Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire 2020

le mercredi 18 novembre 2020
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 19 novembre 2020
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

Partie A

1. On exprime chacune des trois fractions données sous forme décimale :

$$\frac{1}{4} = 0{,}25 \qquad \frac{4}{10} = 0{,}4 \qquad \frac{41}{100} = 0{,}41$$

Les cinq nombres sont donc 0,25 ; 0,4 ; 0,41 ; 0,04 ; 0,404.
Lorsqu'on place les cinq nombres en ordre du plus petit au plus grand, on obtient :
0,04 ; 0,25 ; 0,4 ; 0,404 ; 0,41.
Donc, le nombre au milieu de la liste est 0,4 ou $\frac{4}{10}$.

Réponse : $\frac{4}{10}$

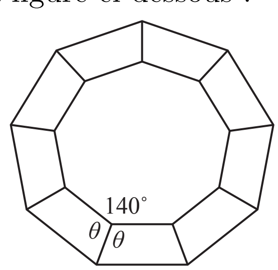
2. Chaque rectangle de dimensions 8×10 a une aire de $8 \times 10 = 80$.
Le carré de dimensions 4×4 a une aire de $4 \times 4 = 16$.
Chacune des deux surfaces ombrées est la partie d'un rectangle 8×10 située à l'extérieur d'un carré 4×4 ; chacune de ces surfaces a donc une aire de $80 - 16 = 64$.
Donc, la région ombrée a une aire totale de $2 \times 64 = 128$.
(On pourrait également déterminer l'aire de la région ombrée en divisant cette dernière en parties rectangulaires.)

Réponse : 128

3. Après 10 jours, Juan aura retiré $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$ bonbons.
Au 11e jour, Juan retire 11 bonbons. Il aura donc retiré $55 + 11 = 66$ bonbons en tout.
Donc, Juan aura retiré moins de 64 bonbons après le 10e jour et plus de 64 bonbons après le 11e jour.
Donc, la plus petite valeur possible de n est 11.

Réponse : 11

4. *Solution 1*
Le polygone intérieur formé par les neuf trapèzes est un polygone régulier à 9 côtés car (i) les côtés de ce polygone sont tous de même longueur (cette longueur étant égale à celle du côté parallèle le plus court de l'un des trapèzes) et (ii) les angles intérieurs de ce polygone sont tous de même mesure (ces angles étant formés entre deux trapèzes identiques).
Ce polygone à 9 côtés a des angles dont les mesures ont une somme de $180°(9 - 2)$ ou $1260°$.
Donc, chacun des angles intérieurs a une mesure de $1260° \div 9 = 140°$.
Soit $\theta = \angle ABC$.
Puisque les neuf trapèzes sont identiques, alors le trapèze adjacent à la gauche a également un angle de θ tel qu'indiqué dans la figure ci-dessous :



Sachant que les angles au centre formant un angle plein ont des mesures dont la somme est de $360°$, alors $2\theta + 140° = 360°$, d'où $2\theta = 220°$ ou $\angle ABC = \theta = 110°$.

Solution 2

Le polygone extérieur formé par les neuf trapèzes est un polygone régulier à 9 côtés car (i) les côtés de ce polygone sont tous de même longueur (cette longueur étant égale à celle du côté parallèle le plus long de l'un des trapèzes) et (ii) les angles intérieurs de ce polygone sont tous de même mesure (ces angles étant formés par deux angles adjacents aux bases de deux trapèzes identiques).
Ce polygone à 9 côtés a des angles dont les mesures ont une somme de $180°(9-2)$ ou $1260°$.
Donc, chacun des angles intérieurs a une mesure de $1260° \div 9 = 140°$.
Puisque chacun des angles intérieurs est formé de deux angles de même mesure (chacun étant un angle adjacent à la base d'un trapèze), chacun de ces derniers a donc une mesure égale à la moitié de $140°$, soit à $70°$.
Puisque les trapèzes ont des côtés parallèles, l'angle ABC est donc le supplément de l'un de ces angles adjacents à la base d'un trapèze, d'où $\angle ABC = 180° - 70° = 110°$.

