Le CENTRE d'ÉDUCATION

en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Cayley 2020

(10e année – Secondaire IV)

le mardi 25 février 2020

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 26 février 2020

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On simplifie pour obtenir, $\dfrac{20-20}{20+20}=\dfrac{0}{40}=0$.

Réponse : (A)

2. Lorsque $x=3$ et $y=4$, on a $xy-x=3\times 4-3=12-3=9$.
Par ailleurs, $xy-x=x(y-1)=3\times 3=9$.

Réponse : (D)

3. Puisque $OPQR$ est un rectangle dont deux côtés sont situés sur les axes, ses côtés sont donc verticaux et horizontaux.
Puisque PQ est horizontal, Q et P ont la même ordonnée, soit 3.
Puisque QR est vertical, Q et R ont la même abscisse, soit 5.
Donc, les coordonnées de Q sont $(5,3)$.

Réponse : (B)

4. Si $0<a<20$, alors $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{20}$. Donc, $\dfrac{1}{15}>\dfrac{1}{20}$ et $\dfrac{1}{10}>\dfrac{1}{20}$.
De plus, $\dfrac{1}{20}=0{,}05$. Ce dernier est inférieur à 0,5 et à 0,055.
Enfin, $\dfrac{1}{20}>\dfrac{1}{25}$ puisque $0<20<25$.
Donc, parmi les choix de réponse, $\dfrac{1}{25}$ est le seul qui est inférieur à $\dfrac{1}{20}$.

Réponse : (B)

5. Puisque QST est un angle plat, alors $\angle QSP=180^\circ-\angle TSP=180^\circ-50^\circ=130^\circ$.
De plus, l'angle RQS est un angle extérieur du triangle QSP.
Cela signifie que $\angle RQS=\angle QSP+\angle SPQ$.
Sachant cela, $150^\circ=130^\circ+x^\circ$, d'où $x=150-130=20$.
(Pair ailleurs, on aurait pu remarquer que les angles RQS et SQP sont supplémentaires et on aurait pu utiliser la sommes des angles du triangle QSP.)

Réponse : (E)

6. Selon le graphique, Mathilde a vu 6 chardonnerets, 9 moineaux et 5 quiscales.
En tout, elle a vu $6+9+5=20$ oiseaux.
Donc, le pourcentage des oiseaux qui étaient des chardonnerets est égal à

$$\frac{6}{20}\times 100\ \%=\frac{3}{10}\times 100\ \%=30\ \%$$

Réponse : (C)

7. Puisque m et n ont une moyenne de 5, alors $\dfrac{m+n}{2}=5$, d'où $m+n=10$.
Afin que n soit aussi grand que possible, m doit être aussi petit que possible.
Puisque m et n sont des entiers strictement positifs, alors 1 est la plus petite valeur possible de m, d'où $n=10-m=10-1=9$ serait donc la plus grande valeur possible de n.

Réponse : (C)

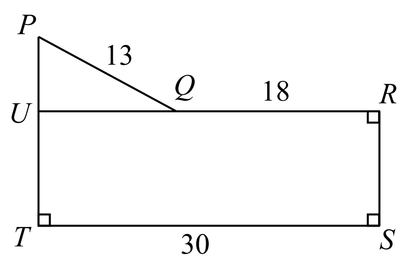
8. On détermine 30 % du prix de Roman : 200 \$ × 30 % = 200 \$ × $\frac{30}{100}$ = 2 \$ × 30 = 60 \$.
Après que Roman ait donné 60 \$ à Jackie, il ne lui reste que 200 \$ − 60 \$ = 140 \$.
Il partage 15 % de ce montant en parts égales entre Dale et Natalia, soit 140 \$ × 15 % ou 140 \$ × 0,15 = 21 \$.
Puisque Roman partage 21 \$ en parts égales entre Dale et Natalia, Roman donne 21 \$ ÷ 2 ou 10,50 \$ à Dale.

Réponse : (A)

9. La 1^re^ rangée contient 0 carré ombré et 1 carré non ombré.
La 2^e^ rangée contient 1 carré ombré et 2 carrés non ombrés.
La 3^e^ rangée contient 2 carrés ombrés et 3 carrés non ombrés.
La 4^e^ rangée contient 3 carrés ombrés et 4 carrés non ombrés.
Étant donné que chaque rangée contient 2 carrés de plus que la rangée précédente et que les carrés de chaque rangée alternent entre non ombrés et ombrés, alors chaque rangée a exactement 1 carré ombré de plus que la rangée précédente.
Cela signifie qu'en passant de la 4^e^ rangée à la 2020^e^ rangée, on ajoute $2020 - 4 = 2016$ carrés ombrés.
Donc, la 2020^e^ rangée contient $3 + 2016 = 2019$ carrés ombrés.

