



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Cayley

(10^e année – Sec. IV)

le mardi 25 février 2020

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 26 février 2020

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)



UNIVERSITY OF
WATERLOO

Durée: 60 minutes

©2020 University of Waterloo

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Directives

1. Attendez le signal du surveillant ou de la surveillante avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponses. Au besoin, demandez à l'enseignante ou à l'enseignant d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur droite de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école et le nom de la ville.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats admissibles.**
6. Le concours est composé de questions à choix multiple. Chaque question est suivie de cinq choix de réponse, notés **A, B, C, D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. Notation: Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C.
Une réponse fautive n'est *pas* pénalisée.
Chaque question laissée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 10 questions.
8. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui visuel seulement.
9. Après le signal du surveillant ou de la surveillante, vous aurez 60 minutes pour terminer.
10. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Pascal, Cayley ou Fermat.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

Notation: Une réponse fautive *n'est pas pénalisée*.

On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 10 questions.

Partie A (5 points par bonne réponse)

1. Quelle est la valeur de $\frac{20 - 20}{20 + 20}$?

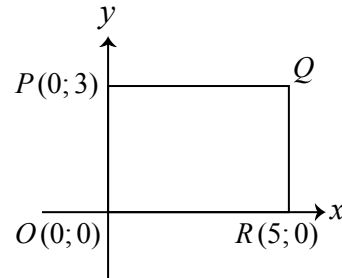
- (A) 0 (B) 1 (C) 10 (D) -2 (E) 2

2. Si $x = 3$ et $y = 4$, quelle est la valeur de $xy - x$?

- (A) 3 (B) 4 (C) 12 (D) 9 (E) 15

3. Dans la figure ci-contre, les points $O(0;0)$, $P(0;3)$, Q et $R(5;0)$ forment un rectangle. Quelles sont les coordonnées du point Q ?

- (A) (5;5) (B) (5;3) (C) (3;3)
(D) (2,5;1,5) (E) (0;5)

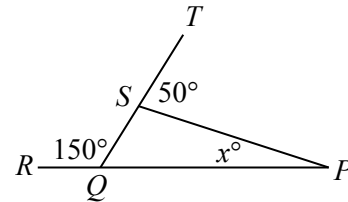


4. Lequel des nombres suivants est inférieur à $\frac{1}{20}$?

- (A) $\frac{1}{15}$ (B) $\frac{1}{25}$ (C) 0,5 (D) 0,055 (E) $\frac{1}{10}$

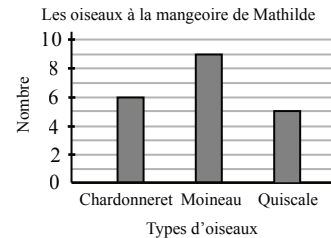
5. Dans la figure ci-contre, le point Q est situé sur PR et le point S est situé sur QT . Quelle est la valeur de x ?

- (A) 10 (B) 30 (C) 50
(D) 40 (E) 20



6. Mathilde a récolté des données quant aux nombres et aux types d'oiseaux qui ont été attirés par sa mangeoire. Elle a représenté ses données dans le graphique ci-contre. Quel pourcentage des oiseaux étaient des chardonnerets ?

- (A) 15 % (B) 20 % (C) 30 %
(D) 45 % (E) 60 %



7. Deux entiers strictement positifs, soit m et n , ont une moyenne de 5. Quelle est la plus grande valeur possible de n ?

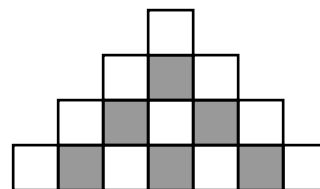
- (A) 5 (B) 7 (C) 9 (D) 11 (E) 13

8. Roman gagne un prix de 200 \$ lors d'un concours. Il donne 30 % de son prix à Jackie. Il partage ensuite 15 % du montant qui reste en parts égales entre Dale et Natalia. Combien d'argent Roman donne-t-il à Dale ?

