Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fryer 2020

le mercredi 15 avril 2020
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 16 avril 2020
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) D'après le point C du diagramme, on voit que Cao paie 7,00 \$ pour 14 affiches, soit un prix unitaire de 7 \$ $\div$ 14 = 0,50 \$.

   (b) Selon la partie (a), Daniel paie 1,60 \$ par affiche et Cao paie 0,50 \$ par affiche.
   On calcule les prix unitaires des autres candidats : Annie paie 10,00 \$ pour 5 affiches, soit un prix unitaire de 10 \$ $\div$ 5 = 2,00 \$, Bogdan paie 8,00 \$ $\div$ 8 = 1,00 \$ par affiche et Émilie paie 15,00 \$ $\div$ 15 = 1,00 \$ par affiche.
   Donc, Bogdan et Émilie paient le même prix par affiche.
   (Par ailleurs, on aurait pu remarquer que la droite qui passe par l'origine (0,0) et par E passe également par B.
   La pente de cette droite représente le prix unitaire en dollars des affiches de Bogdan et d'Émilie.)

   (c) Selon la partie (a), Daniel s'est fait imprimer son premier lot d'affiches à un prix unitaire de 1,60 \$.
   Si Daniel décide d'imprimer son deuxième lot d'affiches à la bibliothèque du quartier, il paiera 60,00 \$ $\div$ 40 = 1,50 \$ par affiche.
   Afin de dépenser le moins d'argent possible, Daniel devrait imprimer ses 40 affiches à la bibliothèque.

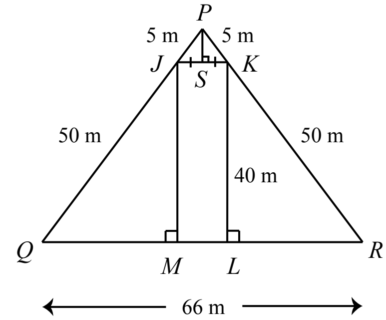
   Par ailleurs, puisque Daniel a payé 16,00 \$ pour son premier lot de 10 affiches, il paierait $4 \times 16{,}00$ \$ = 64,00 \$ pour son deuxième lot d'affiches s'il décidait de les faire imprimer à la même imprimerie que son premier lot.
   Puisque la bibliothèque du quartier peut lui imprimer ses 40 affiches pour un coût total de 60,00 \$, il devrait imprimer ses affiches à la bibliothèque afin de dépenser le moins d'argent possible.

   (d) Dans la partie (b), on a calculé qu'Émilie a payé 1,00 \$ par affiche.
   Puisque ce prix unitaire est un prix fixe, Émilie a dû payer 1,00 \$ l'affiche pour chacune des 25 affiches. Elle a donc dépensé 25,00 \$.
   Émilie et Annie ont chacune dépensé la même somme d'argent, soit 25,00 \$, afin d'imprimer chacune 25 affiches.
   Puisque l'imprimerie qu'Annie a choisie lui a offert les 5 premières affiches à un prix de 10,00 \$, elle a donc dépensé 25,00 \$ $-$ 10,00 \$ = 15,00\$ pour faire imprimer les $25 - 5 = 20$ affiches restantes.
   Donc, l'imprimerie d'Annie lui a offert un prix unitaire réduit de 15,00 \$ $\div$ 20 = 0,75 \$ pour chaque affiche supplémentaire.

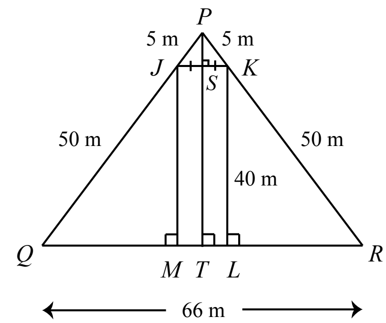
2. (a) Dans le triangle KLR, on a $\angle KLR = 90^\circ$. D'après le théorème de Pythagore, $LR^2 = 50^2 - 40^2 = 900$, d'où $LR = \sqrt{900} = 30$ m (puisque $LR > 0$).

