Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat 2020

(11e année – Secondaire V)

le mardi 25 février 2020
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 26 février 2020
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. Puisque $OPQR$ est un rectangle dont deux côtés sont situés sur les axes, ses côtés sont donc verticaux et horizontaux.
Puisque PQ est horizontal, Q et P ont la même ordonnée, soit 3.
Puisque QR est vertical, Q et R ont la même abscisse, soit 5.
Donc, les coordonnées de Q sont $(5, 3)$.
Réponse : (B)

2. On a :
$$3 \times 2020 + 2 \times 2020 - 4 \times 2020 = 2020 \times (3 + 2 - 4) = 2020 \times 1 = 2020$$
Par ailleurs :
$$3 \times 2020 + 2 \times 2020 - 4 \times 2020 = 6060 + 4040 - 8080 = 10\,100 - 8080 = 2020$$
Réponse : (E)

3. On développe et simplifie pour obtenir $(x + 1)^2 - x^2 = (x^2 + 2x + 1) - x^2 = 2x + 1$.
Réponse : (A)

4. La suite d'Ewan commence par 3 et chaque nombre subséquent est 11 de plus que le nombre précédent.
Puisque chaque nombre dans la suite est égal à un multiple de 11 de plus que 3, alors, par la commutativité, chaque nombre dans la suite est 3 de plus qu'un multiple de 11. De plus, chaque tel entier strictement positif parait dans la suite d'Ewan.
Puisque $110 = 11 \times 10$ est un multiple de 11, alors $113 = 110 + 3$ est 3 de plus qu'un multiple de 11 et parait donc dans la suite d'Ewan.
Par ailleurs, on peut dresser la liste des termes de la suite d'Ewan de manière à atteindre la fourchette dans laquelle sont situés les choix de réponse :
$$3, 14, 25, 36, 47, 58, 69, 80, 91, 102, 113, 124, \ldots$$
Réponse : (A)

5. On a $\sqrt{\dfrac{\sqrt{81} + \sqrt{81}}{2}} = \sqrt{\dfrac{9 + 9}{2}} = \sqrt{9} = 3$.
Réponse : (A)

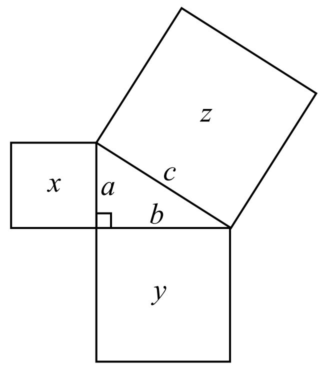
6. Puisque 12 et 21 sont des multiples de 3 ($12 = 4 \times 3$ et $21 = 7 \times 3$), donc ni (A) ni (D) n'est le bon choix de répoonse.
16 est un carré parfait ($16 = 4 \times 4$) donc (C) n'est pas le bon choix de réponse.
Les chiffres de 26 ont une somme de 8. Ce dernier n'étant pas un nombre premier, (E) n'est donc pas le bon choix de réponse.
Puisque 14 n'est pas un multiple de trois, puisqu'il n'est pas un carré parfait et puisque la somme de ses chiffres est égale à un nombre premier ($1 + 4 = 5$), alors (B) est le bon choix de réponse.
Réponse : (B)

7. Puisque WXY est un angle plat, alors $p^\circ + q^\circ + r^\circ + s^\circ + t^\circ = 180^\circ$. Donc, $p + q + r + s + t = 180$.
Afin de calculer la moyenne des nombres p, q, r, s et t, on additionne les cinq nombres et on divise par 5.
Donc, la moyenne de p, q, r, s, et t est égale à $\dfrac{p + q + r + s + t}{5} = \dfrac{180}{5} = 36$.
Réponse : (B)

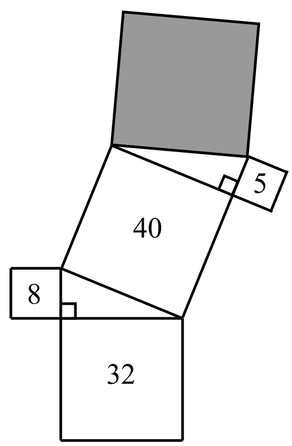
8. Puisque $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$, alors $8^{20} = (2^3)^{20} = 2^{3\times 20} = 2^{60}$.
Donc, si $2^n = 8^{20}$, alors $n = 60$.

