Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Gauss 2020

(7e et 8e années – Secondaire I et II)

le mercredi 13 mai 2020
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 14 mai 2020
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

Personnel du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

Ed Anderson
Jeff Anderson
Terry Bae
Jacquelene Bailey
Shane Bauman
Jenn Brewster
Ersal Cahit
Diana Castañeda Santos
Sarah Chan
Ashely Congi
Serge D'Alessio
Fiona Dunbar
Mike Eden
Sandy Emms
Barry Ferguson
Steve Furino
John Galbraith
Lucie Galinon
Robert Garbary
Rob Gleeson
Sandy Graham
Conrad Hewitt
Valentina Hideg
Angie Hildebrand
Carrie Knoll
Christine Ko
Judith Koeller
Laura Kreuzer
Bev Marshman
Paul McGrath
Jen Nelson
Ian Payne
J.P. Pretti
Alexandra Rideout
Nick Rollick
Kim Schnarr
Carolyn Sedore
Ashley Sorensen
Ian VanderBurgh
Troy Vasiga
Heather Vo
Bonnie Yi

Comité du concours Gauss

Ashley Sorensen (présidente), University of Waterloo, Waterloo, ON
Kevin Grady (président adjoint), Cobden District P.S., Cobden, ON
Kora Lee Gallant, Madeline Symonds M.S., Hammonds Plains, NS
Sarah Garrett, Mitchell Woods P.S., Guelph, ON
JoAnne Halpern, Thornhill, ON
David Matthews, University of Waterloo, Waterloo, ON
John McLoughlin, University of New Brunswick, Fredericton, NB
David Switzer, Scott Central P.S., Sandford, ON
Rachael Verbruggen, University of Waterloo, Waterloo, ON
Robert Wong, Edmonton, AB
Chris Wu, Ledbury Park E. and M.S., North York, ON
Lori Yee, William Dunbar P.S., Pickering, ON

7^{e} année

1. Puisqu'un stylo coûte 2 \$, 10 stylos coûteront 10×2 \$ $= 20$ \$.

Réponse : (E)

2. Par rapport à l'origine $(0, 0)$, le point P est situé 2 unités à droite (dans la direction positive de l'axe des abscisses) et 4 unités au dessus (dans la direction positive de l'axe des ordonnées).
Donc, le point P a pour coordonnées $(2, 4)$.

Réponse : (E)

3. Puisque 99 est près de 100 et que 9 est près de 10, on obtient $100 \times 10 = 1000$ comme valeur approximative de 99×9.
Donc, parmi les choix de réponse, l'entier 1000 est probablement l'entier le plus près de 99×9.
En multipliant, on obtient 891 comme valeur de 99×9.
Parmi les choix de réponse, 1000 est effectivement l'entier le plus près de 99×9.

Réponse : (D)

4. Puisque la température de l'après-midi (5°C) est plus chaude que la température du matin (−3°C), on obtient l'augmentation de température en soustrayant la température du matin de celle de l'après-midi.
On a donc $5 - (-3) = 5 + 3 = 8$.
Alors, la température a augmenté de 8°C.

Réponse : (A)

5. En moyenne, Alexia a fait $243\,000 \div 30 = 8100$ pas par jour en avril.

Réponse : (B)

6. *Solution 1*
La mesure d'un angle plein est égale à 360°.
Puisque 90° est égal à $\frac{90^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{4}$ d'un angle plein, alors $\frac{1}{4}$ des élèves ont choisi le jus.
Donc, le restant des élèves, soit $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, ont choisi le lait.
Puisque $\frac{3}{4}$ est égal à $3 \times \frac{1}{4}$, donc $3 \times 80 = 240$ élèves ont choisi le lait.

Solution 2
Comme dans la solution 1, $\frac{1}{4}$ des élèves ont choisi le jus.
Puisque les 80 élèves qui ont choisi le jus représentent $\frac{1}{4}$ du nombre total d'élèves, on a donc $4 \times 80 = 320$ comme nombre total d'élèves.
Alors, $320 - 80 = 240$ élèves ont choisi le lait.

Réponse : (C)

7. Étant donné que les troisième et quatrième entiers de la liste sont consécutifs et ont une somme de 11, alors 5 et 6 sont, respectivement, les troisième et quatrième entiers de la liste.
Le cinquième entier de la liste est alors 7, on a donc 8 comme sixième entier de la liste.

Réponse : (D)

8. *Solution 1*
Le segment de 0 à 1,0 de la droite numérique est divisé en 4 parties égales par les marques de graduation P, Q et R.
Donc, la distance séparant les marques de graduation adjacentes est égale à $\frac{1{,}0-0}{4} = 0{,}25$.
Puisque R est situé à la 3^{e} marque de graduation à partir de la gauche, la valeur de R est égale à $3 \times 0{,}25 = 0{,}75$.
Puisque U est situé à la 6^{e} marque de graduation à partir de la gauche, la valeur de U est égale

à $6 \times 0{,}25 = 1{,}5$.
Donc, lorsqu'on divise la valeur de R par la valeur de U, on obtient $\frac{0{,}75}{1{,}5} = 0{,}5$.

Solution 2
Le nombre R est situé à la 3^e marque de graduation à partir de la gauche.
Le nombre U est situé à la 6^e marque de graduation à partir de la gauche.
Puisque les marques de graduation sur la droite numérique sont espacées de manière égale, la valeur de R doit être égale à la moitié de la valeur de U (car 3 est la moitié de 6).
Donc, lorsqu'on divise la valeur de R par la valeur de U, on obtient $\frac{1}{2}$, ou 0,5.

Réponse : (B)

9. Puisque le triangle est un triangle isocèle, la longueur de côté inconnue est aussi égale à 12 cm.
Le triangle a un périmètre de $14 + 12 + 12 = 38$ cm tandis que le rectangle a un périmètre de $x + 8 + x + 8 = 2x + 16$ cm.
Puisque le périmètre du triangle est égal à celui du rectangle, on a $2x + 16 = 38$.
Puisque $22 + 16 = 38$, donc $2x = 22$, d'où $x = 11$.

Réponse : (C)

10. Dans le tableau suivant, on dresse la liste des diviseurs de chacun des choix de réponse (autres que le nombre lui-même) et on détermine leurs sommes.

Choix de réponse	Diviseurs	Somme des diviseurs
8	$1, 2, 4$	$1 + 2 + 4 = 7$
10	$1, 2, 5$	$1 + 2 + 5 = 8$
14	$1, 2, 7$	$1 + 2 + 7 = 10$
18	$1, 2, 3, 6, 9$	$1 + 2 + 3 + 6 + 9 = 21$
22	$1, 2, 11$	$1 + 2 + 11 = 14$

Les choix de réponse $8, 10, 14$ et 22 ont chacun une somme de diviseurs inférieure au nombre lui-même.
Donc, aucun de ces quatre choix de réponse n'est un nombre abondant. (On attribue à ces derniers le nom de «nombres déficients».)
Les diviseurs de 18 ont une somme de 21. Puisque cette somme est supérieure à 18, ce dernier est donc un nombre abondant.

Réponse : (D)

11. Puisque sept boîtes contiennent chacune exactement 10 biscuits, il doit donc y avoir $7 \times 10 = 70$ biscuits en tout.
Si les biscuits sont partagés également entre 5 personnes, alors chaque personne recevra $70 \div 5 = 14$ biscuits.

Réponse : (A)

12. Puisqu'Abdul a 9 ans de plus que Susie et que Binh a 2 ans de plus que Susie, alors Abdul a $9 - 2 = 7$ ans de plus que Binh.
Par exemple, si Susie avait 10 ans, alors Abdul aurait $9 + 10 = 19$ ans tandis que Binh aurait $2 + 10 = 12$ ans. On remarque donc qu'Abdul a $19 - 12 = 7$ ans de plus que Binh.

Réponse : (E)

13. Puisque les points $P(15, 55)$ et $Q(26, 55)$ ont la même ordonnée, la distance qui les sépare est donc égale à la différence positive de leurs abscisses, soit $26 - 15 = 11$.
De même, puisque les points $R(26, 35)$ et $Q(26, 55)$ ont la même abscisse, la distance qui les sépare est donc égale à la différence positive de leurs ordonnées, soit $55 - 35 = 20$.
Puisque $PQ = 11$ et $RQ = 20$, le rectangle $PQRS$ a donc une aire de $11 \times 20 = 220$.

