Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Galois 2020

le mercredi 15 avril 2020
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 16 avril 2020
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Après la première rangée, le nombre de lettres dans chaque rangée est le double du nombre de lettres dans la rangée précédente.
Puisque la Rangée 4 contient 8 lettres, alors la Rangée 5 contient $2 \times 8 = 16$ lettres et la Rangée 6 contient $2 \times 16 = 32$ lettres.

Par ailleurs, on peut aussi prolonger la régularité en y ajoutant les deux prochaines rangées :

Rangée 1 A
Rangée 2 BB
Rangée 3 $AAAA$
Rangée 4 $BBBBBBBB$
Rangée 5 $AAAAAAAAAAAAAAAA$
Rangée 6 $BBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBB$

(b) Si la régularité est composée de 6 rangées, il y a $1+2+4+8+16+32 = 63$ lettres en tout.

(c) *Solution 1*
Comme on l'a indiqué dans la partie (b), si la régularité contient 63 lettres au total, la régularité sera donc composée de 6 rangées.
On compte donc le nombre de lettres A, soit $1+4+16 = 21$, et le nombre de lettres B, soit $2+8+32 = 42$.

Solution 2
On remarque que le nombre de lettres B dans la Rangée 2 est le double du nombre de lettres A dans la Rangée 1. De plus, le nombre de lettres B dans la Rangée 4 est le double du nombre de lettres A dans la Rangée 3.
De surcroît, de rangée en rangée, on alterne entre les lettres A et B et le nombre de lettres dans chaque rangée est le double du nombre de lettres dans la rangée précédente. Cette régularité se poursuit à travers la suite de rangées.
Donc, si la suite contient un nombre pair de rangées, le nombre total de lettres B sera le double du nombre total de lettres A. Dans ce cas, $\frac{1}{3}$ des lettres de la régularité seront des A et $\frac{2}{3}$ des lettres de la régularité seront des B.
Sachant qu'une régularité composée de 6 rangées contient 63 lettres en tout, la régularité contient donc $\frac{1}{3} \times 63 = 21$ lettres A et $\frac{2}{3} \times 63 = 2 \times 21 = 42$ lettres B.

(d) *Solution 1*
On détermine d'abord le nombre de rangées d'une régularité contenant 4095 lettres.
À cette fin, on peut compter le nombre de lettres A et B dans chaque rangée tout en calculant le total cumulé des lettres dans la régularité après chaque rangée.

Numéro de la rangée	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nombre de lettres A	1	0	4	0	16	0	64	0	256	0	1024	0
Nombre de lettres B	0	2	0	8	0	32	0	128	0	512	0	2048
Total cumulé	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047	4095

Si la régularité contient 12 rangées complètes, il y a 4095 lettres en tout dont $1+4+16+64+256+1024 = 1365$ sont des A et $2+8+32+128+512+2048 = 2730$ sont des B.
Donc, si la régularité contient 4095 lettres au total, il y a une différence de $2730 - 1365 = 1365$ entre le nombre de lettres A et le nombre de lettres B.

Solution 2
On détermine d'abord le nombre de rangées d'une régularité contenant 4095 lettres.
Puisque $4095 = 1+2+4+8+16+32+64+128+256+512+1024+2048$ et qu'on

additionne 12 termes dans le membre de droite de l'équation, alors une régularité contenant 4095 lettres contient exactement 12 rangées complètes.
Puisque 12 est un nombre pair de rangées, on peut utiliser le résultat dans la Solution 2 de la partie (c) afin de déterminer que la régularité contient $\frac{1}{3} \times 4095 = 1365$ lettres A et $\frac{2}{3} \times 4095 = 2 \times 1365 = 2730$ lettres B.
Donc, si la régularité contient 4095 lettres, il y a une différence de $2730 - 1365 = 1365$ entre le nombre de lettres A et le nombre de lettres B.
(Par ailleurs, sachant que $\frac{2}{3}$ des lettres sont des B et que $\frac{1}{3}$ des lettres sont des A, alors la différence entre le nombre de lettres A et le nombre de lettres B est égale à $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ du nombre total de lettres, soit $\frac{1}{3} \times 4095 = 1365$.)

2. (a) Étant donné que l'aire totale d'un prisme droit à base rectangulaire est obtenue par la formule $A = 2L\ell + 2Lh + 2\ell h$, alors un prisme droit à base rectangulaire dont la longueur, la largeur et la hauteur sont, respectivement, 2 cm, 5 cm et 9 cm a une aire totale de $2(2)(5) + 2(2)(9) + 2(5)(9) = 20 + 36 + 90 = 146 \text{ cm}^2$.