   (b) On démontre d'abord que les triangles JMQ et KLR sont isométriques.
   Puisque $JKLM$ est un rectangle, alors $JM = KL = 40$ m.
   De plus, les hypoténuses JQ et KR sont de même longueur. Donc, les triangles JMQ et KLR sont isométriques puisque leurs côtés sont isométriques deux à deux.
   Donc, $MQ = LR = 30$ m, d'où $ML = 66 - 30 - 30 = 6$ m.

(c) Puisque $PJ = PK = 5$ m, alors le triangle PJK est isocèle et sa hauteur, PS, est la droite menée du milieu de sa base JK jusqu'à P.
Puisque $JKLM$ est un rectangle, alors $JK = ML = 6$ m, d'où $SK = \frac{JK}{2} = 3$ m.
Dans le triangle PSK, on a $PS^2 = 5^2 - 3^2 = 16$ d'après le théorème de Pythagore, d'où $PS = 4$ m (puisque $PS > 0$).
Donc, la hauteur du triangle PJK, soit la droite menée du milieu de sa base JK jusqu'à P, est de 4 m.



(d) On détermine d'abord l'aire du triangle PQR.
Dans la figure ci-contre, soit la hauteur du triangle PQR la droite menée de T (le milieu de sa base QR) jusqu'à P.
Puisque PT et QR sont perpendiculaires, alors PT et KL sont parallèles (puisque KL est également perpendiculaire à QR).
Par symétrie, PT passe par le point S. La hauteur PT est donc égale à $PS + ST = PS + KL$ ou $4 + 40 = 44$ m.
L'aire du triangle PQR est égale à
$\frac{1}{2} \times QR \times PT = \frac{1}{2} \times 66 \times 44 = 1452$ m^2.
L'aire du rectangle $JKLM$ est égale à
$ML \times KL = 6 \times 40 = 240$ m^2.
La fraction de l'aire du triangle PQR qui est recouverte par le rectangle $JKLM$ est donc égale à $\frac{240}{1452} = \frac{20}{121}$.



3. (a) Si le 5^e terme d'une suite Dlin est 142, alors le 6^e terme est $(142 + 1) \times 2 = 143 \times 2 = 286$.
Puisqu'on obtient chaque terme après le premier en ajoutant 1 au terme précédent et en doublant ce résultat alors, ayant le 5^e terme de la suite, on peut faire « marche arrière » en divisant d'abord le 5^e terme par 2 puis en soustrayant 1 de ce résultat afin d'obtenir le 4^e terme de la suite.
Pour le voir, considérons deux termes consécutifs dans une suite Dlin, soit a suivi de b, qui vérifient donc $b = (a + 1) \times 2$.
Pour déterminer les opérations nécessaires pour obtenir a étant donné b (c'est-à-dire pour reculer dans la suite), on isole a dans l'équation afin d'exprimer ce dernier en fonction de b :

$$\begin{aligned} b &= (a+1) \times 2 \\ \frac{b}{2} &= a + 1 \\ \frac{b}{2} - 1 &= a \end{aligned}$$

Donc, si le 5^e terme de la suite Dlin est 142, alors le 4^e terme est $\frac{142}{2} - 1 = 71 - 1 = 70$.
(On peut vérifier que 142 est bien le terme après 70 : $(70 + 1) \times 2 = 142$.)

(b) Si le 1er terme de la suite est 1406, alors on a clairement une suite Dlin dans laquelle 1406 parait comme terme.
Si le 2^e terme d'une suite Dlin est 1406, alors le 1er terme de la suite est $\frac{1406}{2} - 1 = 703 - 1 = 702$.
Si le 3^e terme d'une suite Dlin est 1406, alors le 2^e terme est 702 (ce qu'on a calculé dans la ligne précédente) et le 1er terme de la suite est $\frac{702}{2} - 1 = 351 - 1 = 350$.
Si le 4^e terme d'une suite Dlin est 1406, alors le 3^e terme est 702, le 2^e terme est 350 et le 1er terme de la suite est $\frac{350}{2} - 1 = 175 - 1 = 174$.