Réponse : (C)

14. Avant que Jacques ne commence à manger les bonbons haricots, il y avait $15 + 20 + 16 = 51$ bonbons dans la boîte.
Après que Jacques en ait mangé deux, il n'en reste plus que $51 - 2 = 49$.
L'un des bonbons que Jacques a mangé était vert tandis que l'autre était bleu.
Ainsi, après avoir mangé ces deux bonbons, la boîte contient toujours 15 bonbons rouges.
Sachant que chacun des bonbons haricots restants a les mêmes chances d'être choisi, la probabilité de choisir un bonbon rouge est égale à $\frac{15}{49}$.

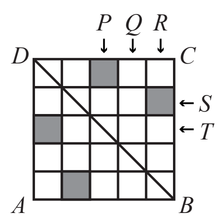
Réponse : (C)

15. *Solution 1*
Puisqu'il y a 60 minutes dans une heure, donc 1 heure et 52 minutes font $60+52 = 112$ minutes.
Si Émile termine la course en 54 minutes, soit 4 minutes de moins qu'Olivia, alors Olivia terminera la course en 58 minutes.
Leurs temps de course totaliseront donc $54 + 58 = 112$ minutes, ce qu'il fallait.
Donc, Olivia a complété la course en 58 minutes.

Solution 2
Comme dans la solution 1, leurs temps de course ont totalisé 112 minutes.
Si Émile avait pris 4 minutes de plus pour compléter la course, son temps de course aurait été égal à celui d'Olivia. Leurs temps de course auraient donc totalisé $112 + 4 = 116$ minutes.
Si leurs temps de course étaient égaux et totalisaient 116 minutes, on aurait pu dire qu'ils ont chacun terminé la course en $116 \div 2 = 58$ minutes.
Donc, Olivia a complété la course en 58 minutes.

Réponse : (C)

16. Afin que le carré $ABCD$ soit symétrique par rapport à la droite BD, les cases P et S devraient être ombrées.



Pour le voir, on peut remarquer que les sommets A et C sont des images l'un de l'autre d'une réflexion par rapport à la droite BD. Donc, les côtés DA et DC sont aussi des images l'un de l'autre d'une réflexion par rapport à la droite BD.
De plus, dans le carré $ABCD$, la première colonne et la première rangée sont aussi des images l'une de l'autre d'une réflexion par rapport à la droite BD.
Donc, lors d'une réflexion par rapport à la droite BD, la case ombrée située dans la rangée 3 de la colonne 1 a une image située dans la rangée 1 de la colonne 3 (soit la case P).
De façon générale, lors d'une réflexion par rapport à la droite BD, l'image de la case située dans la rangée r de la colonne c est celle située dans la rangée c de la colonne r.
Donc, lors d'une réflexion par rapport à la droite BD, la case ombrée située dans rangée 5 de la colonne 2 a une image située dans la rangée 2 de la colonne 5 (soit la case S).

Réponse : (A)

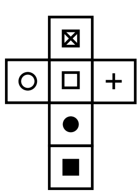
17. Si Rosie dépose 30 \$ par mois pendant m mois, elle économisera $30m$ dollars.
Puisque Rosie a 120 \$ dans son compte aujourd'hui, alors, après m dépôts, Rosie aura économisé $120 + 30m$ dollars en tout.

Réponse : (E)

18. Les triangles isocèles ont deux angles de même mesure. Donc les possibilités pour ces deux triangles sont :
1) Les deux angles égaux ont chacun une mesure de $70°$, ou
2) Aucun des deux angles égaux n'a une mesure de $70°$.
(On remarque qu'un triangle ne peut avoir trois angles égaux mesurant chacun $70°$ car leur somme serait alors de $3 \times 70° = 210°$, soit une valeur supérieure à $180°$.)
Si les deux angles égaux ont chacun une mesure de $70°$, alors le troisième angle aura une mesure de $180° - 2 \times 70° = 180° - 140° = 40°$.
Si aucun des deux angles égaux n'a une mesure de $70°$, donc les deux angles égaux ont des mesures dont la somme est de $180° - 70° = 110°$. Donc, la mesure de chacun des deux angles égaux est égale à la moitié de $110°$, soit $55°$.
On remarque que dans le premier triangle, la mesure de chacun des deux angles restants ($70°$ et $40°$) est paire tandis que dans le second triangle, la mesure de chacun des deux angles restants ($55°$ et $55°$) est impaire.
Dans le premier triangle, les deux angles égaux ont des mesures dont la somme est de $S = 70° + 70° = 140°$.
Dans le second triangle, les deux angles égaux ont des mesures dont la somme est de $T = 55° + 55° = 110°$.
$S + T$ a donc une valeur de $140° + 110° = 250°$.

Réponse : (B)

19. On commence d'abord en constatant qu'il y a 6 symboles différents et que chacune des faces du cube doit contenir un symbole différent.
On numérote les trois vues du cube, de gauche à droite : soit 1 la première vue, 2 la deuxième vue et 3 la troisième vue.
On voit dans chacune des vues 1 et 2 une face contenant le symbole ⊠ .
Quel symbole se trouve sur la face opposée à celle contenant le ⊠ ?
Dans la vue 1, puisque □ et ○ paraissent sur des faces adjacentes à celle qui contient le ⊠, aucun des deux ne peut être le symbole contenu dans la face opposée à celle qui contient le ⊠ .
Dans la vue 2, puisque ■ et + paraissent sur des faces adjacentes à celle qui contient le ⊠ , aucun des deux ne peut être le symbole contenu dans la face opposée à celle qui contient le ⊠ .
À ce point-ci dans nos démarches, il ne reste plus qu'un seul symbole, ● est donc le symbole contenu dans la face opposée à celle qui contient le ⊠ et vice versa.
On voit le patron du cube dans la figure ci-dessous.



Réponse : (C)

20. À chacun des quatre lancers de la pièce, Jeanne se déplacera soit d'un point vers le haut soit d'un point vers la droite.
Puisque Jeanne peut se déplacer dans deux directions différentes à chacun des quatre lancers de la pièce, il y a $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ chemins différents qui peuvent la mener à l'un des points P, Q, R, S ou T.
Si l'on désigne H comme étant un déplacement vers le haut et D comme étant un déplacement vers la droite, on peut représenter les 16 chemins possibles de la manière suivante : $HHHH$, $HHHD$, $HHDH$, $HHDD$, $HDHH$, $HDHD$, $HDDH$, $HDDD$, $DHHH$, $DHHD$, $DHDH$, $DHDD$, $DDHH$, $DDHD$, $DDDH$, $DDDD$.

Lorsqu'on lance une pièce, les deux résultats possibles, pile ou face, sont équiprobables et ont comme résultats respectifs un déplacement d'un point vers la droite et un déplacement d'un point vers le haut.
Autrement dit, les 16 chemins que l'on peut obtenir à partir des quatre lancers sont tous des résultats équiprobables.
Donc, après quatre lancers de la pièce, la probabilité que Jeanne soit située au point R est égale au nombre de chemins qui mènent au point R divisé par le nombre total de chemins possibles, soit 16.
Parmi les 16 chemins, combien mènent au point R ?
En commençant à A, un chemin peut avoir R comme point final s'il contient deux déplacements vers le haut (deux H) et deux déplacements vers la droite (deux D).
Il y a 6 tels chemins : $HHDD$, $HDHD$, $HDDH$, $DHHD$, $DHDH$, $DDHH$.
(Par ailleurs, on remarque que chacun des 10 autres chemins mènera à l'un des 4 points P, Q, S, T.)
Après quatre lancers de la pièce, la probabilité que Jeanne soit située au point R est égale à $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

Réponse : (B)

21. Puisque chaque nombre de quatre chiffres doit être supérieur à 2000, on obtient le plus petit de ceux-ci, 2020, en répétant le nombre de deux chiffres 20.
Puisque chaque nombre de quatre chiffres doit être inférieur à 10 000, on obtient le plus grand de ceux-ci, 9999, en répétant le nombre de deux chiffres 99.
On peut répéter chaque nombre de deux chiffres entre 20 et 99 afin d'obtenir un nombre de quatre chiffres entre 2000 et 10 000.
Au total, il y a $99 - 20 + 1 = 80$ nombres qui remplissent les conditions de l'énoncé.

