



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat

(11^e année – Sec. V)

le mardi 25 février 2020

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 26 février 2020

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)



UNIVERSITY OF
WATERLOO

Durée: 60 minutes

©2020 University of Waterloo

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Directives

1. Attendez le signal du surveillant ou de la surveillante avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponses. Au besoin, demandez à l'enseignante ou à l'enseignant d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur droite de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école et le nom de la ville.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats admissibles.**
6. Le concours est composé de questions à choix multiple. Chaque question est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. Notation: Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C.
Une réponse fautive n'est *pas* pénalisée.
Chaque question laissée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 10 questions.
8. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui visuel seulement.
9. Après le signal du surveillant ou de la surveillante, vous aurez 60 minutes pour terminer.
10. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Pascal, Cayley ou Fermat.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

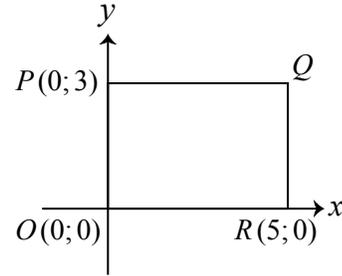
Notation: Une réponse fautive *n'est pas pénalisée*.

On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 10 questions.

Partie A (5 points par bonne réponse)

1. Dans la figure ci-contre, les points $O(0,0)$, $P(0,3)$, Q et $R(5,0)$ forment un rectangle. Quelles sont les coordonnées de Q ?

(A) (5,5) (B) (5,3) (C) (3,3)
(D) (2,5, 1,5) (E) (0,5)



2. Quelle est la valeur de $3 \times 2020 + 2 \times 2020 - 4 \times 2020$?
(A) 6060 (B) 4040 (C) 8080 (D) 0 (E) 2020
3. L'expression $(x+1)^2 - x^2$ est égale à laquelle des expressions suivantes pour tous les nombres réels x ?
(A) $2x+1$ (B) $2x-1$ (C) $(2x+1)^2$ (D) -1 (E) $x+1$
4. Ewan crée une suite en comptant par bonds de 11 à partir de 3. Il écrit donc : 3, 14, 25, 36, ... Lequel des nombres suivants finira par paraître dans la suite d'Ewan ?

(A) 113 (B) 111 (C) 112 (D) 110 (E) 114

5. Quelle est la valeur de $\sqrt{\frac{\sqrt{81} + \sqrt{81}}{2}}$?

(A) 3 (B) 18 (C) 27 (D) 81 (E) 162

6. Anna pense à un entier :

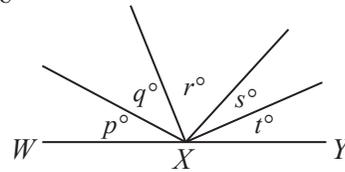
- qui *n'est pas* un multiple de trois ;
- qui *n'est pas* un carré parfait ;
- dont la somme de ses chiffres est égale à un nombre premier.

Lequel des nombres suivants pourrait être l'entier auquel pense Anna ?

(A) 12 (B) 14 (C) 16 (D) 21 (E) 26

7. Dans la figure ci-contre, WXY est un angle plat. Quelle est la moyenne de p , de q , de r , de s et de t ?

(A) 30 (B) 36 (C) 60
(D) 72 (E) 45

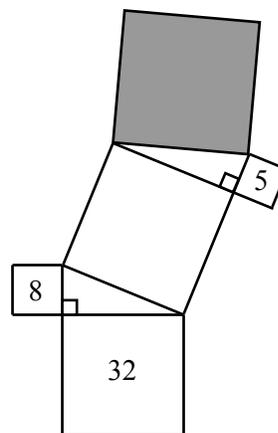


8. Si $2^n = 8^{20}$, quelle est la valeur de n ?

(A) 10 (B) 60 (C) 40 (D) 16 (E) 17

9. La figure ci-contre est composée de deux triangles rectangles et de cinq carrés dont trois ont des aires de 5, de 8 et de 32. Quelle est l'aire du carré ombré ?