À ce point, on voit que 174, 350, 702 et 1406 sont des 1^er^ termes possibles de suites Dlin dans lesquelles 1406 parait comme terme.
On peut continuer ce processus de « marche arrière » (en divisant par 2 puis en soustrayant 1 du résultat) pour déterminer tous les 1^er^ termes possibles de suites Dlin dans lesquelles 1406 parait comme terme.

$$1406 \rightarrow 702 \rightarrow 350 \rightarrow 174 \rightarrow \frac{174}{2} - 1 = 86 \rightarrow \frac{86}{2} - 1 = 42 \rightarrow \frac{42}{2} - 1 = 20 \rightarrow \frac{20}{2} - 1 = 9$$

Si l'on tente de poursuivre ce processus au-delà de 9, on obtient $\frac{9}{2} - 1 = \frac{7}{2}$. Or, ce dernier n'est pas possible car le 1^er^ terme d'une suite Dlin doit être un entier strictement positif (d'où chacun des termes de la suite est donc un entier strictement positif).
Donc, 9, 20, 42, 86, 174, 350, 702 et 1406 sont les 1^er^ termes possibles de suites Dlin dans lesquelles 1406 parait comme terme.

(c) Chacun des entiers de 10 à 19 peut être le premier terme d'une suite Dlin. Donc, pour chacun de ces dix premiers termes possibles, on doit déterminer le chiffre des unités des termes qui suivent.
Si le 1^er^ terme de la suite est 10, alors le 2^e^ terme, $(10 + 1) \times 2 = 22$, a 2 comme chiffre des unités tandis que le 3^e^ terme, $(22 + 1) \times 2 = 46$, a 6 comme chiffre des unités.
Si le 1^er^ terme de la suite est 11, alors le 2^e^ terme, $(11 + 1) \times 2 = 24$, a 4 comme chiffre des unités tandis que le 3^e^ terme, $(24 + 1) \times 2 = 50$, a 0 comme chiffre des unités.
On dresse la liste des chiffres des unités des 2^e^ et 3^e^ termes pour chacun des premiers termes possibles dans le tableau ci-dessous :

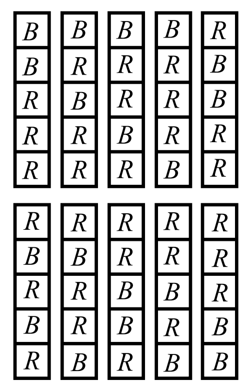
1^er^ terme	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Chiffre des unités du 2^e^ terme	2	4	6	8	0	2	4	6	8	0
Chiffre des unités du 3^e^ terme	6	0	4	8	2	6	0	4	8	2

D'après le tableau ci-dessus, on voit que 8 est le seul chiffre des unités que les 2^e^ et 3^e^ termes peuvent avoir en commun.
Donc, si le 1^er^ terme de la suite est 18 (ayant donc un 8 comme chiffre des unités), alors les 2^e^ et 3^e^ termes de la suite ont 8 comme chiffre des unités. Donc, tous les termes ont le même chiffre des unités.
De même, si le 1^er^ terme de la suite est 13 (ayant donc un 3 comme chiffre des unités), alors les 2^e^ et 3^e^ termes de la suite ont 8 comme chiffre des unités.
Il s'ensuit donc que tous les autres termes après le premier auront 8 comme chiffre des unités.
Parmi les entiers strictement positifs de 10 à 19, 13 et 18 sont ceux qui pourraient être les premiers termes d'une suite Dlin dont tous les termes, après le premier, ont le même chiffre des unités.

(d) Si le 1^er^ terme d'une suite Dlin est x, alors le 2^e^ terme est $(x + 1) \times 2 = 2x + 2$ tandis que le 3^e^ terme est $(2x + 2 + 1) \times 2 = (2x + 3) \times 2 = 4x + 6$.
Par exemple, si $x = 1$ (remarquons qu'il s'agit du plus petit 1^er^ terme possible d'une suite Dlin), alors le 3^e^ terme est $4 \times 1 + 6 = 10$. De plus, si $x = 2$, alors le 3^e^ terme est $4 \times 2 + 6 = 14$.
Quelle est la plus grande valeur possible de x (le 1^er^ terme de la suite) telle que $4x + 6$ (le 3^e^ terme de la suite) soit inférieur ou égal à 2020 ?
En posant $4x + 6 = 2020$ et en résolvant, on obtient $4x = 2014$, d'où $x = 503{,}5$.
Puisque le 1^er^ terme de la suite doit être un entier strictement positif, on ne peut avoir 2020 comme 3^e^ terme.
De même, en posant $4x + 6 = 2019$ et en résolvant, on obtient une valeur non entière de

