Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide

le mardi 7 avril 2020
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 8 avril 2020
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 2 heures et demie

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 10 **Chaque question vaut 10 points.**

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci :
   - Chacune vaut 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci :
   - Chacune vaut le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

NOTE :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.

Remarque au sujet de l'encodage par bulles

Prière de s'assurer d'avoir bien encodé son nom, sa date de naissance et son année scolaire sur la feuille de renseignements et d'avoir répondu à la question portant sur son admissibilité.

1. (a) Si $x = 11$, quelle est la valeur de $\dfrac{3x+6}{x+2}$?

   (b) Quelle est l'ordonnée à l'origine de la droite qui passe aux points $A(-1, 5)$ et $B(1, 7)$?

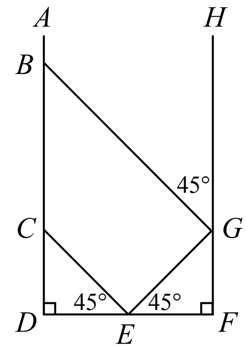
   (c) Les droites d'équations $y = 3x + 7$, $y = x + 9$ et $y = mx + 17$ se coupent toutes en un même point. Déterminer la valeur de m.

2. (a) Le nombre impair m est un entier strictement positif composé de trois chiffres distincts. Sachant que le chiffre des centaines est égal au produit des chiffres des unités et des dizaines, quel est l'entier m ?

   (b) Éléonore a un sac de 100 billes, chacune étant noire ou dorée. Le rapport du nombre de billes noires au nombre de billes dorées est de $1 : 4$. Combien de billes dorées doit-elle rajouter au sac afin que ce rapport soit égal à $1 : 6$?

   (c) Soit n un entier strictement positif et soit la valeur de $\dfrac{n^2+n+15}{n}$ un entier. Déterminer toutes les valeurs possibles de n.

3. (a) Claudette tient un pointeur laser au point C et pointe le faisceau laser vers le point E. Le faisceau heurte DF au point E et se réfléchit vers FH qu'il heurte au point G avant de se réfléchir vers AD qu'il heurte au point B, comme dans la figure ci-contre. Si $DE = EF = 1$ m, quelle est la longueur de BD en mètres ?



(b) Adèle considère les valeurs $x = 10$ et $y = 2$, et applique le procédé suivant :

Étape 1 :	On additionne x et y. Soit x égal au résultat de cette addition. La valeur de y demeure inchangée.
Étape 2 :	On multiplie x et y. Soit x égal au résultat de cette multiplication. La valeur de y demeure inchangée.
Étape 3 :	On additionne y et 1. Soit y égal au résultat de cette addition. La valeur de x demeure inchangée.

Adèle dresse la liste des valeurs de x et de y à chaque étape :

	x	y
Avant l'Étape 1	10	2
Après l'Étape 1	12	2
Après l'Étape 2	24	2
Après l'Étape 3	24	3

À partir des nouvelles valeurs de x et de y, soit $x = 24$ et $y = 3$, Adèle applique le procédé deux fois de plus. Quelle est la valeur finale de x ?

(c) Déterminer tous les entiers k pour lesquels la parabole d'équation $y = kx^2+6x+k$ a deux abscisses à l'origine distinctes étant donné que $k \neq 0$.

4. (a) Les entiers strictement positifs a et b n'ont aucun diviseur commun supérieur à 1. Sachant que b et a ont une différence de 15 et que $\frac{5}{9} < \frac{a}{b} < \frac{4}{7}$, quelle est la valeur de $\frac{a}{b}$?

(b) On considère une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 10.
On considère une suite arithmétique de raison d et de premier terme 10.
Le rapport du 6^{e} terme de la suite géométrique au 4^{e} terme de la suite géométrique est égal au rapport du 6^{e} terme de la suite arithmétique au 4^{e} terme de la suite arithmétique.
Déterminer toutes les valeurs possibles de d.

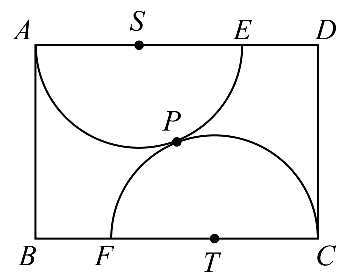
(Une *suite arithmétique* est une suite dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en ajoutant au terme précédent une constante appelée *raison*. Par exemple, $3, 5, 7$ et 9 sont les quatre premiers termes d'une suite arithmétique.
Une *suite géométrique* est une suite dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en multipliant le terme précédent par une constante non nulle appelée *raison*. Par exemple, $3, 6$ et 12 est une suite géométrique de trois termes.)

5. (a) Pour chaque nombre réel positif x, on définit $f(x)$ comme étant le nombre de nombres premiers p qui vérifient $x \leq p \leq x+10$. Quelle est la valeur de $f(f(20))$?

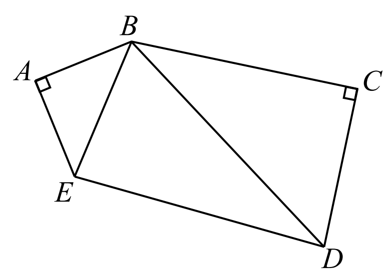
(b) Déterminer tous les triplets (x, y, z) de nombres réels qui vérifient le système d'équations :

$$\begin{aligned} (x-1)(y-2) &= 0 \\ (x-3)(z+2) &= 0 \\ x + yz &= 9 \end{aligned}$$

6. (a) Dans la figure ci-contre, le rectangle $ABCD$ est tel que $AB = 4$ et $BC = 6$. Le demi-cercle de diamètre AE a pour centre S et le demi-cercle de diamètre FC a pour centre T. Les deux demi-cercles, de centres S et T, ont chacun un rayon de r et se touchent en un seul point, P. Quelle est la valeur de r ?