(A) 35 (B) 45 (C) 29
(D) 19 (E) 75



10. Les entiers strictement positifs s et t sont tels que $s(s - t) = 29$. Quelle est la valeur de $s + t$?

(A) 1 (B) 28 (C) 57 (D) 30 (E) 29

Partie B (6 points par bonne réponse)

11. Dans le quadrillage 5×5 ci-contre, 15 cases contiennent des X et 10 cases sont vides. On peut déplacer n'importe quel X pour le placer dans n'importe quelle case vide. Quel est le plus petit nombre de X qu'il faut déplacer afin que chaque rangée et chaque colonne contienne exactement trois X ?

X	X	X	X	
X	X	X		X
X	X			
X	X		X	
		X	X	

(A) 1 (B) 2 (C) 3
(D) 4 (E) 5

12. Harriet a parcouru une piste de 1000 m en 380 secondes. Elle a parcouru les 720 premiers mètres de la piste à une vitesse constante de 3 m/s. Elle a parcouru le restant de la piste à une vitesse constante de v m/s. Quelle est la valeur de v ?

(A) 2 (B) 1,5 (C) 3 (D) 1 (E) 4,5

13. Dans la liste $2, x, y, 5$, tous les couples de nombres adjacents ont la même somme. Quelle est la valeur de $x - y$?

(A) 1 (B) -3 (C) 3 (D) -1 (E) 0

14. Dans le jardin de Rad, il y a exactement 30 roses rouges, 19 roses jaunes et aucune autre rose. Combien de roses jaunes Rad doit-il enlever afin que les roses jaunes représentent $\frac{2}{7}$ du nombre total de roses dans le jardin ?

(A) 5 (B) 6 (C) 4 (D) 8 (E) 7

15. On considère l'équation $N = 3x + 4y + 5z$, x ayant comme valeurs possibles 1 ou -1, y ayant comme valeurs possibles 1 ou -1, et z ayant comme valeurs possibles 1 ou -1. Combien des énoncés suivants sont vrais ?

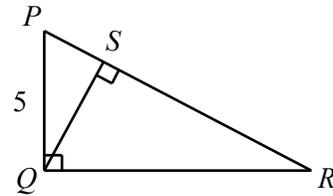
- N peut être égale à 0.
- N est toujours égale à un nombre impair.
- N ne peut pas être égale à 4.
- N est toujours égale à un nombre pair.

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

16. Soit x et y des nombres réels tels que $-4 \leq x \leq -2$ et $2 \leq y \leq 4$. Quelle est la plus grande valeur possible de $\frac{x+y}{x}$?

- (A) 1 (B) -1 (C) $-\frac{1}{2}$ (D) 0 (E) $\frac{1}{2}$

17. Dans la figure ci-contre, le triangle PQR est rectangle en Q et le point S est situé sur PR de manière que QS est perpendiculaire à PR . Sachant que le triangle PQR a une aire de 30 et que $PQ = 5$, quelle est la longueur de QS ?



- (A) $\frac{60}{13}$ (B) 5 (C) $\frac{30}{13}$
 (D) 4 (E) 3

18. Quatre équipes participent à un tournoi où chaque équipe joue un seul match contre chacune des trois autres équipes. À la fin de chaque match, soit les équipes ont fait match nul, soit une équipe a gagné tandis que l'autre a perdu. On attribue aux équipes 3 points pour une victoire, 0 point pour une défaite et 1 point pour un match nul. Soit S la somme des points des quatre équipes à la fin du tournoi. Parmi les valeurs suivantes, laquelle ne peut *pas* être égale à S ?

- (A) 13 (B) 17 (C) 11 (D) 16 (E) 15

19. Si l'expression $(3 + 2x + x^2)(1 + mx + m^2x^2)$ est développée et réduite, le coefficient de x^2 est égal à 1. Quelle est la somme de toutes les valeurs possibles de m ?