Réponse : (D)

10. On prolonge RQ vers la gauche jusqu'à ce qu'il coupe PT en point U :



Puisque le quadrilatère $URST$ a trois angles droits, son quatrième angle doit aussi être droit. Le quadrilatère est donc un rectangle.
Donc, $UT = RS$ et $UR = TS = 30$.
Puisque $UR = 30$, alors $UQ = UR - QR = 30 - 18 = 12$.
Le triangle PQU est rectangle en U.
D'après le théorème de Pythagore, puisque $PU > 0$, on a

$$PU = \sqrt{PQ^2 - UQ^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$$

Puisque $PQRST$ a un périmètre de 82, alors $13 + 18 + RS + 30 + (UT + 5) = 82$.
Puisque $RS = UT$, alors $2 \times RS = 82 - 13 - 18 - 30 - 5 = 16$, d'où $RS = 8$.
Enfin, on peut calculer l'aire de $PQRST$ en le séparant en le triangle PQU et le rectangle $URST$.
L'aire du triangle PQU est égale à $\frac{1}{2} \times UQ \times PU = \frac{1}{2} \times 12 \times 5 = 30$.
L'aire du rectangle $URST$ est égale à $RS \times TS = 8 \times 30 = 240$.
Donc, le pentagone $PQRST$ a une aire de $30 + 240 = 270$.

Réponse : (E)

11. Puisque

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$$

donc

$$5 + 10 + 15 + \cdots + 40 + 45 = 5(1 + 2 + 3 + \cdots + 8 + 9) = 5(45) = 225$$

Réponse : (A)

12. Soit les entiers strictement positifs a, b et c la longueur, la largeur et la hauteur du prisme droit à base rectangulaire.
Puisque le prisme a un volume de 21, alors $abc = 21$.
On remarque que a, b et c sont chacun un diviseur positif de 21.
Les diviseurs positifs de 21 sont 1, 3, 7 et 21. De plus, on peut écrire 21 comme produit de trois entiers différents uniquement de la manière suivante : $1 \times 3 \times 7 = 21$.
Donc, la longueur, la largeur et la hauteur du prisme droit à base rectangulaire sont 1, 3, et 7, dans quelconque ordre.
Ils ont donc une somme de $1 + 3 + 7 = 11$.

Réponse : (A)

13. Puisque $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$, alors $8^{20} = (2^3)^{20} = 2^{3\times 20} = 2^{60}$.
Donc, si $2^n = 8^{20}$, alors $n = 60$.

Réponse : (B)

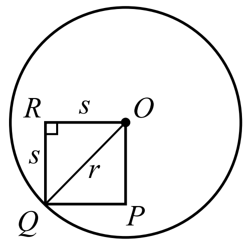
14. Puisque $3 \times 5 \times 7 = 105$, alors la plus grande valeur possible de n est *au moins* 105.
On remarque en particulier que la plus grande valeur possible de n doit être positive.
Afin que le produit de trois nombres soit positif, soit les trois nombres sont tous positifs (c'est-à-dire qu'aucun des nombres n'est négatif), soit un des nombres est positif tandis que les deux autres sont négatifs. (S'il y avait un nombre impair de facteurs négatifs, le produit serait négatif.)
Si les trois nombres sont tous positifs, le produit est aussi grand que possible lorsque les trois nombres sont tous aussi grands que possible. Dans ce cas, la plus grande valeur possible de n est $3 \times 5 \times 7 = 105$.
Si un des nombres est positif tandis que les deux autres sont négatifs, leur produit est aussi grand que possible lorsque le nombre positif est aussi grand que possible (7) et lorsque le produit des deux nombres négatifs est aussi grand que possible.
Le produit des deux nombres négatifs sera aussi grand que possible lorsque chacun des deux nombres est « aussi négatif que possible » (c'est-à-dire aussi éloigné de 0 que possible). Dans ce cas, ces nombres sont -4 et -6 dont le produit est $(-4) \times (-6) = 24$. (On peut vérifier les autres produits possibles de deux nombres négatifs afin de voir qu'aucun n'est aussi grand.)
Donc, la plus grande valeur possible de n dans ce cas est $7 \times (-4) \times (-6) = 7 \times 24 = 168$.
D'après les deux cas, on voit que 168 est la plus grande valeur possible de n.

Réponse : (A)

15. Puisque le rapport du nombre de billes vertes au nombre de billes jaunes au nombre de billes rouges est de $3 : 4 : 2$, soit $3n$, $4n$ and $2n$ respectivement les nombres de billes vertes, jaunes et rouges, n étant un entier strictement positif quelconque.
Puisque 63 des billes dans le sac ne sont pas rouges, alors la somme du nombre de billes vertes et du nombre de billes jaunes dans le sac est de 63.
Donc, $3n + 4n = 63$, d'où $7n = 63$ ou $n = 9$. Cela signifie qu'il y a $2n = 2 \times 9 = 18$ billes rouges dans le sac.

Réponse : (B)

16. Soit s la longueur des côtés du carré. Donc, $OR = RQ = s$.
Soit r le rayon du cercle. Donc, $OQ = r$ car O est le centre du cercle et Q est situé sur la circonférence du cercle.
Puisque chacun des sommets du carré est un angle droit, alors le triangle ORQ est rectangle en R.



D'après le théorème de Pythagore, $OR^2 + RQ^2 = OQ^2$, d'où $s^2 + s^2 = r^2$ ou $2s^2 = r^2$.
On peut exprimer l'aire du cercle en fonction de r, soit πr^2.
Sachant que l'aire du cercle est égale à 72π, alors $\pi r^2 = 72\pi$ ou $r^2 = 72$.
Puisque $2s^2 = r^2 = 72$, alors $s^2 = 36$.
Puisqu'on peut exprimer l'aire du carré en fonction de s, soit s^2, alors le carré a une aire de 36.