- (A) 10,50 \$ (B) 15,00 \$ (C) 4,50 \$ (D) 25,50 \$ (E) 59,50 \$

9. On arrange des carrés ombrés et non ombrés en rangées de manière que :

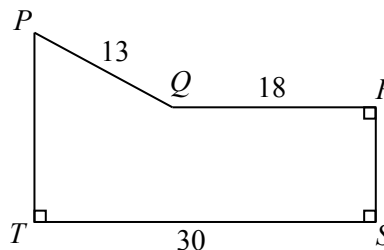
- la première rangée soit composée d'un seul carré non ombré ;
- chaque rangée commence avec un carré non ombré ;
- les carrés de chaque rangée alternent entre non ombrés et ombrés ;
- chaque rangée, à partir de la deuxième, contienne deux carrés de plus que la rangée précédente.



Les 4 premières rangées sont illustrées dans la figure ci-contre. Combien y a-t-il de carrés ombrés dans la 2020^e rangée ?

- (A) 2022 (B) 2021 (C) 2020
(D) 2019 (E) 2018
10. Dans le pentagone $PQRST$ ci-contre, on a $PQ = 13$, $QR = 18$, $ST = 30$ et le périmètre est de 82. De plus, $\angle QRS = \angle RST = \angle STP = 90^\circ$. Quelle est l'aire du pentagone $PQRST$?

- (A) 306 (B) 297 (C) 288
(D) 279 (E) 270



Partie B (6 points par bonne réponse)

11. Les 9 premiers entiers strictement positifs ont une somme de 45. En d'autres mots,

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$$

Quelle est la somme des 9 premiers multiples positifs de 5 ? En d'autres mots, quelle est la valeur de $5 + 10 + 15 + \dots + 40 + 45$?

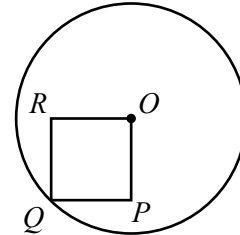
- (A) 225 (B) 250 (C) 180 (D) 150 (E) 450
12. Un prisme droit à base rectangulaire a un volume de 21. Sa longueur, sa largeur et sa hauteur sont tous des entiers strictement positifs différents. Quelle est la somme de sa longueur, de sa largeur et de sa hauteur ?
- (A) 11 (B) 13 (C) 15 (D) 9 (E) 17
13. Si $2^n = 8^{20}$, quelle est la valeur de n ?
- (A) 10 (B) 60 (C) 40 (D) 16 (E) 17
14. Juliana choisit trois nombres différents de l'ensemble $\{-6, -4, -2, 0, 1, 3, 5, 7\}$. Elle les multiplie afin d'obtenir comme produit l'entier n . Quelle est la plus grande valeur possible de n ?
- (A) 168 (B) 0 (C) 15 (D) 105 (E) 210

15. Un sac contient des billes vertes, des billes jaunes, des billes rouges et rien d'autre. Le rapport du nombre de billes vertes au nombre de billes jaunes au nombre de billes rouges est de $3 : 4 : 2$. Si 63 des billes dans le sac ne sont *pas* rouges, combien y a-t-il de billes rouges dans le sac ?

(A) 14 (B) 18 (C) 27 (D) 36 (E) 81

16. Dans la figure ci-contre, le cercle a pour centre O et le sommet Q du carré $OPQR$ est situé sur le cercle. Si le cercle a une aire de 72π , quelle est l'aire du carré ?

(A) 38 (B) 48 (C) 25
(D) 12 (E) 36



17. Carley a créé des sacs à bonbons. Chaque sac contient exactement 1 chocolat, 1 bonbon à la menthe et 1 bonbon caramélisé. Les chocolats se vendaient en boîtes de 50, les bonbons à la menthe en boîtes de 40 et les bonbons caramélisés en boîtes de 25. Carley a utilisé tous les chocolats, tous les bonbons à la menthe et tous les bonbons caramélisés et n'a créé que des sacs de bonbons complets. Quel est le nombre total minimum de boîtes que Carley aurait pu acheter ?

(A) 19 (B) 17 (C) 44 (D) 25 (E) 9

18. Nate a pris la voiture pour rendre visite à sa grand-mère. S'il conduit à une vitesse constante de 40 km/h, il arrivera 1 heure en retard. S'il conduit à une vitesse constante de 60 km/h, il arrivera 1 heure trop tôt. À quelle vitesse constante devrait-il conduire afin d'arriver exactement à l'heure ?