x. Donc, on ne peut avoir 2019 comme 3e terme d'une suite Dlin.
Lorsque $4x + 6 = 2018$, on obtient $4x = 2012$, d'où $x = 503$.
Donc, si le 1er terme d'une suite Dlin est 503, alors le 3e terme de la suite, soit 2018, est un entier strictement positif entre 1 et 2020.
De plus, 503 est le plus grand 1er terme possible tel que le 3e terme soit un entier strictement positif entre 1 et 2020.
Dans les suites Dlin, on obtient un 3e terme $(4x + 6)$ différent pour chaque premier terme distinct (x).
Donc, afin de déterminer combien des entiers strictement positifs de 1 à 2020 pourraient être le 3e terme dans une suite Dlin, on détermine le nombre de 1er termes tels que le 3e terme ait cette propriété.
Le plus petit 1er terme possible est 1 (d'où on a 10 comme 3e terme) et le plus grand 1er terme possible est 503 (d'où on a 2018 comme 3e terme).
De plus, chaque valeur de x entre 1 et 503 produit un 3e terme ayant une valeur entre 10 et 2018.
Donc, il y a 503 entiers strictement positifs, de 1 à 2020, qui pourraient être le 3e terme dans une suite Dlin.

4. (a) On peut colorier une grille 5×1 de 10 manières différentes afin qu'elle ait exactement 3 cases rouges et 2 cases bleues.
On peut le voir en comptant le nombre de manières différentes dont on peut colorier 2 cases bleues puisque chacune des 3 cases restantes devra être coloriée en rouge.
(Par ailleurs, on pourrait compter le nombre de manières différentes dont on pourrait colorier 3 cases rouges.) Pour la première case à colorier en bleu, on a 5 choix de cases. Après qu'on ait choisi et colorié la première case, il nous reste 4 choix de cases pour la seconde case à colorier. Donc, il y a $5 \times 4 = 20$ tels choix de cases.
Or, puisqu'on ne peut pas distinguer les deux cellules bleues l'une de l'autre, il s'avère que chacune des différentes façons de colorier deux cellules bleues a été compté en double.
Par exemple, les deux choix suivants sont pareils et ont le même résultat final : (1) on choisit d'abord de colorier la case de la deuxième rangée en bleu et ensuite celle de la cinquième rangée, (2) on choisit d'abord de colorier la case de la cinquième rangée en bleu et ensuite celle de la deuxième rangée.
Donc, on peut colorier une grille 5×1 de $20 \div 2 = 10$ manières différentes afin qu'elle contienne exactement 3 cases rouges et 2 cases bleues. Ces 10 manières différentes sont représentées dans la figure ci-contre.



(b) Remarquons d'abord qu'on peut colorier chacune des 13 cases de deux manières différentes (rouge ou bleu), on peut donc colorier une grille 1×13 de 2^{13} manières différentes.
Pour chacune des grilles 1×13, Carrie compte le nombre de cases rouges (qu'on représente par r) et le nombre de cases bleues (qu'on représente par b).
Puisqu'il y a 13 cases en tout, alors $r + b = 13$ et soit $r > b$ soit $b > r$ (puisque r et b sont des entiers et que leur somme est impaire, ils ne peuvent pas être égaux).
Si $r > b$, alors $r > 13 - r$, d'où $2r > 13$ ou $r > 6{,}5$. Donc, $r \geq 7$ (puisque r est un entier).
Si $b > r$, alors $b > 13 - b$, d'où $2b > 13$ ou $b > 6{,}5$. Donc, $b \geq 7$ (puisque b est un entier).
Donc, si le nombre de cases rouges est supérieur au nombre de cases bleues, Carrie notera le nombre de cases rouges car ce dernier est le plus grand des deux nombres et sera supérieur

ou égal à 7.
De même, si le nombre de cases bleues est supérieur au nombre de cases rouges, Carrie notera le nombre de cases bleues car ce dernier est le plus grand des deux nombres et sera supérieur ou égal à 7.
Dans les deux cas, chaque nombre que Carrie notera dans sa liste sera un entier de 7 à 13.
Au moins une des 2^{13} manières différentes dont Carrie pourrait colorier une grille 1×13 contient 7 cases rouges et 6 cases bleues. Donc la liste de Carrie comprend au moins un 7.
Puisque la liste de Carrie comprend un 7 et que chaque nombre de sa liste est supérieur ou égal à 7, alors 7 est le plus petit nombre de sa liste.