Réponse : (E)

17. Supposons que Carley ait acheté x boîtes de chocolats, y boîtes de bonbons à la menthe et z boîtes de bonbons caramélisés.
En tout, Carley aura $50x$ chocolats (puisque chaque boîte de chocolats contient 50 chocolats), $40y$ bonbons à la menthe (puisque chaque boîte de bonbons à la menthe contient 40 bonbons à la menthe) et $25z$ bonbons caramélisés (puisque chaque boîte de bonbons caramélisés contient 25 bonbons caramélisés).
Puisque Carley a utilisé tous les chocolats, tous les bonbons à la menthe et tous les bonbons caramélisé et n'a créé que des sacs de bonbons complets dont chacun contenait exactement 1 chocolat, 1 bonbon à la menthe et 1 bonbon caramélisé, donc $50x = 40y = 25z$.
On veut donc déterminer la plus petite valeur positive possible de $x + y + z$, x, y et z ayant des valeurs qui vérifient $50x = 40y = 25z$.
En divisant chacun des membres de l'équation $50x = 40y = 25z$ par un facteur commun de 5, on obtient $10x = 8y = 5z$.
Puisque $10x$ est un multiple de 10, que $8y$ est un multiple de 8 et que $10x = 8y$, on veut déterminer le nombre qui est à la fois le plus petit multiple de 10 et un multiple de 8.
Puisque 10, 20 et 30 ne sont pas des multiples de 8 et que 40 est un multiple de 8, alors la plus petite valeur possible de $10x$ semble être 40.
Dans ce cas, $x = 4$, $y = 5$ et $z = 8$ sont les plus petits entiers strictement positifs qui vérifient $10x = 8y = 5z = 40$.
Puisque x, y et z sont chacun aussi petit que possible, leur somme, $x+y+z$, est également aussi petite que possible.
Donc, Carley aurait pu acheter un minimum de $4 + 5 + 8 = 17$ boîtes en tout.

Réponse : (B)

18. *Solution 1*
Soit t le nombre d'heures dont aura besoin Nate afin d'arriver exactement à l'heure.
Lorsque Nate arrive 1 heure trop tôt, il a conduit pendant $t - 1$ heures.
Lorsque Nate arrive 1 heure trop tard, il a conduit pendant $t + 1$ heures.
Puisqu'il parcourt la même distance peu importe le cas, et qu'on obtient la distance en multipliant la vitesse par le temps, alors $(60 \text{ km/h}) \times ((t - 1) \text{ h}) = (40 \text{ km/h}) \times ((t + 1) \text{ h})$.

On a donc $60t - 60 = 40t + 40$, d'où $20t = 100$ ou $t = 5$.
Nate conduira donc une distance totale de $(60 \text{ km/h}) \times (4 \text{ h}) = 240$ km.
Puisque Nate doit parcourir 240 km en 5 heures, il devra donc conduire à une vitesse constante de $\dfrac{240 \text{ km}}{5 \text{ h}}$, soit 48 km/h.

Solution 2
Soit d la distance en kilomètres que Nate doit parcourir.
Puisque Nate arrive 1 heure en retard en conduisant à 40 km/h et 1 heure trop tôt en conduisant à 60 km/h, alors la différence entre les durées de temps à ces deux vitesses est de 2 heures.
Puisqu'on obtient le temps en divisant la distance par la vitesse, alors

$$\frac{d \text{ km}}{40 \text{ km/h}} - \frac{d \text{ km}}{60 \text{ km/h}} = 2 \text{ h}$$

En multipliant les deux membres de l'équation par 120 km/h on obtient

$$3d \text{ km} - 2d \text{ km} = 240 \text{ km}$$

d'où $d = 240$.
Donc, Nate parcourt une distance de 240 km.
À 40 km/h, Nate parcourt cette distance en 6 heures et arrive 1 heure en retard.
Il va devoir conduire pendant 5 heures afin d'arriver exactement à l'heure.
Puisque Nate doit parcourir 240 km en 5 heures, il devra donc conduire à une vitesse constante de $\dfrac{240 \text{ km}}{5 \text{ h}} = 48$ km/h.

Réponse : (D)

19. Pour chacune des 10 questions du test, chaque réponse juste vaut 5 points, chaque question laissée sans réponse vaut 1 point et chaque réponse fautive vaut 0 point.
Parmi les 10 questions du test, si l'on obtient 10 réponses justes, on obtient $10 \times 5 = 50$ points comme note finale.
Parmi les 10 questions du test, si l'on obtient 9 réponses justes, on a laissé soit 0 question sans réponse soit 1 question sans réponse. Donc, on obtient soit $9 \times 5 = 45$ points soit $9 \times 5 + 1 = 46$ points comme notes finales possibles.
Parmi les 10 questions du test, si l'on obtient 8 réponses justes, on a laissé soit 0, soit 1, soit 2 questions sans réponses. Donc, on obtient soit $8 \times 5 = 40$ points, soit $8 \times 5 + 1 = 41$ points, soit $8 \times 5 + 2 = 42$ points comme notes finales possibles.
Parmi les 10 questions du test, si l'on obtient 7 réponses justes, on a laissé soit 0, soit 1, soit 2, soit 3 questions sans réponses. Donc, on obtient soit 35, soit 36, soit 37, soit 38 points comme notes finales possibles.
Parmi les 10 questions du test, si l'on obtient 6 réponses justes, on a laissé soit 0, soit 1, soit 2, soit 3, soit 4 questions sans réponses. Donc, on obtient soit 30, soit 31, soit 32, soit 33, soit 34 points comme notes finales possibles.
Jusqu'ici, dans la fourchette des entiers de 30 à 50, on a les points suivants comme notes finales possibles :

$$30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 40, 41, 42, 45, 46, 50.$$