Réponse : (B)

9. On sait d'après le théorème de Pythagore qu'il existe une relation entre les mesures a, b et c des côtés d'un triangle rectangle telle que $a^2 + b^2 = c^2$, c étant la mesure de l'hypoténuse.
Puisqu'un carré ayant des côtés de longueur a a une aire de a^2, le théorème de Pythagore peut être reformulé de la manière suivante : la somme des aires des carrés que l'on peut dessiner sur les deux côtés les plus courts est égale à l'aire du carré que l'on peut dessiner sur l'hypoténuse. (Donc, dans la figure ci-dessous, $x + y = z$, x, y et z étant les aires des carrés.)



Dans la figure donnée, cela signifie que l'aire du carré vide et non ombré est égale à $8 + 32 = 40$.



Donc, l'aire du carré ombré est égale à $40 + 5 = 45$.

Réponse : (B)

10. Selon le problème, s et t sont des entiers strictement positifs tels que $s(s - t) = 29$.
Puisque s et t sont positifs, alors $s - t$ est inférieur à s.
Puisque s et 29 sont positifs et $s(s - t) = 29$, alors $s - t$ doit également être positif.
Puisque 29 est un nombre premier, on peut l'écrire sous la forme d'un produit de deux entiers strictement positifs d'une seule manière, soit $29 = 29 \cdot 1$.
Puisque $s(s - t) = 29$ et $s > s - t$, donc on doit avoir $s = 29$ et $s - t = 1$.
Puisque $s = 29$ et $s - t = 1$, alors $t = 28$.
Donc, $s + t = 29 + 28 = 57$.

Réponse : (C)

11. Chacune des première et deuxième colonnes contient 4 X, donc on doit déplacer au moins 2 X. On peut atteindre cet objectif en déplaçant 2 X.
Chacune des première et deuxième rangées contient 4 X, donc en déplaçant les 2 X situés sur la diagonale principale, on enlève simultanément des X des première et deuxième colonnes et des première et deuxième rangées.
Puisque la cinquième colonne ne contient qu'un seul X au départ, on met les deux X que l'on a déplacé dans les rangées de cette colonne qui ne contiennent que 2 X. On a donc :

O	X	X	X	
X	O	X		X
X	X			X*
X	X		X	
		X	X	X*

(Les cases dont les X ont été enlevés sont indiquées par des O tandis que les cases vers lesquelles les X ont été déplacés sont indiquées par des X*.)
Donc, afin que chaque rangée et chaque colonne contienne exactement trois X, il faut déplacer au minimum 2 X.

Réponse : (B)

12. Harriet a parcouru les 720 premiers mètres de la piste à une vitesse constante de 3 m/s, elle a donc parcouru cette distance en $\dfrac{720 \text{ m}}{3 \text{ m/s}} = 240$ s.
Sachant que Harriet a parcouru en tout 1000 m en 380 s, alors elle a parcourue le deuxième segment de la piste, soit une distance de $1000 \text{ m} - 720 \text{ m} = 280$ m, en $380 \text{ s} - 240 \text{ s} = 140$ s.
Sachant qu'elle a parcouru ce deuxième segment de la piste à une vitesse constante de v m/s, alors $\dfrac{280 \text{ m}}{140 \text{ s}} = v$ m/s, d'où $v = 2$.

Réponse : (A)

13. Puisque tous les couples de nombres adjacents ont la même somme, alors $2 + x = x + y$.
Donc, $y = 2$. On a donc la liste $2, x, 2, 5$.
On a donc que tous les couples de nombre adjacents ont une somme de $2 + 5 = 7$, donc $x = 5$.
Ainsi, $x - y = 5 - 2 = 3$.