Réponse : (A)

22. Céline a dépensé 5,00 \$ pour des bonbons du type A et 7,00 \$ pour des bonbons du type B, soit un total de 12,00 \$.
Le prix moyen de tous les bonbons qu'elle a acheté était de 1,50 \$ par 100 grammes.
C'est-à-dire que Céline aurait dépensé 1,50 \$ si elle avait acheté 100 grammes de bonbons.
Donc, si elle avait acheté 200 grammes de bonbons, elle aurait dépensé $2 \times 1{,}50\ \$ = 3{,}00\ \$$.
Combien de grammes de bonbons Céline a-t-elle dû acheter afin d'avoir dépensé 12,00 \$?
Puisque $8 \times 1{,}50\ \$ = 12{,}00\ \$$ (ou $12{,}00\ \$ \div 1{,}50\ \$ = 8$), alors elle a dû acheter 800 grammes de bonbons en tout.
Puisque Céline a acheté 300 grammes de bonbons du type A, alors elle a acheté $800 - 300 = 500$ grammes de bonbons du type B.

Réponse : (C)

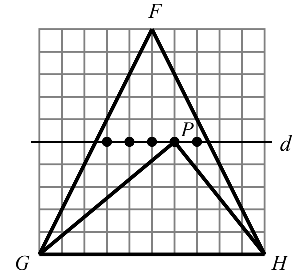
23. Si le premier entier strictement positif de la liste est a et le deuxième est b, alors on peut exprimer le troisième comme étant $a + b$, le quatrième comme étant $b + (a + b)$ ou $a + 2b$ et le cinquième comme étant $(a + b) + (a + 2b)$ ou $2a + 3b$.
Donc, on doit déterminer le nombre de couples d'entiers strictement positifs a et b (a étant inférieur à b car les termes de la liste dont disposés en ordre croissant) qui vérifient $2a+3b = 124$.
Quelle est la plus grande valeur possible de b ?
Si $b = 42$, donc $3b = 3 \times 42 = 126$, ce dernier est trop grand car $2a + 3b = 124$. (On remarque que plus la valeur de b est grande, plus celle de $3b$ est grande.)
Si $b = 41$, donc $3b = 3 \times 41 = 123$.
Dans ce cas, on a $2a = 124 - 123 = 1$. Or, on ne peut admettre 1 comme valeur de $2a$ puisque a est un entier strictement positif.

Si $b = 40$, donc $3b = 3 \times 40 = 120$. Cela signifie que $2a = 4$ ou $a = 2$.
Donc, 40 est la plus grande valeur possible de b.
Quelle est la plus petite valeur possible de b ?
Si $b = 26$, donc $3b = 3 \times 26 = 78$. Cela signifie que $2a = 124 - 78 = 46$ ou $a = 23$.
Si $b = 25$, donc $3b = 3 \times 25 = 75$.
Dans ce cas, on a $2a = 124 - 75 = 49$. Or, on ne peut admettre 49 comme valeur de $2a$ puisque a est un entier strictement positif.
Si $b = 24$, donc $3b = 3 \times 24 = 72$. Cela signifie que $2a = 124 - 72 = 52$ ou $a = 26$.
Or, puisque les termes de la liste sont disposés en ordre croissant et que la liste a 26 comme premier terme, le deuxième terme ne peut être 24.
Plus les valeurs de b sont petites, plus celles de a seront grandes. Donc, 26 est la plus petite valeur possible de b.
D'après les valeurs de b tentées jusqu'à présent, on remarque que $3b$ est impair lorsque b est impair (puisque deux entiers impairs ont un entier impair comme produit), donc $124 - 3b$ est impair (puisqu'un entier pair et un entier impair ont un entier impair comme différence).
Donc, lorsque b est impair, $124 - 3b$ est impair, d'où $2a$ est aussi impair (puisque $2a = 124 - 3b$).
Or, $2a$ aura toujours une valeur paire peu importe la valeur de l'entier a et donc b ne peut pas être impair.
À l'inverse, lorsque b est pair, $124 - 3b$ est pair (comme il fallait) et donc toutes les valeurs entières paires de b situées dans la fourchette de 26 à 40 (26 et 40 compris) vont satisfaire aux critères.
Ces valeurs de b sont 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38 et 40. Donc il y a 8 telles listes de cinq entiers strictement positifs qui ont 124 comme cinquième entier. Ces 8 listes sont : 2, 40, 42, 82, 124 ; 5, 38, 43, 81, 124 ; 8, 36, 44, 80, 124 ; 11, 34, 45, 79, 124 ; 14, 32, 46, 78, 124 ; 17, 30, 47, 77, 124 ; 20, 28, 48, 76, 124 ; 23, 26, 49, 75, 124.

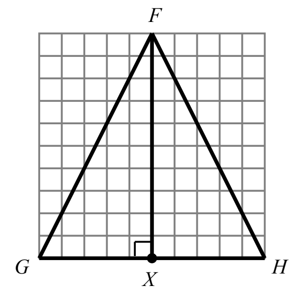
Réponse : (E)

24. On détermine d'abord l'aire du triangle FGH.
La base GH a une longueur de 10. Le triangle a une hauteur de 10 (soit la longueur de la droite perpendiculaire à GH et qui relie le point F à GH). Donc, le triangle FGH a une aire égale à $\frac{1}{2} \times 10 \times 10 = 50$.
On veut déterminer lesquels des 41 points sont des emplacements possibles de P tels que l'on puisse avoir une aire égale à $\frac{1}{2} \times 50 = 25$ pour le triangle FPG ou le triangle GPH ou le triangle HPF. On commence d'abord en considérant les emplacements possibles de P tels que le triangle GPH ait une aire de 25.
La base GH a une longueur de 10 et donc la hauteur du triangle GPH (soit la longueur de la droite perpendiculaire à GH et qui relie le point P à GH) doit être égale à 5 (puisque $\frac{1}{2} \times 10 \times 5 = 25$). Puisque la distance séparant deux droites parallèles est toujours constante, on peut utiliser quelconque point P situé sur une droite parallèle à GH (la droite parallèle étant située à 5 unités de GH) afin de former un triangle GPH dont l'aire est égale à 25.

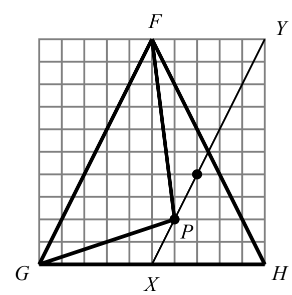
La droite d est parallèle à GH et est située à 5 unités au dessus de GH, donc quelconque point situé sur d se trouve à une distance de 5 unités de la base GH. Il y a 5 points qui sont à la fois situés sur d (ces points étant situés sur les points d'intersection des lignes du quadrillage) et à l'intérieur du triangle FGH. On voit ces 5 points dans la figure ci-contre ainsi que l'un des cinq triangles GPH possibles.



On considère ensuite les emplacements possibles de P tels que le triangle FPG ait une aire de 25.
On considère le point X situé sur GH de manière que FX est perpendiculaire à GH.
Puisque le triangle FGH est un triangle isocèle, alors FX divise l'aire du triangle FGH en deux et donc le triangle FXG a une aire de 25.
Or, si le point X est situé sur GH, alors il n'est pas situé *à l'intérieur* du triangle FGH.
Donc, X n'est pas un emplacement possible de P. Cela dit, on en tire des données précieuses qui nous aideront à formuler de nouvelles idées.
Si l'on considère FG comme étant la base du triangle FXG, donc la longueur de la droite perpendiculaire à FG et reliant le point X à FG est égale à la hauteur requise du triangle FXG telle que ce dernier ait une aire de 25.



Donc, on peut utiliser quelconque point P situé sur une droite parallèle à FG (la droite parallèle étant située à la même distance de FG que le point X) afin de former un triangle FPG dont l'aire est égale à 25.
(Cette propriété est la même que celle décrite précédemment pour le triangle GPH de base GH.)
Comment peut-on créer une droite qui est parallèle à FG et sur laquelle est situé le point X ?
En commençant au point G, si l'on se déplace de 5 unités vers la droite et de 10 unités vers le haut, on atteint le point F.
Donc, on commence au point X et on se déplace de 5 unités vers la droite et de 10 unités vers le haut afin d'atteindre le point que l'on désignera par Y.
N'importe quel point situé sur XY se trouve à une distance de la base FG égale à la hauteur requise du triangle FPG.
Il y a 2 points qui sont à la fois situés sur XY (ces points étant situés sur les points d'intersection des lignes du quadrillage) et à l'intérieur du triangle FGH.
(Afin d'atteindre ces deux points, on remarque qu'on peut effectuer un déplacement de 5 unités vers la droite et de 10 unités vers le haut en effectuant une série de déplacements de 1 unité vers la droite et de 2 unités vers le haut.)
On voit ces 2 points dans la figure ci-contre ainsi que l'un des deux triangles FPG possibles.