Donc,

$$39, 43, 44, 47, 48, 49$$

ne sont pas possibles.
Parmi les 10 questions du test, si l'on obtient 5 réponses justes ou moins, est-il possible d'obtenir

au moins 39 points comme note finale ?
Non, ce n'est pas possible car, dans ce cas, le nombre de réponses justes est au plus 5 et le nombre de questions laissées sans réponses est au plus 10 (ces deux ne peuvent se produire en même temps) d'où un maximum de $5 \times 5 + 10 = 35$ points.
Donc, dans la fourchette des entiers de 30 à 50, il y a exactement 6 entiers qui ne sont pas des notes finales possibles.

RÉPONSE : (D)

20. On peut déterminer quand $3^m + 7^n$ admet 10 comme diviseur en examinant les chiffres des unités de $3^m + 7^n$.
D'abord, on examine individuellement les chiffres des unités de 3^m et de 7^n.

Les chiffres des unités des puissances de 3 présentent une régularité : $3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, \ldots$
On voit cette régularité dans les quelques premières puissances de 3 :

$$3^1 = 3 \quad 3^2 = 9 \quad 3^3 = 27 \quad 3^4 = 81 \quad 3^5 = 243 \quad 3^6 = 729$$

Puisque le chiffre des unités d'un produit d'entiers dépend uniquement des chiffres des unités des entiers que l'on multiplie, et qu'on multiplie par 3 pour passer d'une puissance à la suivante, alors aussitôt qu'un chiffre des unités réapparait dans la suite des chiffres des unités, les chiffres des unités suivants vont présenter la même régularité.
Cela signifie que les chiffres des unités des puissances de 3 répéteront à chaque quatre puissances de 3.
Donc, des 100 puissances de 3 de la forme 3^m qui vérifient $1 \leq m \leq 100$, exactement 25 auront 3 comme chiffre des unités, exactement 25 auront 9 comme chiffre des unités, exactement 25 auront 7 comme chiffre des unités et exactement 25 auront 1 comme chiffre des unités.

Les chiffres des unités des puissances de 7 présentent une régularité : $7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, \ldots$
On voit cette régularité dans les quelques premières puissances de 7 :

$$7^1 = 7 \quad 7^2 = 49 \quad 7^3 = 343 \quad 7^4 = 2401 \quad 7^5 = 16\,807 \quad 7^6 = 117\,649$$

En utilisant le même argument que le précédent, on conclut que les chiffres des unités des puissances de 7 répéteront à chaque quatre puissances de 7.
Puisque 101 est 1 de plus qu'un multiple de 4, alors la puissance 7^{101} est le premier élément de l'un des groupes de quatre puissances de 7 dont est composée la régularité. Donc, 7^{101} a 7 comme chiffre des unités.
Donc, des 105 puissances de 7 de la forme 7^n qui vérifient $101 \leq n \leq 205$, exactement 27 auront 7 comme chiffre des unités, exactement 26 auront 9 comme chiffre des unités, exactement 26 auront 3 comme chiffre des unités et exactement 26 auront 1 comme chiffre des unités. (Dans ce cas, 105 puissances de 7 comprennent 26 groupes de quatre puissances chacun ainsi qu'un terme supplémentaire.)

Pour que $3^m + 7^n$ ait 0 comme chiffre des unités (afin d'admettre 10 comme diviseur), un des énoncés suivants doit être vrai :

- 3^m a 3 comme chiffre des unités (25 valeurs possibles de m) et 7^n a 7 comme chiffre des unités (27 valeurs possibles de n) ou
- 3^m a 9 comme chiffre des unités (25 valeurs possibles de m) et 7^n a 1 comme chiffre des unités (26 valeurs possibles de n) ou
- 3^m a 7 comme chiffre des unités (25 valeurs possibles de m) et 7^n a 3 comme chiffre des unités (26 valeurs possibles de n) ou

- 3^m a 1 comme chiffre des unités (25 valeurs possibles de m) et 7^n a 9 comme chiffre des unités (26 valeurs possibles de n).

On a donc

$$27 \times 25 + 26 \times 25 + 26 \times 25 + 26 \times 25 = 25 \times (27 + 26 + 26 + 25) = 25 \times 105 = 2625$$

couples (m, n) possibles.