Réponse : (C)

14. Si les roses jaunes doivent représenter $\frac{2}{7}$ du nombre total de roses, alors les roses rouges représentent $\frac{5}{7}$ du nombre total de roses.
Puisque 30 roses rouges représentent $\frac{5}{7}$ du nombre total de roses, alors $\frac{1}{7}$ du nombre total de roses est égal à $30 \div 5 = 6$. Donc, on a un nombre total de $6 \times 7 = 42$ roses.
Puisqu'il y a 42 roses dont 30 sont rouges et dont les restantes sont jaunes, alors on a $42-30 = 12$ roses jaunes.
Puisqu'il y avait 19 roses jaunes au départ, Rad a dû enlever $19 - 12 = 7$ roses jaunes.

Réponse : (E)

15. Lorsque $N = 3x+4y+5z$, x, y et z étant chacun égal à 1 ou à -1, il y a 8 combinaisons possibles des valeurs de x, y et z :

x	y	z	N
1	1	1	12
1	1	-1	2
1	-1	1	4
1	-1	-1	-6
-1	1	1	6
-1	1	-1	-4
-1	-1	1	-2
-1	-1	-1	-12

D'après le tableau ci-dessus, N ne peut être égal à 0, N ne peut être un nombre impair, N peut être égal à 4 et N est toujours un nombre pair.
Donc, parmi les quatre énoncés, un seul est vrai.

Réponse : (B)

16. On remarque que $\dfrac{x+y}{x} = \dfrac{x}{x} + \dfrac{y}{x} = 1 + \dfrac{y}{x}$.
La plus grande valeur possible de $\dfrac{x+y}{x} = 1+\dfrac{y}{x}$ se produit lorsque $\dfrac{y}{x}$ est aussi grand que possible.
Puisque la valeur de x est toujours négative et que celle de y est toujours positive, alors $\dfrac{y}{x}$ aura une valeur négative.
Donc, afin que $\dfrac{y}{x}$ soit aussi grand que possible, sa valeur négative doit être aussi près de 0 que possible.
Puisque la valeur de x est négative et que celle de y est positive, cela se produit lorsque x est aussi négatif que possible et lorsque y est aussi petit que possible ; c'est-à-dire lorsque $x = -4$ et $y = 2$.
Donc, $1 + \dfrac{2}{-4} = \dfrac{1}{2}$ est la plus grande valeur possible de $\dfrac{x+y}{x}$.

Réponse : (E)

17. Puisque le triangle PQR est rectangle en Q, l'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2} \cdot PQ \cdot QR$.
Puisque le triangle a une aire de 30 et que $PQ = 5$, alors $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot QR = 30$, d'où $QR = 30 \cdot \frac{2}{5} = 12$.
D'après le théorème de Pythagore,

$$PR^2 = PQ^2 + QR^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$$

Puisque $PR > 0$, alors $PR = \sqrt{169} = 13$.
Si on considère que le triangle PQR a pour base PR et pour hauteur QS, l'aire du triangle est donc égale à $\frac{1}{2} \cdot PR \cdot QS$.
Puisque le triangle a une aire de 30 et que $PR = 13$, alors $\frac{1}{2} \cdot 13 \cdot QS = 30$, d'où $QS = 30 \cdot \frac{2}{13} = \frac{60}{13}$.

Réponse : (A)

18. Soit W, X, Y, et Z les quatre équipes qui participent au tournoi.
Donc, il y eut un total de 6 matchs :

W contre X, W contre Y, W contre Z, X contre Y, X contre Z, Y contre Z

À la fin de chaque match, soit une équipe obtient 3 points pour une victoire et l'autre 0 point pour une défaite (soit un total de de 3 points), soit chaque équipe obtient 1 point pour un match nul (soit un total de 2 points)).
Puisqu'il y eut un total de 6 matchs, alors théoriquement le nombre maximal de points pouvant être attribués est $6 \cdot 3 = 18$ tandis que le nombre minimal de points pouvant être attribués est $6 \cdot 2 = 12$.
En particulier, cela signifie qu'il n'est pas possible que le nombre total de points soit égal à 11.
On peut montrer que chacune des possibilités de pointage, de 12 à 18 points, est possible.
Donc, S ne peut pas être égal à 11.