RÉPONSE : 110°

5. Tout au long de la solution, on utilise le fait que si a et b sont positifs, alors $\frac{1}{a}$ est inférieur à $\frac{1}{b}$ exactement lorsque a est supérieur à b. (C'est-à-dire que $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ exactement lorsque $a > b$.)
Puisque $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ est positif, alors x et y ne peuvent pas être tous les deux négatifs (sinon $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ serait négatif).
Puisque $x \leq y$, alors soit x et y sont tous les deux positifs, soit x est négatif et y est positif.

Supposons que x et y sont tous les deux positifs. Cela signifie que $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ sont tous les deux positifs.
Puisque $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$, alors $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ sont tous les deux inférieurs à $\frac{1}{4}$.
Cela signifie que $x > 4$ et que $y > 4$.
Puisque $x \leq y$, alors $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$. Cela signifie que $\frac{1}{4} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x}$ ou $\frac{1}{4} \leq \frac{2}{x}$, d'où $\frac{2}{8} \leq \frac{2}{x}$ ou $x \leq 8$. (Autrement dit, puisque $\frac{1}{x}$ est plus grand, ce dernier doit être au moins égal à la moitié de $\frac{1}{4}$. Donc $\frac{1}{x}$ est au moins égal à $\frac{1}{8}$, d'où x est au plus égal à 8.)
Puisque $x > 4$ et que $x \leq 8$, alors x pourrait être égal à 5, à 6, à 7 ou à 8.
Si $x = 5$, alors $\frac{1}{y} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{5}{20} - \frac{4}{20} = \frac{1}{20}$, d'où $y = 20$.
Si $x = 6$, alors $\frac{1}{y} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3}{12} - \frac{2}{12} = \frac{1}{12}$, d'où $y = 12$.
Si $x = 7$, alors $\frac{1}{y} = \frac{1}{4} - \frac{1}{7} = \frac{7}{28} - \frac{4}{28} = \frac{3}{28}$, d'où $y = \frac{28}{3}$, ce qui n'est pas un entier.
Si $x = 8$, alors $\frac{1}{y} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{2}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$, d'où $y = 8$.
Donc, lorsque x et y sont tous les deux positifs, on a $(x, y) = (5, 20)$, $(6, 12)$, $(8, 8)$ pour solutions.

Supposons que x est négatif et que y est positif. Cela signifie que $\frac{1}{x}$ est négatif et que $\frac{1}{y}$ est positif.

Puisque $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}$, alors $\dfrac{1}{y}$ est supérieur à $\dfrac{1}{4}$.
Cela signifie que $y<4$.
Puisque y est positif et que $y<4$, alors y pourrait être égal à 1, à 2 ou à 3.
Si $y=1$, alors $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{1}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{4}{4}=-\dfrac{3}{4}$, d'où $x=-\dfrac{4}{3}$, ce qui n'est pas un entier.
Si $y=2$, alors $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{2}{4}=-\dfrac{1}{4}$, d'où $x=-4$.
Si $y=3$, alors $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{3}{12}-\dfrac{4}{12}=-\dfrac{1}{12}$, d'où $x=-12$.
Donc, lorsque x et y sont respectivement négatif et positif, on a $(x,y)=(-4,2),(-12,3)$ pour solutions.

En résumé, on a $(x,y)=(-4,2),(-12,3),(5,20),(6,12),(8,8)$ pour solutions.

Réponse : $(x,y)=(-4,2),(-12,3),(5,20),(6,12),(8,8)$

6. Lorsque chacun des 90 joueurs joue exactement un match contre chacun des 89 autres joueurs, il y aura $\dfrac{90\times 89}{2}=4005$ matchs en tout.
Il en est ainsi car chacun des 90 joueurs joue 89 matchs, d'où 90×89. Or, puisque chaque match est joué par deux joueurs, chacun des matchs est compté deux fois dans ce total. On a donc $\dfrac{90\times 89}{2}$.
Exactement 1 point est attribué au total pour chaque match car soit l'un des joueurs remporte le match tandis que l'autre perd $(1+0$ point), soit les deux joueurs font match nul $(0{,}5+0{,}5$ point).
Donc, sur 4005 matchs, un total de 4005 points seront attribués aux joueurs de la ligue.
Supposons que n joueurs ont des scores totaux d'au moins 54 points après que tous les matchs ont été joués.
Donc $54n\leq 4005$ car ces n joueurs ne peuvent pas avoir plus de points que le nombre total de points attribués à toute la ligue.
Puisque $\frac{4005}{54}\approx 74{,}17$ et que n est un entier, alors $n\leq 74$. (Remarquons que $74\times 54=3996$ et que $75\times 54=4050$.)