(b) Le volume d'un prisme droit à base rectangulaire est obtenu par la formule $V = L\ell h$.
Si le prisme droit a une base carrée, alors $L = \ell$, d'où $V = L^2 h$.
On pose $V = 160 \text{ cm}^3$ et $h = 10$ cm dans l'équation. On a donc $160 = L^2(10)$ ou $L^2 = 16$, d'où $L = 4$ cm (puisque $L > 0$).
Donc, un prisme droit à base carrée dont la hauteur et le volume sont, respectivement, 10 cm et 160 cm^3 a une base dont les côtés ont une longueur de 4 cm.

(c) Si le prisme droit a une base carrée, alors $L = \ell$.
Puisque la base a une aire de 36 cm^2, alors $36 = L \cdot \ell = L^2$, d'où $L = \ell = \sqrt{36} = 6$ cm (puisque $L > 0$).
Puisque le prisme a une aire totale de 240 cm^2, alors on a $240 = 2(6)(6) + 2(6)h + 2(6)h$ ou $240 = 72 + 24h$, d'où $h = \dfrac{240 - 72}{24} = 7$ cm.
Donc, le volume du prisme est égal à $L\ell h = (6)(6)(7) = 252 \text{ cm}^3$.

(d) Selon les dimensions du prisme représentées en fonction de k, on peut représenter le volume du prisme par la formule $x = k(2k)(3k)$ ou $x = 6k^3$. De même, on peut représenter l'aire totale du prisme par la formule $x = 2(k)(2k) + 2(k)(3k) + 2(2k)(3k)$ ou
$x = 4k^2 + 6k^2 + 12k^2 = 22k^2$.
On reporte $x = 6k^3$ dans $x = 22k^2$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} 6k^3 &= 22k^2 \\ 6k^3 - 22k^2 &= 0 \\ 2k^2(3k - 11) &= 0 \end{aligned}$$

Puisque $k > 0$, alors $3k - 11 = 0$, d'où $k = \dfrac{11}{3}$.

3. (a) Le produit original est $2 \times 8 = 16$.
Si on ajoute 1 à 2 et à 8, on obtient 3 et 9 et un nouveau produit de $3 \times 9 = 27$.
Le chiffre des unités du nouveau produit est 1 de plus que le chiffre des unités du produit original ($7 - 6 = 1$).
Le chiffre des dizaines du nouveau produit est 1 de plus que le chiffre des dizaines du produit original ($2 - 1 = 1$).
Puisque l'entier strictement positif $d = 1$ remplit les conditions nécessaires, $(2, 8)$ est un SuperCouple.

(b) Le produit original est $3 \times 6 = 18$.
Si on ajoute 1 à 3 et à 6, on obtient 4 et 7 et un nouveau produit de $4 \times 7 = 28$.

Le chiffre des unités du nouveau produit n'est pas égal à 1 de plus que le chiffre des unités du produit original ($8 - 8 \neq 1$), donc $d = 1$ ne remplit pas les conditions nécessaires pour que $(3, 6)$ soit un SuperCouple.
Si on ajoute 2 à 3 et à 6, on obtient 5 et 8 et un nouveau produit de $5 \times 8 = 40$.
Le chiffre des unités du nouveau produit n'est pas égal à 2 de plus que le chiffre des unités du produit original ($0 - 8 \neq 2$), donc $d = 2$ ne remplit pas les conditions nécessaires pour que $(3, 6)$ soit un SuperCouple.
Si on ajoute 3 à 3 et à 6, on obtient 6 et 9 et un nouveau produit de $6 \times 9 = 54$.
Le chiffre des unités du nouveau produit n'est pas égal à 3 de plus que le chiffre des unités du produit original ($4 - 8 \neq 3$), donc $d = 3$ ne remplit pas les conditions nécessaires pour que $(3, 6)$ soit un SuperCouple.
Si on ajoute 4 à 3 et à 6, on obtient 7 et 10 et un nouveau produit de $7 \times 10 = 70$.
Le chiffre des unités du nouveau produit n'est pas égal à 4 de plus que le chiffre des unités du produit original ($0 - 8 \neq 4$), donc $d = 4$ ne remplit pas les conditions nécessaires pour que $(3, 6)$ soit un SuperCouple.
Si on ajoute 5 à 3 et à 6, on obtient 8 et 11 et un nouveau produit de $8 \times 11 = 88$.
Le chiffre des unités du nouveau produit n'est pas égal à 5 de plus que le chiffre des unités du produit original ($8 - 8 \neq 5$), donc $d = 5$ ne remplit pas les conditions nécessaires pour que $(3, 6)$ soit un SuperCouple.
Si on ajoute 6 à 3 et à 6, on obtient 9 et 12 et un nouveau produit de $9 \times 12 = 108$.
Puisque ce nouveau produit n'est pas un entier de deux chiffres, alors $d = 6$ ne remplit pas les conditions nécessaires pour que $(3, 6)$ soit un SuperCouple.
Toutes les valeurs entières de $d > 6$ ont comme résultats des produits supérieurs à 108. Donc, $(3, 6)$ n'est pas un SuperCouple.