Finalement, on considère les emplacements possibles de P tels que le triangle HPF ait une aire de 25.
Du fait de la symétrie, ce cas est identique au cas précédent.
Donc, il y a 2 emplacements possibles de P tels que le triangle HPF ait une aire de 25.
Donc, $5+2+2 = 9$ triangles en tout ont une aire qui est exactement la moitié de celle du triangle FGH.

Réponse : (E)

25. Chaque 12 minutes, l'autobus A effectue un tour complet qui a P comme point de départ et d'arrivée.
Puisque $PX = XS$, l'autobus A parcourt la distance de P à X en $12 \div 4 = 3$ minutes. Il parcourt donc la distance de X à S à X en 6 minutes (de X à S en 3 minutes et de S à X en 3 minutes) et la distance de X à P à X en 6 minutes.
C'est-à-dire que l'autobus A arrive à X à 13 h 03 pour la première fois et puis continue d'y revenir toutes les 6 minutes.

On dresse une liste des heures d'arrivée de l'autobus A au point X dans le tableau suivant.

autobus A	13 h 03	13 h 09	13 h 15	13 h 21	13 h 27	13 h 33	13 h 39	13 h 45
13 h 51	13 h 57	14 h 03						

On remarque que l'autobus A arrive à X à 13 h 03 et qu'il y est aussi à 14 h 03, soit exactement une heure plus tard.
Ceci n'est en aucun cas inattendu car l'autobus A retourne à X toutes les 6 minutes, et 60 minutes (une heure) est divisible par 6.
Cela nous indique que l'autobus A continuera d'arriver au même nombre de minutes après chaque heure, soit à 14 h 03, à 14 h 09, à 14 h 15, ..., à 15 h 03, à 15 h 09, ..., à 17 h 03, à 17 h 09, ..., à 21 h 03, à 21 h 09, ..., à 21 h 51 et à 21 h 57.

Chaque 20 minutes, l'autobus B effectue un tour complet qui a Q comme point de départ et d'arrivée.
Puisque $QX = XT$, l'autobus B parcourt la distance de Q à X en $\frac{20}{4} = 5$ minutes. Il parcourt donc la distance de X à T à X en 10 minutes (de X à T en 5 minutes et de T à X en 5 minutes) et la distance de X à Q à X en 10 minutes.
C'est-à-dire que l'autobus B arrive à X à 13 h 05 pour la première fois et puis continue d'y revenir toutes les 10 minutes.
On dresse une liste des heures d'arrivée de l'autobus B au point X dans le tableau suivant.

autobus B	13 h 05	13 h 15	13 h 25	13 h 35	13 h 45	13 h 55	14 h 05

On remarque que l'autobus B arrive à X à 13 h 05 et qu'il y est aussi à 14 h 05, soit exactement une heure plus tard.
Ceci n'est en aucun cas inattendu car l'autobus B retourne à X toutes les 10 minutes, et 60 minutes (une heure) est divisible par 10.
Cela nous indique que l'autobus B continuera d'arriver au même nombre de minutes après chaque heure, soit à 14 h 05, à 14 h 15, à 14 h 25, ..., à 15 h 05, à 15 h 15, ..., à 17 h 05, à 17 h 15, ..., à 21 h 05, à 21 h 15, ..., à 21 h 45 et à 21 h 55.
D'après les deux tableaux ci-dessus, on voit que les autobus A et B arrivent chacun à X 15 minutes après l'heure et 45 minutes après l'heure.
Donc, entre 17 h et 22 h, ces deux autobus arrivent en même temps à X dix fois ($2 \times 5 = 10$).
Plus spécifiquement, ils y sont tous les deux à 17 h 15, à 17 h 45, à 18 h 15, à 18 h 45, à 19 h 15, à 19 h 45, à 20 h 15, à 20 h 45, à 21 h 15 et à 21 h 45.

Chaque 28 minutes, l'autobus C effectue un tour complet qui a R comme point de départ et d'arrivée.
Puisque $RX = XU$, l'autobus C parcourt la distance de R à X en $\frac{28}{4} = 7$ minutes. Il parcourt donc la distance de X à U à X en $2 \times 7 = 14$ minutes et la distance de X à R à X en 14 minutes.
C'est-à-dire que l'autobus C arrive à X à 13 h 07 pour la première fois et puis continue d'y revenir toutes les 14 minutes.
Contrairement aux autobus A et B, l'autobus C n'arrivera pas à X à des temps constants après chaque heure car 60 n'est pas divisible par 14.
Après 17 h, à quel temps précis l'autobus C arrivera-t-il à X pour la première fois ?
Puisque 238 est un multiple de 14 ($14 \times 17 = 238$), l'autobus C arrivera à X 238 minutes après qu'il ait quitté X à 13 h 07.
Puisque 238 minutes est 2 minutes de moins que 4 heures ($4 \times 60 = 240$), l'autobus C arrivera à X à 17 h 05. (Donc, après 17 h, l'autobus C arrivera à X à 17 h 05 pour la première fois.)
L'autobus B arrivera aussi à X à 17 h 05.
Entre 17 h 05 et 22 h, y a-t-il eu d'autres moments où les autobus B et C sont arrivés à X en

même temps ?
L'autobus B arrive à X toutes les 10 minutes tandis que l'autobus C arrive à X toutes les 14 minutes.
Puisque 70 est le plus petit multiple commun à 10 et 14, alors les autobus B et C arriveront chacun à X toutes les 70 minutes après 17 h 05, soit à 18 h 15, à 19 h 25, à 20 h 35 et à 21 h 45.
On détermine ensuite s'il y a des moments où les autobus A et C arrivent à X en même temps.
Après 17 h 05, l'autobus C retourne à X toutes les 14 minutes, soit à 17 h 19, à 17 h 33, à 17 h 47, ...
L'autobus A arrive aussi à X à 17 h 33.
Entre 17 h 33 et 22 h, y a-t-il eu d'autres moments où les autobus A et C sont arrivés à X en même temps ?
L'autobus A arrive à X toutes les 6 minutes tandis que l'autobus C arrive à X toutes les 14 minutes.
Puisque 42 est le plus petit multiple commun à 6 et 14, alors les autobus A et C arriveront chacun à X toutes les 42 minutes après 17 h 33, soit à 18 h 15, à 18 h 57, à 19 h 39, à 20 h 21, à 21 h 03 et à 21 h 45.
Deux autobus sont arrivés à X en même temps entre 17 h et 22 h dans les cas suivants :

- autobus A et autobus B : les autobus A et B arrivent chacun à X 15 minutes après l'heure et 45 minutes après l'heure.
- autobus B et autobus C : à 17 h 05, à 18 h 15, à 19 h 25, à 20 h 35 et à 21 h 45.
- autobus A et autobus C : à 17 h 33, à 18 h 15, à 18 h 57, à 19 h 39, à 20 h 21, à 21 h 03 et à 21 h 45.

Finalement, on détermine le nombre de moments différents où deux autobus ou plus sont arrivés à X en même temps.
Les autobus A et B arrivent à X à 10 moments différents.
Les autobus B et C arrivent à X à 5 moments différents. Or, parmi ces 5 moments, 2 ont déjà été pris en compte (18 h 15 et 21 h 45), donc seuls 3 sont nouveaux.
Les autobus A et C arrivent à X à 7 moments différents. Or, parmi ces 7 moments, 2 ont déjà été pris en compte (18 h 15 et 21 h 45), donc seuls 5 sont nouveaux.
Donc, entre 17 h et 22 h, deux autobus ou plus sont arrivés à X à $10 + 3 + 5 = 18$ reprises.