Supposons que 74 joueurs ont des scores totaux d'au moins 54 points.
Cela représente au moins $74\times 54=3996$ points du total de 4005 points.
Cela laisse au plus $4005-3996=9$ points à répartir entre les $90-74=16$ joueurs restants.
Ces 16 joueurs jouent en tout $\dfrac{16\times 15}{2}=120$ matchs entre eux (chacun des 16 joueurs joue contre chacun des 15 autres joueurs). Ces matchs génèrent 120 points à répartir entre les 16 joueurs.
Cela signifie que ces 16 joueurs ont au moins 120 points entre eux ; et possiblement plus s'ils en gagnent en jouant contre les 54 autres joueurs.
Donc, ces 16 joueurs ont au plus 9 points et au moins 120 points au total, ce qui est impossible.
Donc, 74 joueurs ne peuvent avoir au moins 54 points.

Supposons que 73 joueurs ont des scores totaux d'au moins 54 points.
Cela représente au moins $73\times 54=3942$ points du total de 4005 points.
Cela laisse au plus $4005-3942=63$ points à répartir entre les $90-73=17$ joueurs restants.
Ces 17 joueurs jouent en tout $\dfrac{17\times 16}{2}=136$ matchs entre eux.

Cela signifie que ces 17 joueurs ont au moins 136 points entre eux.
Donc, ces 17 joueurs ont au plus 63 points et au moins 136 points au total, ce qui est impossible.
Donc, 73 joueurs ne peuvent avoir au moins 54 points.

Supposons que 72 joueurs ont des scores totaux d'au moins 54 points.
Cela représente au moins $72 \times 54 = 3888$ points du total de 4005 points.
Cela laisse au plus $4005 - 3888 = 117$ points à répartir entre les $90 - 72 = 18$ joueurs restants.
Ces 18 joueurs jouent en tout $\dfrac{18 \times 17}{2} = 153$ matchs entre eux.
Cela signifie que ces 18 joueurs ont au moins 153 points entre eux.
Donc, ces 18 joueurs ont au plus 117 points et au moins 153 points au total, ce qui est impossible.
Donc, 72 joueurs ne peuvent avoir au moins 54 points.

Supposons que 71 joueurs ont des scores totaux d'au moins 54 points.
Cela représente au moins $71 \times 54 = 3834$ points du total de 4005 points.
Cela laisse au plus $4005 - 3834 = 171$ points à répartir entre les $90 - 71 = 19$ joueurs restants.
Ces 19 joueurs jouent en tout $\dfrac{19 \times 18}{2} = 171$ matchs entre eux.
Cela signifie que ces 19 joueurs ont au moins 171 points entre eux.
Ces totaux de points correspondent. Par conséquent, il semble que 71 joueurs pourraient avoir au moins 54 points.

Il s'avère que cela est possible.
Supposons que chaque match entre deux des 71 joueurs se termine par un match nul, que chaque match entre l'un des 71 joueurs et l'un des 19 joueurs se termine par une victoire pour le premier joueur, et que chaque match entre deux des 19 joueurs se termine par un match nul.
Dans ce cas, chacun des 71 joueurs a fait match nul 70 fois et a remporté un match 19 fois, soit un score total de $(70 \times 0{,}5) + (19 \times 1) = 54$.

Réponse : 71

Partie B

1. (a) Dans la suite arithmétique $20, 13, 6, -1$, chaque terme, après le premier, est obtenu en additionnant une constante au terme précédent.
Cette constante (appelée *raison*) est égale à $13 - 20 = -7$.
Donc, les deux prochains termes de la suite sont $-1 + (-7) = -8$ et $-8 + (-7) = -15$.