(c) *Solution 1*
On a démontré dans la partie (b) que $(3, 6)$ n'est pas un SuperCouple.
Si $x = 1$, alors le produit $1 \times 6 = 6$ n'est pas un entier de deux chiffres. Donc, $(1, 6)$ n'est pas un SuperCouple.
Pour chacune des valeurs restantes, $x = 2, 4, 5, 6$, on essaiera différentes valeurs de d (comme on l'a fait dans la partie (b)), afin de déterminer si $(x, 6)$ est un SuperCouple.
On résume ce travail dans le tableau suivant :

$(x, 6)$	Produit original $6x$	d	Nouveau Produit	SuperCouple ?
$(2, 6)$	12	3	$(2 + 3) \times (6 + 3) = 45$	Oui, puisque $4 - 1 = 5 - 2 = 3$
$(4, 6)$	24	1	$(4 + 1) \times (6 + 1) = 35$	Oui, puisque $3 - 2 = 5 - 4 = 1$
$(5, 6)$	30			Non, aucune valeur de d ne remplit les conditions nécessaires.
$(6, 6)$	36			Non, aucune valeur de d ne remplit les conditions nécessaires.

Donc, les entiers strictement positifs $x \leq 6$ pour lesquels $(x, 6)$ est un SuperCouple sont $x = 2$ et $x = 4$.

Solution 2
Si $(x, 6)$ est un SuperCouple, alors le produit original $6x$ est un entier de deux chiffres que l'on peut exprimer sous la forme $10m + n$, m et n étant des entiers qui vérifient respectivement $1 \leq m \leq 9$ et $0 \leq n \leq 9$.
C'est-à-dire que $6x = 10m + n$. Donc m est le chiffre des dizaines du produit original $6x$

et n est le chiffre des unités.
De plus, si $(x, 6)$ est un SuperCouple, alors il existe un entier strictement positif d tel que :

- le produit $(x + d)(6 + d)$ est un entier de deux chiffres,
- le chiffre des unités du produit $(x+d)(6+d)$ est égal à la somme de d et du chiffre des unités (n) du produit $6x$ et
- le chiffre des dizaines du produit $(x + d)(6 + d)$ est égal à la somme de d et du chiffre des dizaines (m) du produit $6x$.

D'après le deuxième tiret, le produit $(x + d)(6 + d)$ a $n + d$ comme chiffre des unités.
D'après le troisième tiret, le produit $(x + d)(6 + d)$ a $m + d$ comme chiffre des dizaines.
Puisque le produit $(x+d)(6+d)$ a $m+d$ comme chiffre des dizaines et $n+d$ comme chiffre des unités, on a $(x + d)(6 + d) = 10(m + d) + (n + d)$.
On développe les deux membres de l'équation et on reporte $6x = 10m+n$ dans le membre de droite de l'équation :

$$\begin{aligned}
(x + d)(6 + d) &= 10(m + d) + (n + d)\\
6x + xd + 6d + d^2 &= 10m + 10d + n + d\\
6x + xd + 6d + d^2 &= 10m + n + 11d\\
6x + xd + 6d + d^2 &= 6x + 11d \quad (\text{puisque } 6x = 10m + n)\\
xd + 6d + d^2 &= 11d\\
xd + d^2 &= 5d
\end{aligned}$$