Réponse : (A)

8e année

1. Lorsqu'on inclut 1 dans la liste et qu'on dispose les termes de cette liste en ordre croissant, on obtient $-0{,}2$; $0{,}03$; $0{,}76$; 1 ; $1{,}5$.
Donc, il y a 3 nombres dans la liste qui sont inférieurs à 1, soit $-0{,}2$, $0{,}03$ et $0{,}76$.
Réponse : (D)

2. Si 4 cartons de lait de 1 litre chacun coûtent en tout 4,88 \$, alors un carton de lait de 1 litre coûte 4,88 \$ $\div\, 4 =$ 1,22 \$.
Réponse : (E)

3. Parmi les choix de réponse, $\frac{12}{2} = 6$ est la seule fraction égale à un nombre entier.
Réponse : (E)

4. Puisque $x + y = 0$, alors x et y ont des valeurs opposées.
Puisque $x = 4$, alors $y = -4$. (On peut vérifier que $4 + (-4) = 0$.)
Réponse : (E)

5. La longueur de la base est égale à la distance séparant le point $(4, 0)$ et l'origine, soit une distance de 4.
La hauteur est égale à la distance séparant le point $(0, 6)$ et l'origine, soit une distance de 6.
Donc, le triangle a une aire de $\frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12$.
(On remarque que la base et la hauteur sont perpendiculaires l'une à l'autre.)
Réponse : (A)

6. Les nombres entiers entre 2 et 20 dont la racine carrée est un nombre entier sont : 4, 9, 16 (puisque $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$).
On remarque que le carré d'un nombre entier est égal à un carré parfait.
C'est-à-dire que les cinq premiers carrés parfaits positifs sont : $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$ et $5^2 = 25$.
Parmi ces cinq, trois sont situés entre 2 et 20.
Réponse : (D)

7. *Solution 1*
Il y a 5 stylos différents qu'Yvon peut choisir pour chacun des 4 cahiers différents.
Donc, il y a $4 \times 5 = 20$ combinaisons différentes de cahiers et de stylos qu'il pourrait apporter à son cours.

Solution 2
Soient les 4 cahiers représentés par A, B, C et D et soient les 5 stylos représentés par 1, 2, 3, 4 et 5.
Par exemple, la combinaison $A1$ représente le choix du cahier A et du stylo 1.
Donc, si Yvon choisit le cahier A, il peut choisir l'un des stylos 1, 2, 3, 4 ou 5. Il y a donc 5 combinaisons possibles qui contiennent le cahier A comme choix : $A1, A2, A3, A4, A5$
De même, il y a 5 choix de stylos possibles pour chacun des choix de cahier.
Donc, les combinaisons possibles restantes sont : $B1, B2, B3, B4, B5, C1, C2, C3, C4, C5, D1, D2, D3, D4, D5$.
Donc, il y a 20 combinaisons différentes de cahiers et de stylos qu'il pourrait apporter à son cours.
Réponse : (C)

8. On remarque d'abord l'angle droit dans le diagramme circulaire.
Puisque 90° est $\frac{1}{4}$ d'un angle plein (360°), alors $\frac{1}{4}$ des élèves ont choisi les pommes comme fruit préféré.
Si $\frac{1}{4}$ des élèves ont choisi les pommes, alors le restant des élèves, soit $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, ont choisi les bananes.
Si 168 élèves représentent $\frac{3}{4}$ du nombre total d'élèves, donc $168 \div 3 = 56$ élèves représentent $\frac{1}{4}$ du nombre total d'élèves.
Donc, 56 élèves ont choisi les pommes comme fruit préféré.

Réponse : (B)

9. Il y a 8 lettres dans le sac dont 2 sont des B.
Si Elina choisit au hasard l'une des 8 lettres, la probabilité qu'elle choisisse un B est égale à $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

Réponse : (A)

10. Le résultat qu'obtient Balil, soit b, est 5 de plus que le nombre qu'a choisi Vita.
Le résultat qu'obtient Cali, soit c, est 5 de moins que le nombre qu'a choisi Vita.
Donc, la différence entre leurs résultats, $b - c$, est égale à 10.
Par exemple, si Vita choisit 8 comme nombre, alors $b = 8 + 5 = 13$, $c = 8 - 5 = 3$ et $b - c = 13 - 3 = 10$.

Réponse : (E)

11. L'autobus s'arrête à la bibliothèque à 13 h, à 13 h 20 et à 13 h 40.
De surcroît, l'autobus s'arrête à la bibliothèque à 14 h, à 14 h 20 et à 14 h 40.
De même, l'autobus s'arrête à la bibliothèque à x h, à x h 20 et à x h 40 pour $x = 15$, 16 et 17.
Finalement, l'autobus s'arrête pour la dernière fois à la bibliothèque à 18 h.
En tout, l'autobus s'est arrêté à la bibliothèque $3 \times 5 + 1 = 16$ fois.

Réponse : (A)

12. *Solution 1*
On considère d'abord la colonne des unités de l'addition. La somme $R + R$ a 2 comme chiffre des unités.
Donc, les seules possibilités sont $R = 1$ ou $R = 6$ ($1 + 1 = 2$ et $6 + 6 = 12$ ont chacun 2 comme chiffre des unités).
Si $R = 1$, on sait que la somme des chiffres de la colonne des unités ne donnera aucune retenue.
Dans ce cas, la somme $Q + Q$ aura 1 comme chiffre des unités. Or, cela est impossible car $Q + Q = 2Q$ est un nombre pair pour tous les chiffres possibles de Q.
Donc, $R = 6$, d'où $R + R = 12$. Donc la somme des chiffres de la colonne des unités a donné une retenu de 1.
On considère ensuite la colonne des dizaines de l'addition. La somme $Q + Q + 1$ a 1 comme chiffre des unités. Donc, la somme $Q + Q$ doit avoir 0 comme chiffre des unités.
Donc, les seules possibilités sont $Q = 0$ ou $Q = 5$ ($0 + 0 = 0$ et $5 + 5 = 10$ ont chacun 0 comme chiffre des unités).
Si $Q = 0$, on sait que la somme des chiffres de la colonne des dizaines ne donnera aucune retenue.
Or, cela est impossible car la colonne des centaines a une somme de 10 et P, n'ayant comme valeurs possibles que des chiffres, ne peut être égal à 10.
Donc, $Q = 5$, d'où $Q + Q + 1 = 11$. Donc la somme des chiffres de la colonne des dizaines a donné une retenu de 1.
La colonne des centaines a une somme de 10, donc $P + 1 = 10$ ou $P = 9$.
La valeur de $P + Q + R$ est égale à $9 + 5 + 6 = 20$.

Solution 2
QR est un nombre de deux chiffres et est donc inférieur à 100.
PQR et QR ont une somme supérieure à 1000. Donc, PQR doit être supérieur à 900 d'où P est donc égal à 9.
Puisque la colonne des centaines a une somme de 10, la somme des chiffres de la colonne des dizaines a dû donner une retenu de 1.
En considérant les colonnes des dizaines et des unités ensemble, on voit que la somme $QR+QR$ a 2 comme chiffre des unités, 1 comme chiffre des dizaines et 1 comme chiffre des centaines (soit la retenue de 1 de la colonne des dizaines). Donc, $QR+QR=112$, d'où $QR=56$.
La valeur de $P+Q+R$ est égale à $9+5+6=20$.

Réponse : (E)

13. *Solution 1*
Puisqu'il y a 60 minutes dans une heure, donc 1 heure et 52 minutes font $60+52=112$ minutes.
Si Émile termine la course en 54 minutes, soit 4 minutes de moins qu'Olivia, alors Olivia terminera la course en 58 minutes.
Leurs temps de course totaliseront donc $54+58=112$ minutes, ce qu'il fallait.
Donc, Olivia a complété la course en 58 minutes.

Solution 2
Comme dans la solution 1, leurs temps de course ont totalisé 112 minutes.
Si Émile avait pris 4 minutes de plus pour compléter la course, son temps de course aurait été égal à celui d'Olivia. Leurs temps de course auraient donc totalisé $112+4=116$ minutes.
Si leurs temps de course étaient égaux et totalisaient 116 minutes, on aurait pu dire qu'ils ont chacun terminé la course en $116 \div 2 = 58$ minutes.
Donc, Olivia a complété la course en 58 minutes.

Réponse : (C)

14. Dans le triangle ABC, $\angle ABC = 90^\circ$.
Donc, d'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = 34^2 - 16^2 = 1156 - 256$ ou $BC^2 = 900$, d'où $BC = \sqrt{900} = 30$ m. Le rectangle $ABCD$ a un périmètre de $16+30+16+30=92$ m.

