont la recette nécessitait 100 avocats et 70 mangues. Sachant que le chef cuisinier n'a acheté que le nombre minimal de sacs et de boîtes pour subvenir à ses besoins, déterminer combien lui a coûté cet achat.



- (d) Mardi, le chef cuisinier a préparé un mets dont chaque assiette nécessitait 1 avocat et 2 mangues. Sachant que le chef cuisinier a dépensé *exactement* 75,00 \$ dans l'achat d'avocats et de mangues, déterminer le plus grand nombre d'assiettes qu'il a pu préparer.

2. La parabole d'équation $y = \frac{1}{4}x^2$ a l'origine comme sommet et l'axe des ordonnées comme axe de symétrie. Pour n'importe quel point (p, q) situé sur la parabole (et n'étant pas situé à l'origine), on peut tracer un *rectangle parabolique*. Ce rectangle aura un sommet situé au point (p, q) , un deuxième sommet situé sur la parabole et deux autres sommets situés sur l'axe des abscisses. Dans la figure ci-contre, on voit un rectangle parabolique dont l'aire est égale à 4.





(a) Un rectangle parabolique a un sommet situé au point $(6, 9)$. Quelles sont les coordonnées de ses trois autres sommets ?



(b) Un rectangle parabolique a un sommet situé au point $(-3, 0)$. Quelle est son aire ?



(c) Déterminer les aires des deux rectangles paraboliques qui ont des côtés de longueur 36.

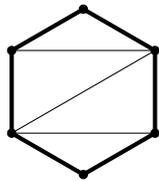


(d) Déterminer l'aire du rectangle parabolique dont la longueur et la largeur sont égales.

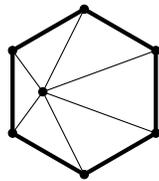
3. Une *triangulation* d'un polygone régulier est une division de son intérieur en régions triangulaires. Dans une telle division, chaque sommet de chaque triangle est soit un sommet du polygone soit un point situé à l'intérieur du polygone. Dans la triangulation d'un polygone régulier qui possède $n \geq 3$ sommets et qui a $k \geq 0$ points en son intérieur (sans que trois de ces $n + k$ points soient situés sur la même droite),

- les segments de droites reliant les couples de ces points ne se coupent deux à deux qu'aux extrémités et
- chaque point à l'intérieur du polygone est le sommet d'au moins une des régions triangulaires.

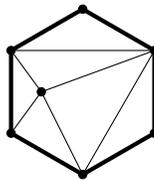
Chaque polygone régulier a au moins une triangulation. Toutes les triangulations possibles d'un polygone qui possède n sommets et qui a k points en son intérieur produiront le même nombre de régions triangulaires. De plus, ce nombre de régions triangulaires est représenté par $T(n, k)$. Par exemple, exactement 6 régions triangulaires seront produites par chacune des triangulations possibles d'un hexagone régulier qui a 1 point en son intérieur. C'est-à-dire, $T(6, 1) = 6$.



$$T(6, 0) = 4$$



$$T(6, 1) = 6$$



(a) Quelle est la valeur de $T(3, 2)$?



(b) Déterminer la valeur de $T(4, 100)$.



(c) Déterminer toutes les valeurs possibles de n pour lesquelles $T(n, n) = 2020$.

4. Soit x_0 un entier non négatif. Pour chaque entier $i \geq 0$, on définit $x_{i+1} = (x_i)^2 + 1$.



(a) Démontrer que $x_2 - x_0$ est pair pour toutes les valeurs possibles de x_0 .



(b) Démontrer que $x_{2026} - x_{2020}$ est divisible par 10 pour toutes les valeurs possibles de x_0 .



(c) Parsa choisit un entier n ($1 \leq n \leq 100$) au hasard et elle pose $x_0 = n$. Déterminer la probabilité que $x_{115} - 110$ soit divisible par 105.



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Hypatie de 2020! Chaque année, plus de 260 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire ou au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2020.

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- des copies gratuites des concours précédents
- des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
- des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- obtenir des renseignements au sujet des concours de 2020/2021
- inscrire vos élèves aux Concours canadiens de mathématiques de niveau intermédiaire et supérieur qui auront lieu en novembre
- jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne
- vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
- vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
- vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
- trouver les résultats de vos élèves dans les concours