Puisque $d > 0$, on peut diviser chacun des membres de l'équation par d pour obtenir $x + d = 5$.
Si $(x, 6)$ est un SuperCouple, alors $x + d = 5$.
Or, quoique la condition $x + d = 5$ est nécessaire pour que $(x, 6)$ soit un SuperCouple, cette condition ne garantit pas que $(x, 6)$ le sera.
On a vu un tel exemple dans la partie (b) lorsqu'on a démontré que $(3, 6)$ n'était pas un SuperCouple.
Si $x = 3$ et $x + d = 5$, alors $d = 2$.
Or, $3 \times 6 = 18$ et $(3 + 2) \times (6 + 2) = 40$ et puisque $4 - 1 \neq 2$, alors la condition $x + d = 5$ ($x = 3$ et $d = 2$) n'a pas produit un SuperCouple.
Comme on l'a vu dans la Solution 1, $(1, 6)$ n'est pas un SuperCouple puisque $1 \times 6 = 6$ n'est pas un entier de deux chiffres. Il nous reste donc à vérifier $x = 2$, 4, 5, 6.
Si $x = 2$, alors $d = 5 - 2 = 3$, d'où $(2, 6)$ peut être un SuperCouple avec $d = 3$.
Si $x = 4$, alors $d = 5 - 4 = 1$, d'où $(4, 6)$ peut être un SuperCouple avec $d = 1$.
Si $x = 5$, alors $d = 5 - 5 = 0$. Or, $d > 0$. Donc, $(5, 6)$ n'est pas un SuperCouple.
Si $x = 6$, alors $d = 5 - 6 = -1$. Or, $d > 0$. Donc $(6, 6)$ n'est pas un SuperCouple.
On peut vérifier que $(2, 6)$ et $(4, 6)$ sont des SuperCouples (voir la Solution 1).
Les entiers strictement positifs $x \leq 6$ pour lesquels $(x, 6)$ est un SuperCouple sont $x = 2$ et $x = 4$.

(d) Comme dans la Solution 2 de la partie (c), on procède de manière algébrique pour déterminer la condition nécessaire pour que (a, b) soit un SuperCouple mais qui ne garantit pas que (a, b) le sera.
Afin d'obtenir un décompte précis du nombre de SuperCouples, il faut démontrer qu'une valeur spécifique de d satisfait à chacun des critères donnés.

Si (a, b) est un SuperCouple, a et b étant des entiers qui vérifient $a \leq b$, alors le produit original ab est un entier de deux chiffres que l'on peut exprimer sous la forme $10h + k$, h

et k étant des entiers qui vérifient respectivement $1 \leq h \leq 9$ et $0 \leq k \leq 9$.
C'est-à-dire que $ab = 10h + k$. Donc h est le chiffre des dizaines du produit original ab et k est le chiffre des unités.
De plus, si (a, b) est un SuperCouple, alors il existe un entier strictement positif d tel que :

- le produit $(a + d)(b + d)$ est un entier de deux chiffres,
- le chiffre des unités du produit $(a + d)(b + d)$ est égal à la somme de d et du chiffre des unités (k) du produit ab et
- le chiffre des dizaines du produit $(a + d)(b + d)$ est égal à la somme de d et du chiffre des dizaines (h) du produit ab.

D'après le deuxième tiret, le produit $(a + d)(b + d)$ a $k + d$ comme chiffre des unités.
D'après le troisième tiret, le produit $(a + d)(b + d)$ a $h + d$ comme chiffre des dizaines.
Puisque le produit $(a + d)(b + d)$ a $h + d$ comme chiffre des dizaines et $k + d$ comme chiffre des unités, on a $(a + d)(b + d) = 10(h + d) + (k + d)$.
On développe les deux membres de l'équation et on reporte $ab = 10h + k$ dans le membre de droite de l'équation :

$$\begin{aligned}
(a + d)(b + d) &= 10(h + d) + (k + d) \\
ab + ad + bd + d^2 &= 10h + 10d + k + d \\
ab + ad + bd + d^2 &= 10h + k + 11d \\
ab + ad + bd + d^2 &= ab + 11d \\
ad + bd + d^2 &= 11d
\end{aligned}$$

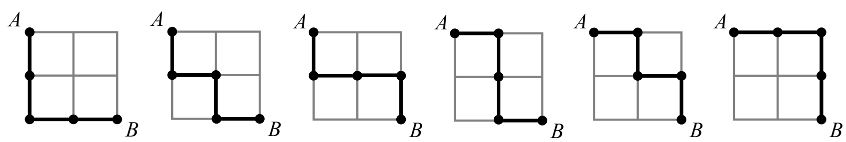
Puisque $d > 0$, on peut diviser chacun des membres de l'équation finale par d pour obtenir $a + b + d = 11$.
Si (a, b) est un SuperCouple, alors $a + b + d = 11$.
Comme avant, quoique la condition $a + b + d = 11$ est nécessaire pour que (a, b) soit un SuperCouple, cette condition ne garantit pas que (a, b) le sera.
Lorsque $a = 1$, il n'y a aucune valeur b telle que ab soit un entier de deux chiffres.
Donc, il n'y a pas de SuperCouples (a, b) avec $a = 1$.
Lorsque $a \geq 6$, alors $a + b > 11$ (puisque $a \leq b$).
Si $a + b > 11$ et $a + b + d = 11$, alors $d < 0$, ce qui n'est pas possible.
Donc, il n'y a pas de SuperCouples (a, b) avec $a \geq 6$.
Dans le tableau ci-dessous, on détermine tous les SuperCouples (a, b) avec $a \leq b$ en utilisant la définition d'un SuperCouple et la condition $a + b + d = 11$.
On peut exclure la vérification de certains couples en se souvenant que :
— $ab \geq 10$, d'où on peut donc exclure des couples tels que $(1, 8)$ et $(2, 4)$
— $a + b < 11$, d'où on peut donc exclure des couples tels que $(2, 9)$ et $(3, 9)$
— $(3, 6)$ n'est pas un SuperCouple, ce qu'on a démontré précédemment

