Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur

le mercredi 18 novembre 2020
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)
le jeudi 19 novembre 2020
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 2 heures

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Le questionnaire est divisé en deux parties. Dans chaque partie, les questions sont à peu près en ordre croissant de difficulté. Les premiers problèmes de la partie B sont probablement plus faciles que les derniers de la partie A.

PARTIE A

1. Cette partie est composée de six questions de 5 points chacune.
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse.** Le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

PARTIE B

1. Cette partie est composée de trois questions de 10 points chacune.
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse.** Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Inscrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille insérée.
3. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, et le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca. Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur

Remarques :

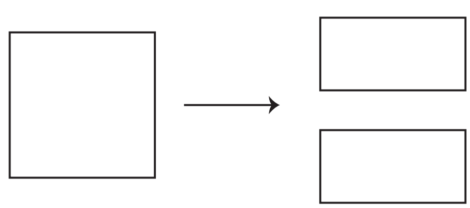
1. Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Inscrire toutes les solutions dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.
4. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
5. Les figures ne sont pas dessinées à l'échelle. Elles servent d'aide seulement.
6. Aucun élève ne peut passer le Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur et le Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire la même année.

PARTIE A

Pour chaque problème dans la partie A, le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée pour du travail pertinent inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

Renseignement utile pour la partie A :
$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ pour tous les angles x et y.

1. Marc a 9 bonbons et Catherine a 5 bonbons. Sanjiv donne des bonbons à Marc et à Catherine, soit 10 bonbons en tout, afin que Marc et Catherine aient le même nombre de bonbons. Combien de bonbons Marc a-t-il maintenant ?
2. Dans la figure ci-dessous, un carré est découpé en deux rectangles identiques.



   Chacun des deux rectangles a un périmètre de 24 cm. Quelle est l'aire du carré d'origine ?
3. Soit a, b, c, d et e des entiers strictement positifs consécutifs où $a < b < c < d < e$. Si $a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2$, quelle est la valeur de a ?

4. Désignons par $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier qui est inférieur ou égal à x. Par exemple, $\lfloor \pi \rfloor = 3$. S est l'entier égal à la somme des 100 termes suivants :

$$S = \lfloor \pi \rfloor + \lfloor \pi + \tfrac{1}{100} \rfloor + \lfloor \pi + \tfrac{2}{100} \rfloor + \lfloor \pi + \tfrac{3}{100} \rfloor + \cdots + \lfloor \pi + \tfrac{99}{100} \rfloor$$

Quelle est la valeur de S ?

5. Supposons que x et y vérifient les équations :

$$3\sin x + 4\cos y = 5$$
$$4\sin y + 3\cos x = 2$$

Quelle est la valeur de $\sin(x+y)$?

6. Soit $f(x)$ une fonction définie pour tout nombre réel x $(0 \leq x \leq 1)$ telle que :
   - $f(1-x) = 1 - f(x)$ pour tous les nombres réels x où $0 \leq x \leq 1$,
   - $f(\frac{1}{3}x) = \frac{1}{2}f(x)$ pour tous les nombres réels x où $0 \leq x \leq 1$ et
   - $f(a) \leq f(b)$ pour tous les nombres réels $0 \leq a \leq b \leq 1$.

   Quelle est la valeur de $f\left(\frac{6}{7}\right)$?

PARTIE B

Pour chaque question dans la partie B, la solution doit être bien organisée et doit aussi présenter certains mots d'explication ou de justification. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

Renseignements utiles pour la Partie B :
$\text{PGCD}(a, bc) = \text{PGCD}(a, b)$ pour tous les entiers a, b et c pour lesquels $\text{PGCD}(a, c) = 1$.
$\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(a, b - qa)$ pour tous les entiers a, b et q.

1. (a) Déterminer le point d'intersection de la droite d'équation $y = 4x - 32$ et de la droite d'équation $y = -6x + 8$.

   (b) Soit a un entier. Déterminer le point d'intersection de la droite d'équation $y = -x + 3$ et de la droite d'équation $y = 2x - 3a^2$. (Les coordonnées de ce point seront exprimées en fonction de a.)

   (c) Soit c un entier. Démontrer que les droites d'équations $y = -c^2x + 3$ et $y = x - 3c^2$ ont un point d'intersection dont les coordonnées sont des entiers.

   (d) Déterminer les quatre entiers d pour lesquels les droites d'équations $y = dx + 4$ et $y = 2dx + 2$ ont un point d'intersection dont les coordonnées sont des entiers.

2. Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier dont les côtés sont de longueur 6. Chacun des angles intérieurs de l'hexagone $ABCDEF$ a une mesure de $120°$.

   (a) Dans l'une des figures ci-dessous, un arc de cercle de centre D et de rayon 6 est tracé de C à E. Déterminer l'aire de la région ombrée.

   (b) Dans l'une des figures ci-dessous, un arc de cercle de centre D et de rayon 6 est tracé de C à E. De plus, on trace de B à F un second arc de cercle de centre A et de rayon 6. Ces arcs de cercles sont tangents l'un à l'autre (c'est-à-dire qu'ils se touchent) en un point situé exactement au centre de l'hexagone. Les segments de droites BF et CE sont également tracés. Déterminer l'aire totale des régions ombrées.

   (c) Dans l'une des figures ci-dessous, on trace un demi-cercle de diamètre 6 le long de chaque côté de l'hexagone. Déterminer l'aire totale des régions ombrées ; autrement dit, déterminer l'aire totale des régions situées à l'intérieur d'exactement deux demi-cercles.

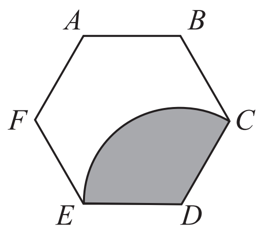


Figure pour (a)

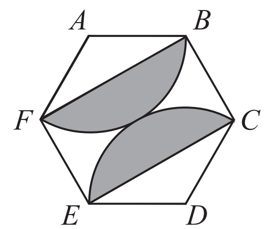


Figure pour (b)

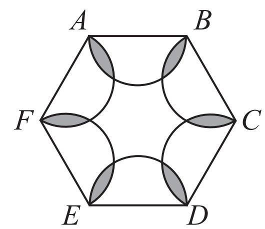


Figure pour (c)

3. Soit $f(x) = x^3 - px^2 + qx$ et $g(x) = 3x^2 - 2px + q$, p et q étant des entiers strictement positifs quelconques.

   (a) Si $p = 33$ et $q = 216$, démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions entières distinctes et que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions entières distinctes.

   (b) Supposons que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions entières distinctes et que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions entières distinctes. Démontrer que :
   (i) p doit être un multiple de 3,
   (ii) q doit être un multiple de 9,
   (iii) $p^2 - 3q$ doit être un carré parfait non nul et
   (iv) $p^2 - 4q$ doit être un carré parfait non nul.

   (c) Démontrer qu'il y a un nombre infini de couples d'entiers positifs (p, q) pour lesquels les trois énoncés suivants sont tous vrais :
   - L'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions entières distinctes.
   - L'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions entières distinctes.
   - Le plus grand commun diviseur de p et q est 3
     (autrement dit, $\text{PGCD}(p, q) = 3$).

Concours
canadien de
mathématiques
de niveau
supérieur
2020
(français)