Réponse : (C)

19. Lorsqu'on développe $(3 + 2x + x^2)(1 + mx + m^2x^2)$, on obtient les termes contenant x^2 de la multiplication d'une constante avec un terme contenant x^2 ou de la multiplication de deux termes contenant chacun x.
Autrement dit, le terme contenant x^2 sera

$$3 \cdot m^2x^2 + 2x \cdot mx + x^2 \cdot 1 = 3m^2x^2 + 2mx^2 + x^2 = (3m^2 + 2m + 1)x^2$$

D'après l'énoncé, le coefficient de x^2 est égal à 1. On a donc $3m^2+2m+1 = 1$, d'où $3m^2+2m = 0$ ou $m(3m + 2) = 0$. Cela signifie que $m = 0$ ou $m = -\frac{2}{3}$.
Ces valeurs possibles de m ont une somme de $-\frac{2}{3}$.

Réponse : (B)

20. Si Harry efface un point d'une face qui porte un nombre pair de points, cette face portera alors un nombre impair de points.
Si Harry efface un point d'une face qui porte un nombre impair de points, cette face portera alors un nombre pair de points.
Au départ, 3 faces portaient un nombre pair de points tandis que 3 faces portaient un nombre impair de points.
Si Harry efface un point d'une face qui porte un nombre pair de points, alors 4 faces porteront un nombre impair de points et 2 faces porteront un nombre pair de points. Dans ce cas, après un lancer, la probabilité que la face supérieure du cube porte un nombre impair de points est égale à $\frac{4}{6}$.
Si Harry efface un point d'une face qui porte un nombre impair de points, alors 2 faces porteront un nombre impair de points et 4 faces porteront un nombre pair de points. Dans ce cas, après un lancer, la probabilité que la face supérieure du cube porte un nombre impair de points est égale à $\frac{2}{6}$.
Puisque les 6 faces du cube portent un total de $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 27$ points, alors la probabilité que Harry efface un point de la face à 2 points est égale à $\frac{2}{27}$. De même, la probabilité qu'il efface un point de la face à 3 points est égale à $\frac{3}{27}$ et ainsi de suite.
Donc, on peut obtenir la probabilité que Harry efface un point de la face à 2 points puis que la face supérieure du cube porte un nombre impair de points à la suite d'un lancer en multipliant les probabilités des deux événements, soit $\frac{2}{27} \cdot \frac{2}{3}$ (puisque 4 faces portent un nombre impair de points et 2 faces portent un nombre pair de points).
De même, la probabilité que Harry efface un point de la face à 3 points puis que la face supérieure du cube porte un nombre impair de points à la suite d'un lancer est égale à $\frac{3}{27} \cdot \frac{1}{3}$.

On continue de la même façon pour obtenir la probabilité que la face supérieure du cube porte un nombre impair de points à la suite d'un lancer après que Harry ait effacé un point :
$\frac{2}{27} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{27} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{27} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{27} \cdot \frac{1}{3} + \frac{6}{27} \cdot \frac{2}{3} + \frac{7}{27} \cdot \frac{1}{3}$
Ceci est égal à $\frac{2}{3} \cdot (\frac{2}{27} + \frac{4}{27} + \frac{6}{27}) + \frac{1}{3}(\frac{3}{27} + \frac{5}{27} + \frac{7}{27}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{12}{27} + \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{27} = \frac{8}{27} + \frac{5}{27} = \frac{13}{27}$.

Réponse : (C)

21. Si les trois nombres x, 36 et y ont un produit de 2592, alors $x \cdot 36 \cdot y = 2592$, d'où $xy = \dfrac{2592}{36} = 72$.
Si x et y sont des entiers strictement positifs qui vérifient $xy = 72$, alors on a les possibilités suivantes :

x	y	$x+y$
72	1	73
36	2	38
24	3	27
18	4	22
12	6	18
9	8	17

N'ayant attribué aucun ordre à x, 36 and y, on suppose que $x > y$.
Dans le problème donné, on veut écrire quatre couples de nombres dans les cercles vides de manière que les 9 entiers dans les cercles soient tous différents les uns des autres et qu'ils aient une somme qui soit aussi grande que possible.
Autrement dit, on veut choisir 4 des 6 couples dans le tableau ci-dessus (sachant qu'on ne peut pas choisir le couple 36 et 2 puisque 36 est déjà dans le cercle du milieu) afin que la somme soit aussi grande que possible.
Puisqu'on a les sommes de chaque couple, on choisit les 4 couples dont les sommes sont les plus grandes.
Cela signifie que les 9 entiers auront une somme de $(72+1)+(24+3)+(18+4)+(12+6)+36$, soit $73+27+22+18+36$ ou 176.