(a,b)	d	ab	$(a+d)(b+d)$	Vérification
$(2,5)$	4	10	$(2+4)\times(5+4)=54$	$5-1=4-0=4$
$(2,6)$	3	12	$(2+3)\times(6+3)=45$	$4-1=5-2=3$
$(2,7)$	2	14	$(2+2)\times(7+2)=36$	$3-1=6-4=2$
$(2,8)$	1	16	$(2+1)\times(8+1)=27$	$2-1=7-6=1$
$(3,4)$	4	12	$(3+4)\times(4+4)=56$	$5-1=6-2=4$
$(3,5)$	3	15	$(3+3)\times(5+3)=48$	$4-1=8-5=3$
$(3,7)$	1	21	$(3+1)\times(7+1)=32$	$3-2=2-1=1$
$(4,4)$	3	16	$(4+3)\times(4+3)=49$	$4-1=9-6=3$
$(4,5)$	2	20	$(4+2)\times(5+2)=42$	$4-2=2-0=2$
$(4,6)$	1	24	$(4+1)\times(6+1)=35$	$3-2=5-4=1$
$(5,5)$	1	25	$(5+1)\times(5+1)=36$	$3-2=6-5=1$

Voici donc les seules possibilités qui satisfont aux critères donnés. Il existe donc 11 SuperCouples (a,b) pour lesquels $a \leq b$.

4. Dans la solution qui suit, un chemin de A à B sera représenté comme une suite de déplacements (soit vers le bas (D), vers le haut (U), vers la droite (R) et vers la gauche (L)) d'un coupement à un autre, commençant à A et se terminant à B.

   (a) Chaque chemin dans une grille 2×2 contient un minimum de 2 déplacements vers le bas et 2 déplacements vers la droite (puisque B est situé à 2 arêtes vers le bas et 2 arêtes vers la droite par rapport à A).
   Donc, on peut représenter chaque chemin par une suite d'au moins 4 déplacements contenant au moins deux D et deux R.
   On détermine d'abord le nombre de chemins de longueur 4 dans une grille 2×2.



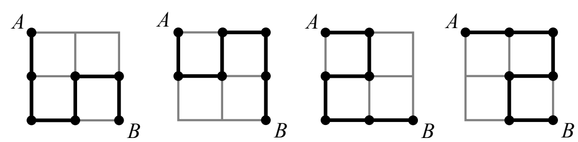
   Dans la figure ci-dessus, on voit qu'il y a 6 tels chemins. Ces 6 chemins sont représentés, respectivement, par les suites de déplacements suivantes : $DDRR$, $DRDR$, $DRRD$, $RDDR$, $RDRD$, $RRDD$.
   On remarque que ces chemins sont les seules permutations possibles d'exactement deux D et deux R.

   Un chemin dans une grille 2×2 peut-il avoir une longueur de 5 ?
   Si un chemin contenait un déplacement vers le haut en plus des 2 déplacements vers le bas et 2 déplacements vers la droite requis, alors ce déplacement devrait être « défait » par un déplacement dans la direction opposée, soit un déplacement vers le bas.
   C'est-à-dire que le résultat net de chaque chemin devra être de deux D et deux R car chaque U devra être jumelé à un D. De même, chaque L devra être jumelé à un R.
   Pour résumer, chaque chemin dans une grille 2×2 doit contenir deux D, deux R, et tout déplacement supplémentaire doit se produire par couples de déplacements opposés, soit U/D ou L/R.
   Donc, puisque chaque chemin dans une grille 2×2 contient 4 déplacements (deux D et deux R) et une possibilité de déplacements supplémentaires qui ne se produisent qu'en couples, alors chaque chemin doit être d'une longueur paire.
   Donc, un chemin ne peut pas avoir une longueur de 5.