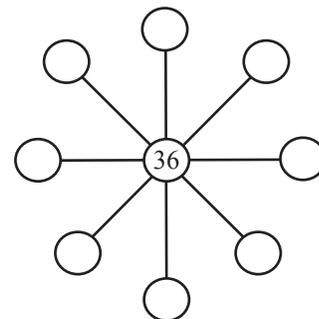
- (A) $-\frac{4}{3}$ (B) $-\frac{2}{3}$ (C) 0 (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{4}{3}$

20. Un cube a six faces. Chaque face porte quelques points. Les six faces respectives du cube portent 2, 3, 4, 5, 6 et 7 points. Harry choisit un point au hasard et décide de l'effacer, chaque point ayant les mêmes chances d'être choisi par Harry. À la suite d'un lancer, chaque face du cube a les mêmes chances d'être la face supérieure. On lance le cube, quelle est la probabilité que la face supérieure du cube porte un nombre impair de points ?

- (A) $\frac{4}{7}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{13}{27}$ (D) $\frac{11}{21}$ (E) $\frac{3}{7}$

Partie C (8 points par bonne réponse)

21. Dans la figure ci-contre, le cercle du milieu contient le nombre 36. Il est possible d'écrire divers entiers positifs dans les huit cercles vides de manière que le produit de n'importe quels trois entiers sur une même ligne droite soit égal à 2592. Si les neuf entiers dans les cercles doivent être tous différents les uns des autres, quelle est la plus grande somme possible de ces neuf entiers ?



- (A) 160 (B) 176 (C) 178
 (D) 195 (E) 216

22. Soit x et y des nombres réels qui vérifient les deux équations suivantes :

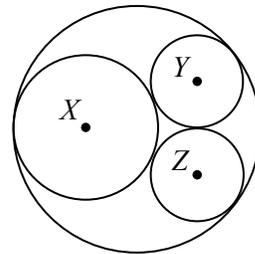
$$\begin{aligned}x^2 + 3xy + y^2 &= 909 \\ 3x^2 + xy + 3y^2 &= 1287\end{aligned}$$

Quelle est une valeur possible de $x + y$?

- (A) 27 (B) 39 (C) 29 (D) 92 (E) 41
23. Soit a et b des nombres réels tels que la fonction f ait comme propriétés $f(x) = ax + b$ pour tous les nombres réels x et $f(bx + a) = x$ pour tous les nombres réels x . Quelle est la valeur de $a + b$?

- (A) 2 (B) -1 (C) 0 (D) 1 (E) -2

24. Dans la figure ci-contre, le cercle de centre X est tangent au grand cercle et passe par le centre de ce dernier. Chacun des cercles de centres Y et Z est tangent aux trois autres cercles. Le cercle de centre X a un rayon de 1. Chacun des cercles de centres Y et Z a un rayon de r . La valeur de r est plus près de :



- (A) 0,93 (B) 0,91 (C) 0,95
(D) 0,87 (E) 0,89

25. On choisit trois nombres réels de 0 à 1 au hasard et indépendamment les uns des autres, soit les nombres x , y et z . Quelle est la probabilité que $x - y$ et $x - z$ soient tous les deux supérieurs à $-\frac{1}{2}$ mais inférieurs à $\frac{1}{2}$?

- (A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{7}{12}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{2}{3}$



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Fermat de 2020! Chaque année, plus de 265 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignante ou votre enseignant à vous inscrire au concours Hypatie qui aura lieu en avril.

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- plus d'information à propos du concours Hypatie
- des copies gratuites des concours précédents
- des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
- des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- inscrire vos élèves aux concours Fryer, Galois et Hypatie qui auront lieu en avril
- jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11^e et 12^e année
- vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
- vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
- vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
- trouver les résultats de vos élèves dans les concours