Réponse : (E)

21. Afin de déterminer le nombre de points (x, y) qui sont situés et sur la droite d'équation $y = 4x+3$ et dans la région bornée par les droites d'équations $x = 25$, $x = 75$, $y = 120$ et $y = 250$, on détermine le nombre d'entiers x ($25 \leq x \leq 75$) tels que $y = 4x + 3$ soit un entier situé entre 120 et 250.
Autrement dit, on détermine le nombre d'entiers x ($25 \leq x \leq 75$) tels que $120 \leq 4x + 3 \leq 250$ est un entier.
On remarque qu'au fur et à mesure que x croit, la valeur de l'expression $4x + 3$ croit aussi.
De plus, lorsque $x = 29$, on a $4x + 3 = 119$ et lorsque $x = 30$, on a $4x + 3 = 123$.
De surcroit, lorsque $x = 61$, on a $4x + 3 = 247$ et lorsque $x = 62$, on a $4x + 3 = 251$.
Donc, $4x + 3$ est situé entre 120 et 250 uniquement lorsque $30 \leq x \leq 61$.
Il y a $61 - 30 + 1 = 32$ telles valeurs de x. Donc 32 points remplissent les conditions données.

Réponse : (D)

22. Puisque $PT = 1$ et $TQ = 4$, alors $PQ = PT + TQ = 1 + 4 = 5$.
Le triangle PSQ est rectangle en S et a pour hypoténuse PQ.
D'après le théorème de Pythagore, $PS^2 = PQ^2 - QS^2 = 5^2 - 3^2 = 16$.
Puisque $PS > 0$, alors $PS = 4$.
On considère les triangles PSQ et RTQ.
Chacun est un triangle rectangle et les deux ont le sommet Q en commun. Donc, PSQ et RTQ sont des triangles semblables.
On a donc $\dfrac{PQ}{QS} = \dfrac{QR}{TQ}$.
À l'aide des longueurs données, $\dfrac{5}{3} = \dfrac{QR}{4}$, d'où $QR = \dfrac{4 \cdot 5}{3} = \dfrac{20}{3}$.
Enfin, $SR = QR - QS = \dfrac{20}{3} - 3 = \dfrac{11}{3}$.

Réponse : (B)

23. Soit N un entier qui remplit les conditions de l'énoncé.
Le premier chiffre de N doit être 1 car il doit toujours y avoir au moins un 1 avant le premier 2, au moins un 2 avant le premier 3 et au moins un 3 avant le 4. Donc, on ne peut pas avoir un 2, un 3 ou un 4 avant le premier 1.
Puisque N contient trois 1, alors N peut avoir pour premiers chiffres 1, 11 ou 111.
Le premier chiffre de N qui n'est pas un 1 doit être un 2.
Donc, N peut avoir pour premiers chiffres 12, 112 ou 1112.

1$^{\text{er}}$ cas : N a pour premiers chiffres 12
Puisqu'aucun 2 ne peut être adjacent à un autre 2, on doit déterminer les emplacements possibles des deux 2 restants.
De gauche à droite, les deux 2 pourraient occuper les positions 4 et 6, 4 et 7, 4 et 8, 4 et 9, 5 et 7, 5 et 8, 5 et 9, 6 et 8, 6 et 9, ou 7 et 9.
Autrement dit, il y a 10 couples de positions possibles que les deux 2 pourraient occuper.
Une fois qu'on ait placé les deux 2, il reste 5 positions inoccupées.
Ensuite, on doit déterminer les emplacements possibles des deux 1 restants.
En représentant ces 5 positions par A, B, C, D, E, on voit qu'il y a 10 couples de positions possibles que les deux 1 pourraient occuper : A et B, A et C, A et D, A et E, B et C, B et D, B et E, C et D, C et E, ou D et E.
Une fois qu'on ait placé les deux 1, il reste 3 positions inoccupées dans lesquelles on peut placer les deux 3 et le 4. De gauche à droite, un 3 doit être placé dans la première position inoccupée car il doit y avoir au moins un 3 avant le 4.
On peut placer les deux chiffres restants (3 et 4) dans quelconque ordre dans les 2 positions inoccupées restantes ; soit dans l'ordre 3 et ensuite 4, soit dans l'ordre 4 et ensuite 3.
Dans ce cas, il y a $10 \times 10 \times 2 = 200$ entiers N possibles.

2$^{\text{e}}$ cas : N a pour premiers chiffres 112
Puisqu'aucun 2 ne peut être adjacent à un autre 2, on doit déterminer les emplacements possibles des deux 2 restants.
De gauche à droite, les deux 2 pourraient occuper les positions 5 et 7, 5 et 8, 5 et 9, 6 et 8, 6 et 9, ou 7 et 9.
Autrement dit, il y a 6 couples de positions possibles que les deux 2 pourraient occuper.
Une fois qu'on ait placé les deux 2, il reste 4 positions inoccupées.
Ensuite, on doit déterminer les emplacements possibles du 1 restant. Il y a 4 positions possibles que le 1 pourrait occuper.
Une fois qu'on ait placé le 1, il reste 3 positions inoccupées dans lesquelles on peut placer les deux 3 et le 4. De gauche à droite, un 3 doit être placé dans la première position inoccupée car il doit y avoir au moins un 3 avant le 4.
On peut placer les deux chiffres restants (3 et 4) dans quelconque ordre dans les 2 positions inoccupées restantes ; soit dans l'ordre 3 et ensuite 4, soit dans l'ordre 4 et ensuite 3.
Dans ce cas, il y a $6 \times 4 \times 2 = 48$ entiers N possibles.