Réponse : (D)

15. Si Francesca choisit d'abord -4 comme premier entier, il n y a aucun entier dans la liste qu'elle pourra choisir comme second afin d'obtenir une somme de 3 (6 est l'entier le plus grand de la liste et $-4+6=2$).
Si elle choisit d'abord -3 comme premier entier, elle peut choisir 6 comme second afin d'obtenir une somme de 3.
Si elle choisit d'abord -2 comme premier entier, elle peut choisir 5 comme second afin d'obtenir une somme de 3.
Si elle choisit d'abord -1 comme premier entier, elle peut choisir 4 comme second afin d'obtenir une somme de 3.
Si elle choisit d'abord 0 comme premier entier, elle peut choisir 3 comme second afin d'obtenir une somme de 3.
Si elle choisit d'abord 1 comme premier entier, elle peut choisir 2 comme second afin d'obtenir une somme de 3.
Si Francesca choisit d'abord 2 (ou n'importe quel entier supérieur à 2), il n y a aucun entier dans la liste qu'elle pourra choisir comme second afin d'obtenir une somme de 3 (selon l'énoncé, le second entier doit être supérieur au premier, donc, dans ce cas, la somme sera supérieure à 5).
Donc, 5 tels couples ont 3 comme somme de leurs entiers.

Réponse : (B)

16. Puisque le triangle QRS est un triangle rectangle isocèle avec $QR = SR$, alors $\angle RQS = \angle RSQ = 45°$.
Puisque deux angles opposés par le sommet ont la même mesure, $\angle SUV = \angle PUQ = y°$ et $\angle SVU = \angle RVT = y°$.
Dans le triangle SVU, $\angle VSU + \angle SUV + \angle SVU = 180°$ ou $45° + y° + y° = 180°$ ou $2y = 135$, d'où $y = 67.5$.

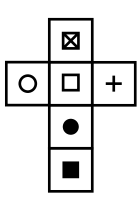
Réponse : (C)

17. Si l'on place les cinq nombres d'une liste en ordre croissant, la médiane est égale au troisième nombre (le nombre du milieu) de la liste.
Puisque x et y doivent être des entiers, les valeurs de x et y doivent appartenir à exactement l'une des trois possibilités suivantes :
- x et y sont chacun inférieur ou égal à 11, ou
- x et y sont chacun supérieur ou égal à 13, ou
- au moins l'un de x ou y est égal à 12.

Si x et y sont chacun inférieur ou égal à 11, alors 11 est la médiane de la liste.
(Dans ce cas, la liste peut avoir comme arrangement x, y, 11, 12, 13 ou y, x, 11, 12, 13.)
Si x et y sont chacun supérieur ou égal à 13, alors 13 est la médiane de la liste.
(Dans ce cas, la liste peut avoir comme arrangement 11, 12, 13, x, y ou 11, 12, 13, y, x.)
Si au moins l'un de x ou y est égal à 12, la liste contient les nombres 11, 12, 12, 13 ainsi qu'un cinquième nombre.
Lorsqu'on place les nombres de cette liste en ordre croissant, les deux 12 prendront soit les deuxième et troisième places de la liste, soit les troisième et quatrième places de la liste, dépendant de la valeur du nombre inconnu (ce dernier étant soit inférieur ou égal à 12 soit supérieur ou égal à 12).
Dans les deux cas, 12 est la médiane.
Donc, il y a 3 différentes médianes possibles pour les pointages des 5 matchs de Marc.

Réponse : (C)

18. On commence d'abord en constatant qu'il y a 6 symboles différents et que chacune des faces du cube doit contenir un symbole différent.
On numérote les trois vues du cube, de gauche à droite : soit 1 la première vue, 2 la deuxième vue et 3 la troisième vue.
On voit dans chacune des vues 1 et 2 une face contenant le symbole ⊠ .
Quel symbole se trouve sur la face opposée à celle contenant le ⊠ ?
Dans la vue 1, puisque □ et ○ paraissent sur des faces adjacentes à celle qui contient le ⊠, aucun des deux ne peut être le symbole contenu dans la face opposée à celle qui contient le ⊠ .
Dans la vue 2, puisque ■ et + paraissent sur des faces adjacentes à celle qui contient le ⊠ , aucun des deux ne peut être le symbole contenu dans la face opposée à celle qui contient le ⊠ .
À ce point-ci dans nos démarches, il ne reste plus qu'un seul symbole, ● est donc le symbole contenu dans la face opposée à celle qui contient le ⊠ et vice versa.
On voit le patron du cube dans la figure ci-dessous.



Réponse : (C)

19. Puisque X est égal à 20 % de 50, alors $X = 0{,}20 \times 50 = 10$.
Puisque 20 % de 100 est égal à 20, alors 20 % de 200 est égal à 40. Donc $Y = 200$.
Puisque 40 est égal à Z % de 50, alors $Z = \frac{40}{50} \times 100 = 80$.
(On peut vérifier que 80 % de 50 est effectivement égal à $0{,}80 \times 50 = 40$.)
Donc, $X + Y + Z = 10 + 200 + 80$ ou $X + Y + Z = 290$.

Réponse : (D)

20. On commence d'abord en exprimant $\frac{20}{19}$ d'une forme similaire à celle du membre de droite de l'équation.
On écrit $\frac{20}{19}$ sous la forme d'un nombre fractionnaire : $\frac{20}{19} = 1\frac{1}{19} = 1 + \frac{1}{19}$.
Puisque $\frac{20}{19} = 1 + \dfrac{1}{1+\frac{a}{b}}$ et $\frac{20}{19} = 1 + \frac{1}{19}$, alors $1 + \dfrac{1}{1+\frac{a}{b}} = 1 + \frac{1}{19}$, donc $\dfrac{1}{1+\frac{a}{b}} = \frac{1}{19}$.
Les numérateurs de $\dfrac{1}{1+\frac{a}{b}}$ et $\frac{1}{19}$ sont chacun égal à 1. Puisque ces fractions sont égales l'une à l'autre, alors leurs dénominateurs doivent aussi être égaux.
C'est-à-dire que $1 + \frac{a}{b} = 19$, d'où $\frac{a}{b} = 18$.
Puisque a et b sont des entiers strictement positifs, alors les fractions $\frac{a}{b}$ égales à 18 sont $\frac{18}{1}$, $\frac{36}{2}$, $\frac{54}{3}$ et ainsi de suite.
Donc, la plus petite valeur possible de $a + b$ est $18 + 1 = 19$.

Réponse : (B)

21. Le rapport des boules vertes aux boules jaunes était initialement de 3 : 7.
Autrement dit, il y avait 3 boules vertes dans le sac pour chaque 7 boules jaunes.
De manière équivalente, il y a $3n$ boules vertes pour chaque $7n$ boules jaunes, n étant un entier strictement positif.
Après que l'on ait retiré 9 boules de chaque couleur, le nombre de boules vertes dans le sac est égal à $3n - 9$ tandis que le nombre de boules jaunes est égal à $7n - 9$.
Le rapport de boules vertes aux boules jaunes est maintenant de 1 : 3, c'est-à-dire que le nombre de boules jaunes est égal à trois fois le nombre de boules vertes.
En multipliant le nombre de boules vertes par 3, on obtient $3 \times 3n - 3 \times 9$ ou $9n - 27$ boules vertes.
On isole n dans l'équation $9n - 27 = 7n - 9$ pour obtenir $9n - 7n = 27 - 9$ ou $2n = 18$, soit $n = 9$.
Au départ, on avait $3n$ boules vertes et $7n$ boules jaunes et donc un total de $3n + 7n = 10n$, soit $10 \times 9 = 90$ boules.
Remarque : S'il y avait 90 boules, 27 étaient vertes et 63 étaient jaunes (car $27 : 63 = 3 : 7$ et $27 + 63 = 90$). Après que l'on ait retiré 9 boules de chaque couleur, le rapport des boules vertes aux boules jaunes est alors de $18 : 54 = 1 : 3$, ce qu'il fallait.

Réponse : (B)

22. Un nombre est divisible par 6 s'il est à la fois divisible par 2 et par 3.
Un nombre de trois chiffres est divisible par 2 s'il est pair. Ce dernier doit donc avoir 0 ou 2 comme chiffre des unités.
Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
On considère les chiffres des dizaines et centaines possibles d'un nombre dont le chiffre des unités est 0.
Dans ce cas, le chiffre des dizaines et celui des centaines doivent avoir une somme divisible par 3 (car le chiffres des unités ne contribue aucunement à la somme des chiffres).
Dans le tableau suivant, on détermine les sommes possibles des chiffres des dizaines et des centaines.
Les sommes divisibles par 3 sont encerclées.