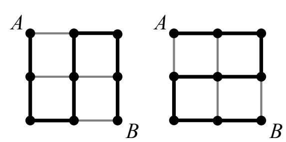
   On détermine ensuite le nombre de chemins de longueur 6.
   Chacun de ces chemins contient deux D, deux R, et soit un couple U/D soit un couple

L/R.
Combien y a-t-il de permutations de trois R, un L et deux D telles qu'on obtient un chemin de A à B ?
Considérons d'abord le nombre de permutations de trois R et un L (les déplacements horizontaux).
Le L ne peut paraitre devant le premier R ni après le dernier R puisque chacune de ces suites ($LRRR$ et $RRRL$) sortirait de la grille 2×2.
Donc, il y a 2 permutations possibles de ces 4 lettres, soit $RLRR$ et $RRLR$.
On compte ensuite le nombre de positions possibles des deux D dans chacune des suites ci-dessus.
Puisqu'un chemin ne passe pas par un coupement plus d'une seule fois, alors le L ne peut être suivi d'un R et vice-versa (RL ou LR signifient qu'un chemin parcourrait une même arête deux fois dans les deux sens).
Pour cette raison, un D doit être placé de chaque côté du L.
Donc, il y a 2 permutations possibles de trois R, un L et deux D telles qu'on obtient un chemin de A to B, soit $RDLDRR$ et $RRDLDR$.
Un argument semblable peut être avancé pour les permutations de trois D, un U et deux R. Il y a donc 4 chemins de longueur 6 reliant A et B.

Ces 4 chemins, soit $DDRURD$, $DRURDD$, $RDLDRR$ et $RRDLDR$ sont représentés respectivement dans la figure ci-dessous.



Enfin, on détermine le nombre de chemins de longueur 8.



Dans la figure ci-dessus, on voit ces deux tels chemins que l'on représente, respectivement, par les suites de déplacements suivantes : $DDRUURDD$ et $RRDLLDRR$.
Pouvez-vous justifier pourquoi ces chemins sont les seuls chemins de longueur 8 ?

Est-il possible d'avoir un chemin de longueur 10 ou plus ?
La première arête d'un chemin est en contact avec deux coupements et chaque arête supplémentaire du chemin entre en contact avec un nouveau coupement.
Donc, un chemin de longueur 8 passe par $2 + 7 = 9$ coupements (comme on le voit dans les deux grilles ci-dessus) et un chemin de longueur 10 (ou plus) passerait par au moins $2 + 9 = 11$ coupements.
Or, un chemin ne peut passer par un coupement plus d'une seule fois et puisqu'une grille 2×2 ne contient que $3 \times 3 = 9$ coupements, il n'est pas possible d'avoir un chemin de longueur 10 ou plus.

Dans une grille 2×2, il y a $6 + 4 + 2 = 12$ chemins de longueurs quelconques qui relient A et B.

(b) En suivant le raisonnement de la partie (a), un chemin reliant A et B dans une grille 10×10 contient un minimum de 10 déplacements vers le bas et 10 déplacements vers la droite (puisque B est situé à 10 arêtes vers le bas et 10 arêtes vers la droite par rapport à

A).

De plus, tout déplacement supplémentaire doit se produire par couples de déplacements opposés (soit U et D ou L et R), d'où chaque chemin dans une grille 10×10 contient donc 20 déplacements (dix D et dix R) et une possibilité de déplacements supplémentaires qui ne se produisent qu'en couples. Donc, chaque chemin doit être d'une longueur paire.

(c) *Solution 1*

Un chemin reliant A et B dans une grille 4×4 contient un minimum de 4 déplacements vers le bas (quatre D) et 4 déplacements vers la droite (quatre R).

Donc, chaque chemin de longueur 10 contient ces 8 déplacements et exactement un seul couple supplémentaire de déplacements opposés, soit un déplacement vers la gauche jumelé à un déplacement vers la droite, soit un déplacement vers le haut jumelé à un déplacement vers le bas.

C'est-à-dire que chaque chemin contient soit 4 déplacements verticaux (U/D) et 6 déplacements horizontaux (L/R), soit 4 déplacements horizontaux et 6 déplacements verticaux.

Par symétrie, on obtient de chacun de ces deux cas un nombre égal de chemins reliant A et B. On comptera donc le nombre de chemins pour l'un des cas que l'on doublera par la suite afin de déterminer le nombre total de chemins.

Supposons qu'un chemin reliant A et B contient 4 déplacements verticaux et 6 déplacements horizontaux.

Chacun des 4 déplacements verticaux doit être vers le bas.

Cinq des six déplacements horizontaux doivent être vers la droite tandis qu'un seul doit être vers la gauche (quatre déplacements vers la droite et un couple de déplacements opposés gauche/droite).