3$^{\text{e}}$ cas : N a pour premiers chiffres 1112
Puisqu'aucun 2 ne peut être adjacent à un autre 2, on doit déterminer les emplacements possibles des deux 2 restants.
De gauche à droite, les deux 2 pourraient occuper les positions 6 et 8, 6 et 9, ou 7 et 9.
Autrement dit, il y a 3 couples de positions possibles que les deux 2 pourraient occuper.
Une fois qu'on ait placé les deux 2, il reste 3 positions inoccupées dans lesquelles on peut placer les deux 3 et le 4.
De gauche à droite, un 3 doit être placé dans la première position inoccupée car il doit y avoir

au moins un 3 avant le 4.
On peut placer les deux chiffres restants (3 et 4) dans quelconque ordre dans les 2 positions inoccupées restantes ; soit dans l'ordre 3 et ensuite 4, soit dans l'ordre 4 et ensuite 3.
Dans ce cas, il y a $3 \times 2 = 6$ entiers N possibles.

En rassemblant les trois cas, on a $200 + 48 + 6 = 254$ entiers N possibles.

Réponse : (C)

24. Soit $GP = x$.
Puisque le cube a des arêtes de longueur 200, alors $HP = 200 - x$.
On considère le tétraèdre (c'est-à-dire une pyramide à base triangulaire) $FGMP$ dont on calcule le volume de deux manières différentes.
Le volume d'un tétraèdre est égal au tiers du produit de l'aire de sa base triangulaire et sa hauteur.
D'abord, on considère que le tétraèdre $FGMP$ a pour base le triangle FGM et pour hauteur GP.
Le triangle FGM est rectangle en G et a $FG = GM = 200$. Le triangle a donc une aire égale à $\frac{1}{2} \times FG \times GM$, soit $\frac{1}{2} \times 200 \times 200$ ou 20 000.
Donc, $FGMP$ a un volume égal à $\frac{1}{3} \times 20\,000 \times x$.

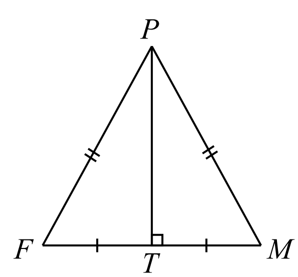
Ensuite, on considère que le tétraèdre $FGMP$ a pour base le triangle PFM.
D'après l'énoncé du problème, 100 est la plus courte distance du point G à un point situé à l'intérieur du triangle PFM. Cela signifie que le tétraèdre $FGMP$ qui a pour base le triangle PFM a une hauteur de 100.
On doit calculer l'aire du triangle PFM.
Puisque le triangle FGM est rectangle en G et que $FM > 0$, alors d'après le théorème de Pythagore,

$$FM = \sqrt{FG^2 + GM^2} = \sqrt{200^2 + 200^2} = \sqrt{200^2 \times 2} = 200\sqrt{2}$$

Puisque le triangle FGP est rectangle en G et que $FP > 0$, alors d'après le théorème de Pythagore,

$$FP = \sqrt{FG^2 + GP^2} = \sqrt{200^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + 40\,000}$$

De même, $MP = \sqrt{x^2 + 40\,000}$.
Cela signifie que le triangle PFM est isocèle ($FP = MP$).
Soit T le milieu de FM.
Donc $FT = TM = 100\sqrt{2}$.
Puisque le triangle PFM est isocèle, alors PT et FM sont perpendiculaires.



D'après le théorème de Pythagore,

$$PT = \sqrt{FP^2 - FT^2} = \sqrt{\left(\sqrt{x^2 + 40\,000}\right)^2 - \left(100\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + 40\,000 - 20\,000} = \sqrt{x^2 + 20\,000}$$

Donc, le triangle PFM a une aire égale à $\frac{1}{2} \times FM \times PT$, soit $\frac{1}{2} \times 200\sqrt{2} \times \sqrt{x^2 + 20\,000}$.
Cela signifie que le tétraèdre $FGMP$ a un volume égal à

$$\tfrac{1}{3} \times \left(\tfrac{1}{2} \times 200\sqrt{2} \times \sqrt{x^2 + 20\,000}\right) \times 100$$

On égalise les deux expressions qui représentent le volume de $FGMP$ et on isole x dans l'équation qui en résulte :

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{3} \times 20\,000 \times x &= \tfrac{1}{3} \times \left(\tfrac{1}{2} \times 200\sqrt{2} \times \sqrt{x^2 + 20\,000}\right) \times 100 \\
20\,000 \times x &= \left(\tfrac{1}{2} \times 200\sqrt{2} \times \sqrt{x^2 + 20\,000}\right) \times 100 \\
x &= \tfrac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{x^2 + 20\,000} \\
2x &= \sqrt{2} \times \sqrt{x^2 + 20\,000} \\
4x^2 &= 2(x^2 + 20\,000) \\
2x^2 &= 40\,000 \\
x^2 &= 20\,000
\end{aligned}$$

Puisque $x > 0$, alors $x = \sqrt{20\,000} = \sqrt{10\,000 \times 2} = \sqrt{100^2 \times 2} = 100\sqrt{2}$.
Cela signifie que $HP = 200 - x = 200 - 100\sqrt{2} \approx 58{,}58$.
Le choix de réponse le plus près est 59, soit le choix (D).

Réponse : (D)

25. Étant donné un entier strictement positif N exprimé en factorisation première $N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$, $p_1, p_2, \ldots, p_k$ étant des nombres premiers et $a_1, a_2, \ldots, a_k$ étant des entiers strictement positifs, on sait que N admet exactement $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_k + 1)$ diviseurs positifs.