Le chiffre des dizaines

Le chiffre des centaines	5	6	7	8
1	6	7	8	9
2	7	8	9	10
3	8	9	10	11
4	9	10	11	12

Donc, les nombres de trois chiffres possibles ayant 0 comme chiffre des unités sont : $150, 180, 270, 360, 450$ et 480.

On considère les chiffres des dizaines et centaines possibles d'un nombre dont le chiffre des unités est 2.

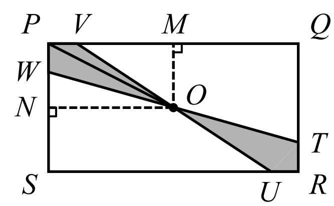
Dans ce cas, le chiffre des dizaines et celui des centaines doivent avoir une somme égale à 2 de moins qu'un multiple de 3 (car le chiffre des unités ajoute 2 à la somme des chiffres).

Donc, les nombres de trois chiffres possibles ayant 2 comme chiffre des unités sont : $162, 252, 282, 372$ et 462.

Donc, parmi les nombres de trois chiffres possibles que l'on peut former, 11 sont divisibles par 6.

Réponse : (A)

23. On commence d'abord en reliant le centre du rectangle, O, au sommet P.



Au centre du rectangle O, on élève une perpendiculaire OM au côté PQ et on trace une perpendiculaire ON au côté PS.

Puisque O est le centre du rectangle, alors M est le milieu du côté PQ, on a donc $PM = \frac{1}{2} \times 4 = 2$.

De même, puisque N est le milieu du côté PS, alors $PN = \frac{1}{2} \times 2 = 1$.

Le triangle PVO a pour base $PV = a$ et pour hauteur $OM = 1$ et a donc une aire égale à $\frac{1}{2} \times a \times 1 = \frac{1}{2}a$.

Le triangle PWO a pour base $PW = a$ et pour hauteur $ON = 2$ et a donc une aire égale à $\frac{1}{2} \times a \times 2 = a$.

Donc, les aires des deux triangles ont une somme égale à l'aire du quadrilatère $PWOV$, soit $\frac{1}{2}a + a = \frac{3}{2}a$.

De même, on peut montrer que le quadrilatère $RTOU$ a aussi une aire égale à $\frac{3}{2}a$. La région ombrée a donc une aire totale de $2 \times \frac{3}{2}a = 3a$.

Puisque le rectangle $PQRS$ a une aire égale à $4 \times 2 = 8$ et que l'aire de la région ombrée est égale à $\frac{1}{8}$ l'aire du rectangle $PQRS$, alors $3a = \frac{1}{8} \times 8$ ou $3a = 1$, d'où $a = \frac{1}{3}$.

Réponse : (D)

24. Chaque 12 minutes, l'autobus A effectue un tour complet qui a P comme point de départ et d'arrivée.

Puisque $PX = XS$, l'autobus A parcourt la distance de P à X en $12 \div 4 = 3$ minutes. Il parcourt donc la distance de X à S à X en 6 minutes (de X à S en 3 minutes et de S à X en 3 minutes) et la distance de X à P à X en 6 minutes.

C'est-à-dire que l'autobus A arrive à X à 13 h 03 pour la première fois et puis continue d'y revenir toutes les 6 minutes.

On dresse une liste des heures d'arrivée de l'autobus A au point X dans le tableau suivant.

autobus A	13 h 03	13 h 09	13 h 15	13 h 21	13 h 27	13 h 33	13 h 39	13 h 45

13 h 51	13 h 57	14 h 03

On remarque que l'autobus A arrive à X à 13 h 03 et qu'il y est aussi à 14 h 03, soit exactement une heure plus tard.
Ceci n'est en aucun cas inattendu car l'autobus A retourne à X toutes les 6 minutes, et 60 minutes (une heure) est divisible par 6.
Cela nous indique que l'autobus A continuera d'arriver au même nombre de minutes après chaque heure, soit à 14 h 03, à 14 h 09, à 14 h 15, ..., à 15 h 03, à 15 h 09, ..., à 17 h 03, à 17 h 09, ..., à 21 h 03, à 21 h 09, ..., à 21 h 51 et à 21 h 57.

Chaque 20 minutes, l'autobus B effectue un tour complet qui a Q comme point de départ et d'arrivée.
Puisque $QX = XT$, l'autobus B parcourt la distance de Q à X en $\frac{20}{4} = 5$ minutes. Il parcourt donc la distance de X à T à X en 10 minutes (de X à T en 5 minutes et de T à X en 5 minutes) et la distance de X à Q à X en 10 minutes.
C'est-à-dire que l'autobus B arrive à X à 13 h 05 pour la première fois et puis continue d'y revenir toutes les 10 minutes.
On dresse une liste des heures d'arrivée de l'autobus B au point X dans le tableau suivant.

autobus B	13 h 05	13 h 15	13 h 25	13 h 35	13 h 45	13 h 55	14 h 05

On remarque que l'autobus B arrive à X à 13 h 05 et qu'il y est aussi à 14 h 05, soit exactement une heure plus tard.
Ceci n'est en aucun cas inattendu car l'autobus B retourne à X toutes les 10 minutes, et 60 minutes (une heure) est divisible par 10.
Cela nous indique que l'autobus B continuera d'arriver au même nombre de minutes après chaque heure, soit à 14 h 05, à 14 h 15, à 14 h 25, ..., à 15 h 05, à 15 h 15, ..., à 17 h 05, à 17 h 15, ..., à 21 h 05, à 21 h 15, ..., à 21 h 45 et à 21 h 55.
D'après les deux tableaux ci-dessus, on voit que les autobus A et B arrivent chacun à X 15 minutes après l'heure et 45 minutes après l'heure.
Donc, entre 17 h et 22 h, ces deux autobus arrivent en même temps à X dix fois ($2 \times 5 = 10$).
Plus spécifiquement, ils y sont tous les deux à 17 h 15, à 17 h 45, à 18 h 15, à 18 h 45, à 19 h 15, à 19 h 45, à 20 h 15, à 20 h 45, à 21 h 15 et à 21 h 45.

Chaque 28 minutes, l'autobus C effectue un tour complet qui a R comme point de départ et d'arrivée.
Puisque $RX = XU$, l'autobus C parcourt la distance de R à X en $\frac{28}{4} = 7$ minutes. Il parcourt donc la distance de X à U à X en $2 \times 7 = 14$ minutes et la distance de X à R à X en 14 minutes.
C'est-à-dire que l'autobus C arrive à X à 13 h 07 pour la première fois et puis continue d'y revenir toutes les 14 minutes.
Contrairement aux autobus A et B, l'autobus C n'arrivera pas à X à des temps constants après chaque heure car 60 n'est pas divisible par 14.
Après 17 h, à quel temps précis l'autobus C arrivera-t-il à X pour la première fois ?
Puisque 238 est un multiple de 14 ($14 \times 17 = 238$), l'autobus C arrivera à X 238 minutes après qu'il ait quitté X à 13 h 07.
Puisque 238 minutes est 2 minutes de moins que 4 heures ($4 \times 60 = 240$), l'autobus C arrivera à X à 17 h 05. (Donc, après 17 h, l'autobus C arrivera à X à 17 h 05 pour la première fois.)
L'autobus B arrivera aussi à X à 17 h 05.
Entre 17 h 05 et 22 h, y a-t-il eu d'autres moments où les autobus B et C sont arrivés à X en

même temps ?
L'autobus B arrive à X toutes les 10 minutes tandis que l'autobus C arrive à X toutes les 14 minutes.
Puisque 70 est le plus petit multiple commun à 10 et 14, alors les autobus B et C arriveront chacun à X toutes les 70 minutes après 17 h 05, soit à 18 h 15, à 19 h 25, à 20 h 35 et à 21 h 45.
On détermine ensuite s'il y a des moments où les autobus A et C arrivent à X en même temps.
Après 17 h 05, l'autobus C retourne à X toutes les 14 minutes, soit à 17 h 19, à 17 h 33, à 17 h 47, ...
L'autobus A arrive aussi à X à 17 h 33.
Entre 17 h 33 et 22 h, y a-t-il eu d'autres moments où les autobus A et C sont arrivés à X en même temps ?
L'autobus A arrive à X toutes les 6 minutes tandis que l'autobus C arrive à X toutes les 14 minutes.
Puisque 42 est le plus petit multiple commun à 6 et 14, alors les autobus A et C arriveront chacun à X toutes les 42 minutes après 17 h 33, soit à 18 h 15, à 18 h 57, à 19 h 39, à 20 h 21, à 21 h 03 et à 21 h 45.
Deux autobus sont arrivés à X en même temps entre 17 h et 22 h dans les cas suivants :

- autobus A et autobus B : les autobus A et B arrivent chacun à X 15 minutes après l'heure et 45 minutes après l'heure.
- autobus B et autobus C : à 17 h 05, à 18 h 15, à 19 h 25, à 20 h 35 et à 21 h 45.
- autobus A et autobus C : à 17 h 33, à 18 h 15, à 18 h 57, à 19 h 39, à 20 h 21, à 21 h 03 et à 21 h 45.