(b) Dans la figure ci-contre, le triangle ABE est rectangle en A et le triangle BCD est rectangle en C. De plus, $\angle ABC = 135°$ et $AB = AE = 7\sqrt{2}$. Soit $DC = 4x$, $DB = 8x$ et $DE = 8x - 6$, x étant un nombre réel quelconque. Déterminer toutes les valeurs possibles de x.



7. (a) Soit g une fonction qui vérifie $g(x) = 2x - 4$ pour tout nombre réel x et soit g^{-1} la fonction réciproque de g. Soit f une fonction qui vérifie l'équation $g(f(g^{-1}(x))) = 2x^2 + 16x + 26$ pour tout nombre réel x. Quelle est la valeur de $f(\pi)$?

(b) Déterminer tous les couples d'angles (x, y) tels que $0° \leq x < 180°$ et $0° \leq y < 180°$ qui vérifient le système d'équations :

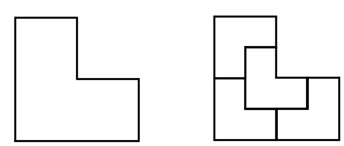
$$\log_2(\sin x \cos y) = -\frac{3}{2}$$

$$\log_2\left(\frac{\sin x}{\cos y}\right) = \frac{1}{2}$$

8. (a) Quatre joueurs de tennis, Alain, Bianca, Chen et Dave, participent à un tournoi dans lequel on joue un total de trois matchs. Tout d'abord, on choisit au hasard deux joueurs afin qu'ils s'affrontent lors d'un premier match. Les deux autres joueurs s'affrontent également lors d'un deuxième match. Les vainqueurs des deux premiers matchs s'affronteront lors d'un troisième match pour le titre de champion du tournoi. Alain, Bianca et Chen sont tous les trois des joueurs de même niveau (c.-à-d. chacun d'eux a une même probabilité de victoire contre chacun des deux autres joueurs lors d'un match, soit une probabilité de $\frac{1}{2}$). Lorsque Dave affronte chacun des trois autres joueurs, sa probabilité de victoire est égale à p, p étant un nombre réel quelconque. Déterminer la probabilité que Bianca gagne le titre de champion du tournoi. Exprimer la réponse sous la forme $\dfrac{ap^2+bp+c}{d}$, a, b, c et d étant des entiers.

(b) On aligne les microphones A, B et C en ligne droite de manière que A soit situé à 1 km à l'ouest de B et que C soit situé à 2 km à l'est de B. Une grande explosion se produit à un point P, ce dernier n'étant pas situé sur cette ligne. Le son voyage à une vitesse de $\frac{1}{3}$ km/s et a été capté par chacun des trois microphones. Le microphone B est le premier à capter le son. Le microphone A capte le son $\frac{1}{2}$ s après le microphone B tandis que le microphone C le capte 1 s après le microphone A. Déterminer la distance entre le microphone B et le point P.

9. (a) Dans la figure ci-contre, on crée une forme L à l'aide de trois carrés isométriques attenants. On subdivise ensuite la forme L en quatre L plus petits. Ensuite, chacun de ces L résultants est subdivisé de la même manière. Après qu'il y ait eu trois subdivisions, combien de L de la plus petite taille y a-t-il ?



Le L d'origine | Après la 1ère subdivision

(b) Après la troisième subdivision, combien de L de la plus petite taille sont orientés de la même manière que le L d'origine ?

(c) On effectue 2020 subdivisions en commençant par la forme L d'origine. Déterminer combien de L de la plus petite taille sont orientés de la même manière que le L d'origine.

10. Kerry a une liste de n entiers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dont l'arrangement est tel que $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$. Kerry calcule la somme des entiers de chacun des $m = \frac{1}{2}n(n-1)$ couples possibles d'entiers dans sa liste. Ensuite, elle arrange les sommes telles que $s_1 \le s_2 \le \ldots \le s_m$. Par exemple, si la liste de Kerry est composée des trois entiers $1, 2$ et 4, il y a trois couples possibles d'entiers et donc trois sommes possibles, soit $3, 5$ et 6.

(a) Soit $n = 4$ et soit $s_1 = 8$, $s_2 = 104$, $s_3 = 106$, $s_4 = 110$, $s_5 = 112$ et $s_6 = 208$ la liste des 6 sommes des entiers de chacun des couples possibles d'entiers. Déterminer deux listes a_1, a_2, a_3, a_4 possibles.

(b) Soit $n = 5$ et soit $s_1, s_2, \ldots, s_{10}$ la liste des 10 sommes des entiers de chacun des couples possibles d'entiers. Démontrer qu'il n'y a qu'une seule liste a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 possible.

(c) Soit $n = 16$. Démontrer qu'il y a deux listes différentes, soit la liste $a_1, a_2, \ldots, a_{16}$ et la liste $b_1, b_2, \ldots, b_{16}$, qui auront la même liste de sommes $s_1, s_2, \ldots, s_{120}$.

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Euclide de 2020! Chaque année, plus de 260 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Si vous terminez l'école secondaire, nous vous souhaitons bon succès. Si vous retournez à l'école secondaire l'an prochain, encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2020.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
— des copies gratuites des concours précédents
— des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
— des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
— obtenir des renseignements au sujet des concours de 2020/2021
— jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne
— vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
— vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
— vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
— trouver les résultats de vos élèves dans les coucours