Donc, chaque chemin contient une suite de 10 lettres (quatre D, cinq R et un L). On peut donc déterminer le nombre de chemins en comptant le nombre de permutations de ces 10 lettres qui correspondent à un chemin qui relie A et B.

Considérons d'abord le nombre de permutations de cinq 5 R et un 1 L (les déplacements horizontaux).

Puisque L ne peut paraitre devant le premier R ni après le dernier R, il y a donc 4 permutations possibles de ces 6 lettres, soit $RLRRRR$, $RRLRRR$, $RRRLRR$ et $RRRRLR$.

On compte ensuite le nombre de positions possibles des quatre D dans chacune des suites ci-dessus.

Puisqu'un chemin ne passe pas par un coupement plus d'une seule fois, alors le L ne peut être suivi d'un R et vice-versa (RL ou LR signifient qu'un chemin parcourrait une même arête deux fois dans les deux sens).

Pour cette raison, un D doit être placé de chaque côté du L, d'où on obtient donc les quatre suites $RDLDRRRR$, $RRDLDRRR$, $RRRDLDRR$ et $RRRRDLDR$.

Dans chacune de ces suites, il nous reste encore deux D à placer.

On peut placer les deux D dans chacune des 4 suites ci-dessus de deux manières : soit les deux D sont placés adjacents l'un à l'autre, soit ils sont placés de manière à ne pas être adjacents.

De combien de manières peut-on placer les deux D s'ils sont adjacents ?

On peut placer les deux D soit devant le premier R ou après le dernier R (donc à 2 endroits), soit entre n'importe quel couple de R adjacents (il y a trois tels couples dans chaque suite), soit entre le R et le D (donc à 1 endroit), soit entre le D et le R (donc à 1 endroit).

Remarquez qu'en plaçant les deux D entre le D et le L (ou entre le L et le D), on obtient la même suite que si l'on plaçait les deux D entre le R et le D (ou entre le D et le R).

Donc, on peut placer deux D adjacents de $2 + 3 + 1 + 1 = 7$ manières dans chacune des 4

suites $RDLDRRRR$, $RRDLDRRR$, $RRRDLDRR$ et $RRRRDLDR$.
De combien de manières peut-on placer les deux D s'ils ne sont pas adjacents ?
Un des D doit être placé dans l'un des 7 emplacements indiqués précédemment (pour la même raison) tandis que le second D peut être placé dans l'un des 6 emplacements restants (de manière qu'il ne soit pas adjacent au premier D).
Puisque ces deux D sont identiques, on n'obtient pas une différente suite si on échange leurs positions dans la suite, il faut donc diviser par 2.

Donc, on peut placer deux D non adjacents de $\dfrac{7 \times 6}{2} = 21$ manières dans chacune des 4 suites.
En tout, on peut placer deux D de $7 + 21 = 28$ manières dans chacune des 4 suites. Il y a donc $28 \times 4 = 112$ permutations de quatre D, cinq R et un L.
Dans une grille 4×4, il y a donc 112 chemins composés de 4 déplacements verticaux et 6 déplacements horizontaux qui relient A et B.
Un argument semblable peut être avancé pour les permutations de quatre R, cinq D et un U. Il y a donc 112 chemins additionnels composés de 4 déplacements horizontaux et 6 déplacements verticaux.
En tout, il y a $112 \times 2 = 224$ chemins de longueur 10 qui relient A et B dans une grille 4×4.

Solution 2
Un chemin reliant A et B dans une grille 4×4 contient un minimum de 4 déplacements vers le bas (quatre D) et 4 déplacements vers la droite (quatre R).
Donc, chaque chemin de longueur 10 contient ces 8 déplacements et exactement un seul couple supplémentaire de déplacements opposés, soit un déplacement vers la gauche jumelé à un déplacement vers la droite, soit un déplacement vers le haut jumelé à un déplacement vers le bas.
C'est-à-dire que chaque chemin contient soit 4 déplacements verticaux (U/D) et 6 déplacements horizontaux (L/R), soit 4 déplacements horizontaux et 6 déplacements verticaux.
Par symétrie, on obtient de chacun de ces deux cas un nombre égal de chemins reliant A et B. On comptera donc le nombre de chemins pour l'un des cas que l'on doublera par la suite afin de déterminer le nombre total de chemins.