Finalement, on détermine le nombre de moments différents où deux autobus ou plus sont arrivés à X en même temps.
Les autobus A et B arrivent à X à 10 moments différents.
Les autobus B et C arrivent à X à 5 moments différents. Or, parmi ces 5 moments, 2 ont déjà été pris en compte (18 h 15 et 21 h 45), donc seuls 3 sont nouveaux.
Les autobus A et C arrivent à X à 7 moments différents. Or, parmi ces 7 moments, 2 ont déjà été pris en compte (18 h 15 et 21 h 45), donc seuls 5 sont nouveaux.
Donc, entre 17 h et 22 h, deux autobus ou plus sont arrivés à X à $10 + 3 + 5 = 18$ reprises.

Réponse : (A)

25. L'étude de la *parité* d'un entier est de déterminer si cet entier est pair ou impair.
Quand deux entiers sont tous deux pairs ou tous deux impairs, ils sont dits de *même parité*.
Si un entier est pair tandis qu'un autre est impair, on dit que ces deux entiers sont de *parité différente*.
Lorsqu'on additionne deux entiers de même parité, on obtient un entier pair.
Lorsqu'on additionne deux entiers de parité différente, on obtient un entier impair.
On détermine la parité de chaque terme d'une suite FT (après le deuxième terme) à partir de la parité des deux premiers termes de la suite.
Par exemple, si chacun des deux premiers termes d'une suite FT est impair, alors le troisième terme sera pair (l'addition de deux entiers impairs donne une somme paire), le quatrième sera impair (l'addition d'un entier impair et d'un entier pair donne une somme impaire), le cinquième sera impair (l'addition d'un entier pair et d'un entier impair donne une somme impaire) et ainsi de suite.
Les deux premiers termes d'une suite FT ont 4 possibilités de parités ; soit impair et impair, soit pair et pair, soit impair et pair, soit pair et impair.
Dans le tableau suivant, on indique la parité des quelques premiers termes pour chacune des 4 possibilités de suites précédentes.

Nombre du terme	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Parité #1	impair	impair	pair	impair	impair	pair	impair	impair	pair	impair
Parité #2	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair
Parité #3	impair	pair	impair	impair	pair	impair	impair	pair	impair	impair
Parité #4	pair	impair	impair	pair	impair	impair	pair	impair	impair	pair

La suite FT dont les deux premiers termes sont impairs (Parité #1) présente la régularité impair, impair, pair, pour chaque groupe succéssif de trois termes consécutifs commençant au premier terme.
Puisque la parité de chaque terme dépend de la parité des deux termes précédents, cette régularité (impair, impair, pair) se perpétuera à travers toute la suite.
C'est-à-dire que dans chaque groupe succéssif de trois termes consécutifs commençant au premier terme, un terme sur trois sera pair et deux termes sur trois seront impairs.
La régularité impair, impair, pair se termine à des nombres de termes qui sont des multiples de 3 (les termes de valeur paire sont les termes 3, 6, 9, 12, etc.).
Puisque 2019 est un multiple de 3 ($2019 = 3 \times 673$), $\frac{1}{3}$ des 2019 premiers termes seront pairs et $\frac{2}{3}$ seront impairs. Donc, il y a deux fois de plus de termes impairs que de termes pairs dans les 2019 premiers termes.
Le 2020^e terme est impair (puisque la régularité a un terme impair comme premier terme). Donc, dans une suite FT dont les deux premiers termes sont impairs, le nombre de termes de valeurs impaires est supérieur à 2 fois le nombre de termes de valeurs paires.
C'est justement cette caractéristique dans les suites FT qui nous intéressent.
Combien y a-t-il de suites FT dont chacun des deux premiers termes est un entier strictement positif impair et inférieur à $2m$?
Il y a $2m - 1$ entiers strictement positifs inférieurs à $2m$ (soit $1, 2, 3, 4, \ldots, 2m - 1$).
Puisque m est un entier strictement positif, $2m$ sera toujours un entier pair, d'où $2m - 1$ sera toujours un entier impair.
Donc, la liste des entiers de 1 à $2m - 1$ a un entier impair comme premier et dernier termes. Donc, la liste contient m entiers impairs et $m - 1$ entiers pairs.
Le premier terme de la suite est impair, on a donc m choix possibles pour ce premier terme.
De même, le deuxième terme de la suite est aussi impair, donc on a aussi m choix possibles pour ce deuxième terme.
En tout, il y a $m \times m$ ou m^2 suites FT dont les deux premiers termes sont chacun impair.

Y a-t-il une autre suite parmi les 3 autres types de suites FT dont le nombre de termes de valeurs impaires est supérieur à 2 fois le nombre de termes de valeurs paires ?
Sans aucun doute, la suite FT dont les deux premiers termes sont pairs (Parité #2) ne remplit pas la condition requise car chaque terme de la suite a une valeur paire.
La suite FT dont les deux premiers termes sont, respectivement, impair et pair (Parité #3) présente la régularité impair, pair, impair, pour chaque groupe succéssif de trois termes consécutifs commençant au premier terme.
C'est-à-dire que dans chaque groupe succéssif de trois termes consécutifs commençant au premier terme, un terme sur trois sera pair et deux termes sur trois seront impairs.
Comme on l'a montré précédemment, 2019 est un multiple de 3, donc $\frac{1}{3}$ des 2019 premiers termes seront pairs et $\frac{2}{3}$ seront impairs.
Donc, il y a deux fois plus de termes impairs que de termes pairs dans les 2019 premiers termes.
Le 2020^e terme est impair (puisque la régularité a un terme impair comme premier terme). Donc, dans une suite FT dont les premier et deuxième termes sont, respectivement, impair et pair, le

nombre de termes de valeurs impaires est supérieur à 2 fois le nombre de termes de valeurs paires.
Combien y a-t-il de suites FT dont les premier et deuxième termes sont, respectivement, impair et pair, et dont chacun de ces deux premiers termes est un entier strictement positif inférieur à $2m$?
Comme on l'a montré précédemment, la liste des entiers de 1 à $2m-1$ a un entier impair comme premier et dernier termes. Donc, la liste contient m entiers impairs et $m-1$ entiers pairs.
Le premier terme de la suite est impair, on a donc m choix possibles pour ce premier terme.
Le deuxième terme de la suite est pair, on a donc $m-1$ choix possibles pour ce deuxième terme.
En tout, il y a $m \times (m-1)$ suites FT dont les premier et deuxième termes sont, respectivement, impair et pair.

Finalement, on considère la suite FT dont les premier et deuxième termes sont, respectivement, pair et impair (Parité #4).
Il y a exactement deux fois plus de termes impairs que de termes pairs dans les 2019 premiers termes de cette suite (car elle présente la régularité pair, impair, impair, pour chaque groupe succéssif de trois termes consécutifs commençant au premier terme).
Cependant, dans ce cas, le 2020^e terme est paire, le nombre de termes de valeurs impaires est donc inférieur à 2 fois le nombre de termes de valeurs paires.

Donc, il y a $m^2 + m \times (m-1)$ suites FT qui remplissent les conditions requises.
Puisqu'il y a 2415 telles suites FT, on peut résoudre $m^2 + m \times (m-1) = 2415$ en procédant par tâtonnements.
En posant $m = 30$ dans l'équation $m^2 + m \times (m-1)$, on obtient $30^2 + 30 \times 29 = 1770$. Donc m est supérieur à 30.
En posant $m = 33$ dans l'équation $m^2 + m \times (m-1)$, on obtient $33^2 + 33 \times 32 = 2145$.
En posant $m = 34$ dans l'équation $m^2 + m \times (m-1)$, on obtient $34^2 + 34 \times 33 = 2278$.
En posant $m = 35$ dans l'équation $m^2 + m \times (m-1)$, on obtient $35^2 + 35 \times 34 = 2415$, soit le nombre de suites qu'il fallait.

Réponse : (D)