Réponse : (B)

22. Puisque $x^2 + 3xy + y^2 = 909$ et $3x^2 + xy + 3y^2 = 1287$, alors

$$\begin{aligned}(x^2 + 3xy + y^2) + (3x^2 + xy + 3y^2) &= 909 + 1287\\ 4x^2 + 4xy + 4y^2 &= 2196\\ x^2 + xy + y^2 &= 549\end{aligned}$$

Puisque $x^2 + 3xy + y^2 = 909$ et $x^2 + xy + y^2 = 549$, alors

$$\begin{aligned}(x^2 + 3xy + y^2) - (x^2 + xy + y^2) &= 909 - 549\\ 2xy &= 360\\ xy &= 180\end{aligned}$$

Puisque $x^2 + 3xy + y^2 = 909$ et $xy = 180$, alors

$$\begin{aligned}(x^2 + 3xy + y^2) - xy &= 909 - 180\\ x^2 + 2xy + y^2 &= 729\\ (x + y)^2 &= 27^2\end{aligned}$$

Donc, $x + y = 27$ ou $x + y = -27$. On voit donc que $x + y$ ne peut être égal à 39, à 29, à 92 ou à 41.
(Par ailleurs, on peut résoudre le système d'équations $x + y = 27$ et $xy = 180$ en isolant x et y afin de montrer qu'il existe des nombres réels x et y qui vérifient le système d'équations initial.)
Donc, (A) 27 est une valeur possible de $x + y$.

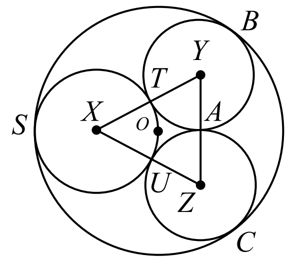
Réponse : (A)

23. *Solution 1*
Puisque $f(x) = ax + b$ pour tous les nombres réels x, alors $f(t) = at + b$, t étant un nombre réel quelconque.
Lorsque $t = bx + a$, on obtient $f(bx + a) = a(bx + a) + b = abx + (a^2 + b)$.
De plus, on sait que $f(bx + a) = x$ pour tous les nombres réels x.
Cela signifie que $abx + (a^2 + b) = x$ pour tous les nombres réels x. Donc $(ab - 1)x + (a^2 + b) = 0$ pour tous les nombres réels x.
Pour que cela soit vrai, on doit donc avoir $ab = 1$ et $a^2 + b = 0$.
De la seconde équation, $b = -a^2$. On pose cette dernière dans la première équation pour obtenir $a(-a^2) = 1$ ou $a^3 = -1$, d'où $a = -1$.
Puisque $b = -a^2$, alors $b = -1$, d'où $a + b = -2$.

Solution 2
Puisque $f(x) = ax+b$ pour tous les nombres réels x, donc lorsque $x = a$, on obtient $f(a) = a^2+b$.
Puisque $f(bx + a) = x$ pour tous les nombres réels x, donc lorsque $x = 0$, on obtient $f(a) = 0$.
Lorsqu'on pose la seconde équation de $f(a)$ dans la première, on obtient $a^2 + b = 0$ ou $b = -a^2$.
D'où $f(x) = ax - a^2$ pour tous les nombres réels x et $f(-a^2x + a) = x$ pour tous les nombres réels x.
Puisque $f(-a^2x + a) = x$ pour tous les nombres réels x, donc lorsque $x = -1$, on obtient $f(a^2 + a) = -1$.
Puisque $f(x) = ax - a^2$ pour tous les nombres réels x, donc lorsque $x = a^2 + a$, on obtient $f(a^2 + a) = a(a^2 + a) - a^2$.
Lorsqu'on pose la seconde équation de $f(a^2+a)$ dans la première, on obtient $a(a^2+a)-a^2 = -1$ ou $a^3 = -1$.
Puisque a est un nombre réel, alors $a = -1$.
Puisque $b = -a^2$, alors $b = -1$, d'où $a + b = -2$.
On peut vérifier : si $f(x) = -x - 1$, alors $f(-x - 1) = -(-x - 1) - 1 = x$, ce qu'il fallait démontrer.