Ce résultat est basé sur les faits suivants :

F1. Le « théorème fondamental de l'arithmétique » s'énonce ainsi : Tout entier strictement positif supérieur à 1 peut être écrit comme un produit de nombres premiers d'une unique façon. (Si l'entier strictement positif est lui-même premier, ce produit n'est constitué que du nombre premier.) On voit ce théorème de manière implicite lorsqu'on crée l'arbre de facteurs pour un entier quelconque. Par exemple, 1500 est égal à $2^2 \times 3^1 \times 5^3$ et il n'existe aucune autre factorisation de 1500 sous forme de produits de nombres premiers. De plus, la factorisation première d'un nombre demeure inchangée même si l'on réorganise ses facteurs premiers dans un ordre différent.

F2. Si n est un entier strictement positif et d est un entier strictement positif qui est un diviseur de n, alors les seuls facteurs premiers possibles de d sont ceux de n. Par exemple, si d est un diviseur positif de $n = 1500$, alors les seuls facteurs premiers possibles de d sont 2, 3 et 5. Cela signifie, par exemple, que d n'est pas divisible par 7, par 11 ou par tout autre nombre premier qui n'est pas 2, 3 ou 5. d peut ou non être divisible par chacun des suivants : 2, 3 ou 5.

F3. Si n est un entier strictement positif, d est un entier strictement positif qui est un diviseur de n, et p est un facteur premier de n et de d, alors p ne peut diviser d « plus de fois » qu'il ne divise n. Par exemple, si d est un diviseur positif de $n = 1500 = 2^2 \times 3^1 \times 5^3$ qui est divisible par 5, alors d peut être divisible par 5 ou par 5^2 ou par 5^3 mais ne peut pas être divisible par 5^4 ou par 5^5 ou par quelconque puissance de 5 qui serait supérieure à ces derniers.

D'après ces faits, les diviseurs positifs de $N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ sont les entiers de la forme

$$d = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_k^{b_k}$$

$b_1, b_2, \ldots, b_k$ étant des entiers non négatifs ($0 \leq b_1 \leq a_1$, $0 \leq b_2 \leq a_2$ et ainsi de suite).
Cela signifie qu'il y a $a_1 + 1$ valeurs possibles de b_1, soit $0, 1, 2, \ldots, a_1$.
De même, il y a $a_2 + 1$ valeurs possibles de b_2, $a_3 + 1$ valeurs possibles de b_3 et ainsi de suite.
Puisqu'on a un diviseur d différent pour chacune des combinaisons de ces valeurs possibles, alors il y a $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_k + 1)$ diviseurs positifs.

Soit $2^r 5^s p_3^{a_3} p_4^{a_4} \cdots p_k^{a_k}$ la factorisation première de n, $p_3, p_4, \ldots, p_k$ étant des nombres premiers dont aucun n'est égal à 2 ou à 5, $a_3, a_4, \ldots, a_k$ étant des entiers strictement positifs et r et s étant des entiers non négatifs quelconques.
On a exprimé n de cette manière afin de nous permettre de porter une attention particulière aux facteurs premiers possibles de 2 et 5.
Cela signifie que

$$2n = 2^{r+1} 5^s p_3^{a_3} p_4^{a_4} \cdots p_k^{a_k}$$
$$5n = 2^r 5^{s+1} p_3^{a_3} p_4^{a_4} \cdots p_k^{a_k}$$

Puisque $2n$ admet 64 diviseurs positifs et $5n$ admet 60 diviseurs positifs, alors

$$(r + 2)(s + 1)(a_3 + 1)(a_4 + 1) \cdots (a_k + 1) = 64$$
$$(r + 1)(s + 2)(a_3 + 1)(a_4 + 1) \cdots (a_k + 1) = 60$$

Puisque chacun des facteurs dans les deux membres de gauche est un entier strictement positif, alors 64 et 60 admettent

$$(a_3 + 1)(a_4 + 1) \cdots (a_k + 1)$$

comme diviseur positif commun.
Les diviseurs positifs de 64 sont 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64.
Parmi ces derniers, seuls 1, 2 et 4 sont des diviseurs de 60.
Donc, $(a_3 + 1)(a_4 + 1) \cdots (a_k + 1)$ est égal à 1, à 2 ou à 4.
Puisque chacun de $a_3, a_4, \ldots, a_k$ est un entier strictement positif, alors chacun de $a_3 + 1$, $a_4 + 1$, $\ldots$, $a_k + 1$ est au moins égal à 2.

1^er^ cas : $(a_3 + 1)(a_4 + 1) \cdots (a_k + 1) = 4$
On peut exprimer 4 sous la forme d'un produit d'entiers strictement positifs (chacun d'au moins 2) des manières suivantes : 2×2 et 4 (un entier a lui-même comme produit).
Donc, soit $k = 4$ avec $a_3 + 1 = a_4 + 1 = 2$ (d'où $a_3 = a_4 = 1$), soit $k = 3$ avec $a_3 + 1 = 4$ (d'où $a_3 = 3$).
Puisque

$$(r + 2)(s + 1)(a_3 + 1)(a_4 + 1) \cdots (a_k + 1) = 64$$
$$(r + 1)(s + 2)(a_3 + 1)(a_4 + 1) \cdots (a_k + 1) = 60$$

alors en simplifiant on obtient

$$(r + 2)(s + 1) = 16$$
$$(r + 1)(s + 2) = 15$$

Lorsqu'on développe les membres de gauche des deux équations, on obtient

$$rs + r + 2s + 2 = 16$$
$$rs + 2r + s + 2 = 15$$

On soustrait la seconde équation de la première pour obtenir $-r + s = 1$, d'où $s = r + 1$, que l'on pose dans $(r + 2)(s + 1) = 16$ pour obtenir $(r + 2)(r + 2) = 16$.
Puisque $r > 0$, alors $(r + 2)^2 = 16$, d'où $r + 2 = 4$ ou $r = 2$. On a donc $s = 3$.
Donc, on pourrait avoir $r = 2$, $s = 3$.