(A) 56 km/h (B) 80 km/h (C) 54 km/h (D) 48 km/h (E) 58 km/h

19. Un test à choix multiples comprend exactement 10 questions. Chaque réponse juste vaut 5 points, chaque question laissée sans réponse vaut 1 point et chaque réponse fautive vaut 0 points. Combien y a-t-il d'entiers de 30 à 50 qui ne sont *pas* des notes finales possibles ?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6 (E) 5

20. Combien y a-t-il de couples (m,n) , m et n étant des entiers qui vérifient $1 \leq m \leq 100$ et $101 \leq n \leq 205$, tels que $3^m + 7^n$ soit divisible par 10 ?

(A) 2600 (B) 2626 (C) 2601 (D) 2650 (E) 2625

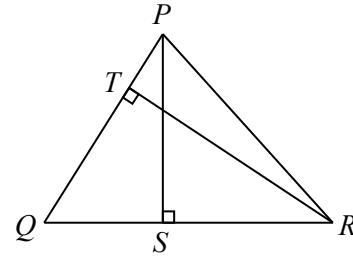
Partie C (8 points par bonne réponse)

21. Combien de points (x,y) , x et y étant des entiers, sont situés et sur la droite d'équation $y = 4x + 3$ et dans la région bornée par les droites d'équations $x = 25$, $x = 75$, $y = 120$ et $y = 250$?

(A) 44 (B) 36 (C) 40 (D) 32 (E) 48

22. Dans la figure ci-contre, les points S et T sont situés respectivement sur les côtés QR et PQ du triangle PQR de manière que PS est perpendiculaire à QR et que RT est perpendiculaire à PQ . Sachant que $PT = 1$, $TQ = 4$ et $QS = 3$, quelle est la longueur de SR ?

- (A) 3 (B) $\frac{11}{3}$ (C) $\frac{15}{4}$
 (D) $\frac{7}{2}$ (E) 4



23. Ricardo veut placer trois 1, trois 2, deux 3 et un 4 de manière à créer des entiers positifs de neuf chiffres tels qu'il :

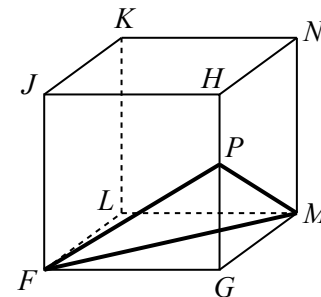
- y ait, de gauche à droite, au moins un 1 avant le premier 2, au moins un 2 avant le premier 3 et au moins un 3 avant le 4 ;
- n'y ait aucun 2 adjacent à un autre 2.

(Par exemple, l'entier 121 321 234 remplit ces conditions.) Combien de tels entiers positifs de neuf chiffres Ricardo peut-il créer ?

- (A) 278 (B) 260 (C) 254 (D) 272 (E) 266

24. Dans la figure ci-contre, un cube a les sommets $FGHJKLMN$ et a des arêtes de longueur 200. Le point P est situé sur HG tel qu'indiqué dans la figure. La plus courte distance du point G à un point situé à l'intérieur du triangle PFM est de 100. Lequel des nombres suivants est le plus près de la longueur de HP ?

- (A) 53 (B) 55 (C) 57
 (D) 59 (E) 61



25. Combien y a-t-il d'entiers strictement positifs $n \leq 20\,000$ tels que $2n$ ait 64 diviseurs positifs, y compris 1 et $2n$ et que $5n$ ait 60 diviseurs positifs, y compris 1 et $5n$?

- (A) 4 (B) 5 (C) 3 (D) 2 (E) 6



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Cayley de 2020! Chaque année, plus de 265 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignante ou votre enseignant à vous inscrire au concours Galois qui aura lieu en avril.

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- plus d'information à propos du concours Galois
- des copies gratuites des concours précédents
- des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
- des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- inscrire vos élèves aux concours Fryer, Galois et Hypatie qui auront lieu en avril
- jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11^e et 12^e année
- vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
- vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
- vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
- trouver les résultats de vos élèves dans les concours