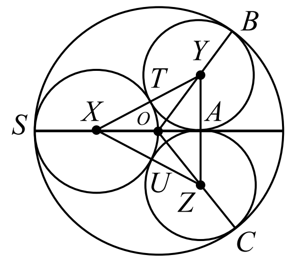
Réponse : (E)

24. Soit O le centre du grand cercle.
Supposons que le cercle de centre X touche : le grand cercle au point S, le cercle de centre Y au point T et le cercle de centre Z au point U.
Supposons que les cercles de centres Y et Z se touchent au point A et qu'ils touchent le grand cercle respectivement aux points B et C.
On joint X à Y, X à Z, et Y à Z.



(Remarquez qu'on a redessiné le diagramme afin que le cercle de centre X semble réellement passer par le centre du grand cercle.)
Puisque les cercles sont tangents en points T et U, les segments de droite XY et XZ passent respectivement aux points T et U.
De plus, $XY = XT + TY = 1 + r$ puisque les cercles de centres X et Y ont pour rayons respectifs 1 et r.
De même, $XZ = 1 + r$.
De plus, $YA = ZA = YB = ZC = r$ puisque ces derniers sont les rayons des deux cercles.
Lorsqu'un cercle est situé à l'intérieur d'un autre cercle et que les deux cercles se touchent en un point, alors les rayons des deux cercles qui passent par ce point sont confondus car les cercles ont une tangente commune au point où ils se touchent et cette tangente commune est perpendiculaire à chacun des rayons.
Puisque le cercle de centre X touche le grand cercle au point S, alors X est situé sur OS.
Considérons le diamètre du grand cercle qui passe au point X.
Puisque le cercle de centre X passe au point O, alors le rayon du grand cercle est deux fois plus grand que celui du cercle de centre X. Donc le grand cercle a un rayon de 2.
De plus, sachant que le cercle de centre X a un rayon de 1, $XO = 1$.
On joint ensuite O à B. Puisque les cercles de centres O et Y se touchent au point B, alors OB passe au point Y. Cela signifie que $OY = OB - BY = 2 - r$. De même, $OZ = 2 - r$.
De plus, par symétrie, le diamètre du grand cercle qui passe au point X passe aussi au point A, soit le point où les deux petits cercles se touchent :

> De manière plus formelle, on trace la tangente commune aux cercles de centres Y et Z au point de contact A.
> Étant tangente aux deux cercles, cette droite est donc perpendiculaire à YZ.
> Puisque le triangle OYZ est isocèle avec $OY = OZ$ et que A est le milieu de sa base YZ, sa hauteur est la droite menée de A jusqu'à O.
> De même, puisque le triangle XYZ est isocèle avec $XY = XZ$ et que A est le milieu de sa base YZ, sa hauteur est la droite menée de A jusqu'à X.
> Puisque la droite perpendiculaire à YZ qui passe au point A passe aussi aux points O et X, on la considère comme étant le diamètre du grand cercle qui passe au point X.



On considère les triangles XYA et OYA, chacun étant rectangle en A.
D'après le théorème de Pythagore,

$$OA = \sqrt{OY^2 - YA^2} = \sqrt{(2-r)^2 - r^2} = \sqrt{4 - 4r + r^2 - r^2} = \sqrt{4-4r}$$