Supposons qu'un chemin reliant A et B contient 4 déplacements verticaux et 6 déplacements horizontaux.
Chacun des 4 déplacements verticaux doit être vers le bas.
Cinq des six déplacements horizontaux doivent être vers la droite tandis qu'un seul doit être vers la gauche (quatre déplacements vers la droite et un couple de déplacements opposés gauche/droite).
Donc, chaque chemin contient une suite de 10 lettres (quatre D, cinq R et un L). On peut donc déterminer le nombre de chemins en comptant le nombre de permutations de ces 10 lettres qui correspondent à un chemin qui relie A et B.
Puisqu'un chemin ne passe pas par un coupement plus d'une seule fois, alors le L ne peut être suivi d'un R et vice-versa (RL ou LR signifient qu'un chemin parcourrait une même arête deux fois dans les deux sens).
De plus, L ne peut être ni le premier ni le dernier déplacement.
Ainsi, L ne peut avoir un R de chaque côté et ne peut être la première ou la dernière lettre.
Donc, l'arrangement DLD doit paraitre dans chaque suite.
Combien y a-t-il de permutations de cinq R, deux D et un DLD ?
Puisqu'on considère que DLD est une seule lettre, alors on a 8 lettres d'où on aurait donc

8! permutations possibles si les 8 lettres étaient distinctes les unes des autres.
Or, puisqu'on a cinq R identiques, chacune des 5! permutations des cinq R parmi les 8 lettres a comme résultat la même suite de déplacements. Il faut donc diviser 8! par 5!.
De même, puisque les deux D sont identiques et qu'on n'obtient pas une différente suite si on échange leurs positions dans la suite, alors il faudra également diviser par 2.
On a donc $\dfrac{8!}{(5!)(2)} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{2} = 168$ permutations de cinq R, deux D et un DLD.
Est-ce que chacun de ces 168 chemins est possible ?
Puisqu'un chemin ne peut passer par un coupement plus d'une seule fois, une suite contenant l'arrangement DLD répond bel et bien à ce critère.
De plus, on ne peut avoir une suite qui nous mène à l'extérieur de la grille.
Puisque chaque suite contient exactement quatre D et aucun U, il n'est pas possible que le chemin quitte la grille par le haut ou par le bas.
Cependant, puisque chaque suite de déplacements contient cinq R, le chemin quitterait la grille 4×4 par le côté droit si les cinq R paraissaient tous avant le DLD (c'est-à-dire avant un déplacement vers la gauche).
De même, le chemin quitterait la grille 4×4 par le côté gauche si le DLD paraissait avant qu'un R ne paraisse dans la suite.
Puisque les 168 permutations contiennent les cas que l'on vient d'énoncer, certaines de ces permutations ne sont donc pas possibles.
Il faut donc soustraire de 168 le nombre de telles permutations qui résultent en des chemins qui quittent la grille.
Un chemin peut quitter la grille de deux manières : soit les cinq R paraissent tous avant le DLD dans la suite, soit les cinq R paraissent tous après le DLD (le L parait donc avant le premier R).
Par symétrie, on obtient de chacun de ces deux cas un nombre égal de chemins reliant A et B. On comptera donc le nombre de chemins pour l'un des cas que l'on doublera par la suite afin de déterminer le nombre total de chemins.
Dans combien des 168 suites les cinq R paraissent-ils avant DLD ?
On peut compter ces chemins en considérant les trois cas suivants.

<u>1er cas : les cinq R et les deux D paraissent tous avant DLD</u>

Le nombre de tels chemins est égal au nombre de permutations de cinq R et deux D, soit $\dfrac{7!}{(5!)(2)} = \dfrac{7 \cdot 6}{2} = 21$.

<u>2e cas : les cinq R et l'un des D paraissent avant DLD (l'autre D parait après DLD)</u>

Le nombre de tels chemins est égal au nombre de permutations de cinq R et un D (puisque l'autre D doit paraitre après DLD et a donc une position spécifiée), soit $\dfrac{6!}{5!} = 6$.

<u>3e cas : les cinq R paraissent avant DLD tandis que les deux D paraissent après DLD</u>

Il n'y a qu'un tel chemin dans ce cas.

En tout, on a donc $21 + 6 + 1 = 28$ suites dans lesquelles les cinq R paraissent avant DLD et 28 suites dans lesquelles les cinq R paraissent après DLD, soit un total de 56 chemins qui quittent la grille.
Dans une grille 4×4, il y a donc $168 - 56 = 112$ chemins composés de 4 déplacements verticaux et 6 déplacements horizontaux qui relient A et B.
Puisqu'il y a également 112 chemins composés de 4 déplacements horizontaux et 6 déplacements verticaux, alors il y a $112 \times 2 = 224$ chemins en tout de longueur 10 qui relient A et B

dans une grille 4×4.