(c) Dans une grille $3 \times n$, chaque colonne contient exactement 3 cases. On peut colorier chacune de ces 3 cases de deux manières différentes (rouge ou bleu). Puisqu'on peut colorier chacune de ces 3 cases de deux manières différentes, on peut donc colorier chaque colonne d'une grille $3 \times n$ de $2^3 = 8$ manières différentes.
Donc, on peut colorier une grille $3 \times n$, n étant un entier qui vérifie $1 \leq n \leq 8$, telle que chaque colonne soit coloriée d'une manière différente (on voit un tel exemple dans la grille 3×8 ci-contre).

R	*R*	*R*	*B*	*R*	*B*	*B*	*B*
R	*R*	*B*	*R*	*B*	*R*	*B*	*B*
R	*B*	*R*	*R*	*B*	*B*	*R*	*B*

Puisqu'on ne peut colorier chaque colonne de 3 cases que de 8 manières différentes, alors une grille 3×9 comprendra forcément deux colonnes qui seront coloriées de manière identique.
Donc, la plus petite valeur de n est 9.

(d) L'énoncé du problème est vrai.
Puisqu'il y a 5 rangées dans une grille 5×41, alors les 41 colonnes contiennent chacune 5 cases.
Dans chacune des colonnes, au moins 3 des 5 cases doivent être de même couleur.
Dans chaque colonne, soit le nombre de cases rouges est plus grand que le nombre de cases bleues, soit le nombre de cases bleues est plus grand que le nombre de cases rouges (puisque 5 est impair, on ne peut avoir le même nombre de cases de chaque couleur).
Une colonne qui contient plus de cases rouges que de cases bleues est une *colonne rouge* tandis qu'une colonne qui contient plus de cases bleues que de cases rouges est une *colonne bleue*.
Soit $\mathbb{R}$ le nombre total de colonnes rouges et soit $\mathbb{B}$ le nombre total de colonnes bleues. Donc, $\mathbb{R} + \mathbb{B} = 41$.
En utilisant le même argument que celui de la partie (b), si $\mathbb{R} > \mathbb{B}$, alors $\mathbb{R} \geq 21$, sinon $\mathbb{B} \geq 21$.
Supposons que $\mathbb{R} \geq 21$ (l'argument qui suit peut être avancé de manière similaire si $\mathbb{B} \geq 21$).
Dans ce cas, chacune de ces 21 (ou plus) colonnes a plus de cases rouges que de cases bleues. Donc chacune de ces colonnes a au moins 3 cases rouges.
On va montrer que 3 cases rouges ont le même emplacement dans au moins 3 des 21 colonnes.
De toutes les colonnes rouges, considérons les 21 premières (il y en a au moins 21).
Pour chacune de ces colonnes rouges, considérons les 3 premières cases rouges (il y a au moins 3 cases rouges) en allant du haut vers le bas.
Quel est le plus grand nombre de manières dont on peut colorier chaque colonne telle qu'il y ait exactement 3 cases rouges ?
Puisqu'une grille 5×1 est de la même grandeur que chacune des colonnes dans une grille 5×41, on constate que la question précédente est la même que celle à laquelle on avait

répondu dans la partie (a). Il y a donc 10 telles manières.
Parmi les 21 colonnes rouges, supposons que 2 colonnes au plus ont les mêmes 3 cases coloriées en rouge.
Puisqu'on ne peut colorier une colonne que de 10 manières différentes afin qu'elle contienne exactement 3 cases rouges, alors il y a $2 \times 10 = 20$ telles colonnes au plus.
Or, puisqu'il y a 21 colonnes rouges, on a donc une contradiction.
Donc, notre supposition que 2 colonnes au plus parmi les 21 colonnes rouges avaient les mêmes 3 cases coloriées en rouge était erronée. Il doit donc y avoir au moins 3 colonnes dont les mêmes 3 cases sont coloriées en rouge.
On a donc 9 cases rouges situées aux intersections de ces 3 colonnes et des 3 rangées de chaque colonne contenant les cases rouges.