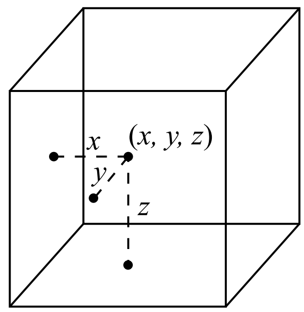
De nouveau, d'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} XA^2 + YA^2 &= XY^2 \\ (XO + OA)^2 + r^2 &= (1+r)^2 \\ (1 + \sqrt{4-4r})^2 &= 1 + 2r + r^2 - r^2 \\ 1 + 2\sqrt{4-4r} + (4-4r) &= 1 + 2r \\ 2\sqrt{4-4r} &= 6r - 4 \\ \sqrt{4-4r} &= 3r - 2 \\ 4 - 4r &= (3r-2)^2 \qquad \text{(on a elevé chaque membre au carré)} \\ 4 - 4r &= 9r^2 - 12r + 4 \\ 8r &= 9r^2 \end{aligned}$$

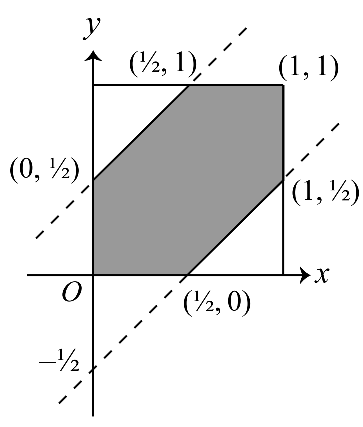
Puisque $r \neq 0$, alors $9r = 8$, d'où $r = \frac{8}{9} \approx 0{,}889$.
Parmi les choix de réponse, 0,889 est plus près de (E) 0,89.

Réponse : (E)

25. On considère un cube de dimensions $1 \times 1 \times 1$.
On associe un triplet (x, y, z) de nombres réels qui vérifient $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ et $0 \leq z \leq 1$ à un point à l'intérieur du cube ; x étant la longueur du segment de droite qui est perpendiculaire à la face de gauche du cube et qui joint le point à cette face, y étant la longueur du segment de droite qui est perpendiculaire à la face de devant du cube et qui joint le point à cette face et z étant la longueur du segment de droite qui est perpendiculaire à la face de dessous du cube et qui joint le point à cette face.
Ce point a donc pour coordonnées (x, y, z). Donc, l'action de choisir trois nombres réels x, y et z de 0 à 1 au hasard et indépendamment les uns des autres est équivalente à l'action de choisir au hasard et uniformément un point (x, y, z) à l'intérieur du cube ou sur ce dernier.



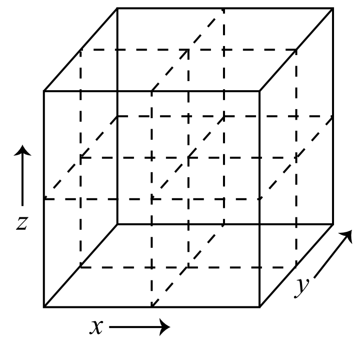
Afin de choisir des valeurs de x, de y et de z qui vérifient les conditions $-\frac{1}{2} < x - y < \frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2} < x - z < \frac{1}{2}$, on doit imposer des restrictions sur les points à l'intérieur du cube. Ces restrictions délimitent donc une région à l'intérieur du cube.
La probabilité qu'un point choisi au hasard à l'intérieur de ce cube remplisse les conditions données sera égale au volume de la région définie par les conditions divisée par le volume du cube entier.
Puisque le cube a un volume de 1, alors la probabilité sera égale au volume de la région définie par ces conditions.
Considérons la région dans le plan cartésien (le plan xy) définie par $-\frac{1}{2} < x - y < \frac{1}{2}$.
On peut réarranger les termes de l'inégalité pour obtenir $x - \frac{1}{2} < y < x + \frac{1}{2}$. Cela signifie qu'un point (x, y) qui vérifie ces conditions est situé au-dessus de la droite d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ et en dessous de la droite d'équation $y = x + \frac{1}{2}$.
En imposant les restrictions $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1$, on obtient la région :



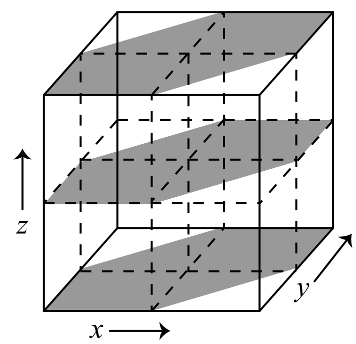
Puisqu'un point (x, y, z) dans la région vérifie $-\frac{1}{2} < x - y < \frac{1}{2}$, ces conditions nous permettent de « découper » le cube de la même manière que celle dans la figure ci-dessus tout en gardant la partie qui ressemble à la région ci-dessus. Les points restants sont exactement ceux qui remplissent cette condition.