Donc, en prenant en compte les valeurs possibles de a_3 et de a_4, cela signifie qu'on peut avoir $n = 2^2 5^3 p_3 p_4$, p_3 et p_4 étant des nombres premiers autres que 2 et 5, ou $n = 2^2 5^3 p_3^3$, p_3 étant un nombre premier autre que 2 ou 5.
On peut vérifier que $2n$ et $5n$ ont le bon nombre de diviseurs positifs dans chaque cas.

2^e^ cas : $(a_3 + 1)(a_4 + 1) \cdots (a_k + 1) = 2$

On peut exprimer 2 sous la forme d'un produit d'entiers strictement positifs (chacun d'au moins 2) d'une seule manière : 2.
Donc, $k = 3$ avec $a_3 + 1 = 2$ (d'où $a_3 = 1$).
Puisque

$$(r + 2)(s + 1)(a_3 + 1)(a_4 + 1) \cdots (a_k + 1) = 64$$
$$(r + 1)(s + 2)(a_3 + 1)(a_4 + 1) \cdots (a_k + 1) = 60$$

alors

$$(r + 2)(s + 1) = 32$$
$$(r + 1)(s + 2) = 30$$

On pourrait procéder comme dans le 1^er^ cas.
Par ailleurs, sachant que r et s sont des entiers non négatifs, alors les possibilités de la première équation sont :

$r+2$	$s+1$	r	s	$r+1$	$s+2$	$(r+2)(s+1)$
32	1	30	0	31	2	62
16	2	14	1	15	3	45
8	4	6	3	7	5	35
4	8	2	7	3	9	27
2	16	0	15	1	17	17
1	32	-1	31	0	33	0

Dans ce cas, aucun couple de valeurs r et s ne vérifie les deux équations.

3^e^ cas : $(a_3 + 1)(a_4 + 1) \cdots (a_k + 1) = 1$

Puisque chaque facteur dans le membre de gauche est au moins égal à 2, qu'est-ce que cela peut signifier ? Cela signifie qu'il n'y a aucun facteur dans le membre de gauche. Autrement dit, $k = 2$ et $n = 2^r 5^s$.
(Essayez de suivre l'argument avant le 1^er^ cas pour vérifier qu'il n'y a pas de contradictions.)
Dans ce cas,

$$(r + 2)(s + 1) = 64$$
$$(r + 1)(s + 2) = 60$$

Sachant que r et s sont des entiers non négatifs, alors les possibilités de la première équation sont :

$r+2$	$s+1$	r	s	$r+1$	$s+2$	$(r+2)(s+1)$
64	1	62	0	63	2	126
32	2	30	1	31	3	93
16	4	14	3	15	5	45
8	8	6	7	7	9	63
4	16	2	13	3	15	51
2	32	0	31	1	33	33
1	64	-1	63	0	65	0

Dans ce cas, aucun couple de valeurs r et s ne vérifie les deux équations.

Donc, en rassemblant les résultats des trois cas, l'entier strictement positif n remplit les conditions données lorsque

- $n = 2^2 5^3 p_3 p_4 = 500 p_3 p_4$, p_3 et p_4 étant des nombres premiers autres que 2 et 5 ou
- $n = 2^2 5^3 p_3^3 = 500 p_3^3$, p_3 étant un nombre premier autre que 2 et 5.

Puisque $n \leq 20\,000$, donc

- ou $500 p_3 p_4 \leq 20\,000$, d'où $p_3 p_4 \leq 40$,
- ou $500 p_3^3 \leq 20\,000$, d'où $p_3^3 \leq 40$.

Il reste encore à déterminer le nombre de couples p_3 et p_4 (p_3 et p_4 étant des nombres premiers autres que 2 et 5) dont le produit est inférieur à 40 et le nombre de nombres premiers p_3 (p_3 étant un nombre premier autre que 2 et 5) dont le cube est inférieur à 40.
Dans le premier cas, les possibilités sont :

$$3 \times 7 = 21 \qquad 3 \times 11 = 33 \qquad 3 \times 13 = 39$$

L'ordre dans lequel on place p_3 et p_4 n'a pas d'importance car peu importe l'ordre, on obtiendra toujours la même valeur de n. On remarque par ailleurs que p_3 et p_4 ne peuvent tous les deux être supérieurs ou égaux à 7 tout en ayant un produit inférieur ou égal à 40.
Dans le deuxième cas, la seule possibilité est $p_3^3 = 3^3$.

Donc, il y a 4 valeurs possibles de n qui remplissent les conditions données.

Réponse : (A)