De même, on réarrange les termes de l'inégalité $-\frac{1}{2} < x - z < \frac{1}{2}$ pour obtenir $x - \frac{1}{2} < z < x + \frac{1}{2}$, qui a la même forme dans le plan xz.
Par conséquent, on peut couper le cube d'avant en arrière de manière à ressembler à cette forme.
On doit maintenant déterminer le volume de la région restante.

Afin de déterminer le volume de la région, on sépare le cube $1 \times 1 \times 1$ en huit cubes chacun de dimensions $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$.



Lorsqu'on découpe ce cube selon les restrictions de l'inégalité $x - \frac{1}{2} < y < x + \frac{1}{2}$, les deux cubes de l'arrière gauche et les deux cubes de l'avant droit sont coupés en deux.



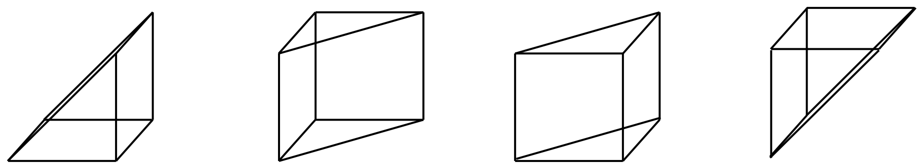
Lorsqu'on découpe ce cube selon les restrictions de l'inégalité $x - \frac{1}{2} < z < x + \frac{1}{2}$, les deux cubes supérieurs de gauche et les deux cubes inférieurs de droite sont coupés en deux.
Les huit petits cubes sont coupés comme suit :

Petit cube	Coupé par $x - \frac{1}{2} < y < x + \frac{1}{2}$	Coupé par $x - \frac{1}{2} < z < x + \frac{1}{2}$
Avant inférieur gauche	Non	Non
Avant inférieur droit	Oui	Oui
Arrière inférieur gauche	Oui	Non
Arrière inférieur droit	Non	Oui
Avant supérieur gauche	Non	Oui
Avant supérieur droit	Oui	Non
Arrière supérieur gauche	Oui	Oui
Arrière supérieur droit	Non	Non

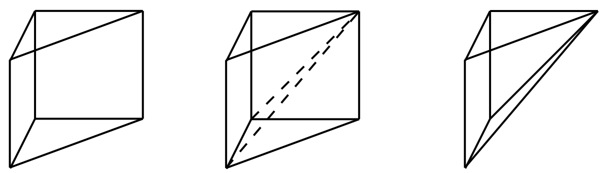
On peut donc considérer les petits cubes comme suit :

- Les cubes avant inférieur gauche et arrière supérieur droit : ces cubes ne sont coupés par aucune restriction et contribuent donc $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ au volume du solide.

- Les cubes arrière inférieur gauche, arrière inférieur droit, avant supérieur gauche et avant supérieur droit : ces cubes ne sont coupés que par l'une des deux restrictions. Donc ces cubes contribuent $\frac{1}{2}$ de leur volume (soit $\frac{1}{16}$ chacun) au volume du solide.



- Les cubes arrière supérieur gauche et avant inférieur droit : Chacun de ces cubes est coupé en deux par les deux restrictions. La première restriction coupe le cube en un prisme triangulaire dont le volume est la moitié de celui du petit cube, soit $\frac{1}{16}$. La seconde restriction coupe ce prisme triangulaire de manière à en créer une pyramide à base carrée. La base carrée de la pyramide a des côtés de longueur $\frac{1}{2}$ tandis que la hauteur de la pyramide est de $\frac{1}{2}$. La pyramide a donc un volume de $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$.



Donc, le volume du solide est égal à $2 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{16} + 2 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$.

Ainsi, la probabilité requise est égale à $\frac{7}{12}$.

Réponse : (B)