(b) La suite arithmétique $2, a, b, c, 14$ est une suite de 5 termes.
Cela signifie qu'on additionne la raison (la constante additionnée à chaque terme pour obtenir le terme suivant) quatre fois au premier terme (soit 2) pour obtenir le dernier terme (soit 14).
Donc, la raison est égale à $\dfrac{14-2}{4} = \dfrac{12}{4} = 3$.
Donc, les 5 premiers termes d'une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme 2 sont : 2, 5, 8, 11, 14.
Donc, $a = 5$, $b = 8$ et $c = 11$.

(c) Ces trois termes peuvent être disposés de six manières différentes :

$$7, 15, t \qquad 15, 7, t \qquad 7, t, 15 \qquad 15, t, 7 \qquad t, 7, 15 \qquad t, 15, 7$$

On détermine la valeur correspondante de t dans chaque cas :

- $7, 15, t$: Dans ce cas, la raison est égale à $15 - 7 = 8$. Donc, $t = 15 + 8 = 23$.
- $15, 7, t$: Dans ce cas, la raison est égale à $7 - 15 = -8$. Donc, $t = 7 + (-8) = -1$.
- $t, 7, 15$: Dans ce cas, la raison est égale à $15 - 7 = 8$. Donc, $t + 8 = 7$, d'où $t = -1$.
- $t, 15, 7$: Dans ce cas, la raison est égale à $7 - 15 = -8$. Donc, $t + (-8) = 15$, d'où $t = 23$.
- $7, t, 15$: Dans ce cas, on additionne la raison deux fois à 7 pour obtenir 15. Donc, la raison est égale à $\dfrac{15-7}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$. Donc, $t = 7 + 4 = 11$.
- $15, t, 7$: Dans ce cas, la raison est égale à $\dfrac{7-15}{2} = \dfrac{-8}{2} = -4$. Donc, $t = 15+(-4) = 11$.

Donc, les valeurs possibles de t sont 23, -1 et 11.

(d) Supposons que la suite arithmétique r, s, w, x, y, z est de raison d.
Autrement dit, la différence entre n'importe quels deux termes consécutifs dans la suite sera toujours égale à d.
Puisque la suite contient 6 termes, on additionne la raison 5 fois au terme r pour obtenir le terme z. Autrement dit, $z - r$ est égal à $5d$.
De plus, la différence entre un terme ultérieur de la suite et un terme antérieur de la suite doit être égale à d, à $2d$, à $3d$, à $4d$ ou à $5d$, selon le nombre de termes entre les deux termes spécifiques.
Puisque 4 et 20 sont deux termes dans la suite et que le nombre 20 parait après le nombre 4 dans la suite, on a $20 - 4 = 16$, d'où on a soit $d = 16$, soit $2d = 16$ (d'où $d = 8$), soit $3d = 16$ (d'où $d = \dfrac{16}{3}$), soit $4d = 16$ (d'où $d = 4$), soit $5d = 16$ (d'où $d = \dfrac{16}{5}$).
Les valeurs correspondantes de $5d$ sont 80, 40, $\dfrac{80}{3}$, 20 et 16.
Puisque $z - r$ est égal à $5d$, alors la plus grande valeur possible de $z - r$ est 80 tandis que la plus petite valeur possible de $z - r$ est 16.

(Il est possible d'avoir une différence de 80 comme le démontre la suite suivante : 4, 20, 36, 52, 68, 84.
Il est possible d'avoir une différence de 16 comme le démontre la suite suivante : 4, $\frac{36}{5}$, $\frac{52}{5}$, $\frac{68}{5}$, $\frac{84}{5}$, 16.)

2. (a) (i) Le réservoir B a un volume de 5 cm $\times$ 9 cm $\times$ 8 cm $=$ 360 cm^3.
Donc, le réservoir B est rempli à $\frac{1}{3}$ de sa capacité lorsqu'il contient $\frac{1}{3} \times 360$ cm^3 ou 120 cm^3 d'eau.
Puisque le réservoir B se remplit d'eau à un débit constant de 4 cm^3/s, alors le réservoir B sera rempli à $\frac{1}{3}$ de sa capacité après $\dfrac{120 \text{ cm}^3}{4 \text{ cm}^3/\text{s}} = 30$ s.

(ii) Puisque le réservoir B a un volume de 360 cm^3 et qu'il se remplit d'eau à un débit constant de 4 cm^3/s, il sera donc entièrement rempli après $\dfrac{360 \text{ cm}^3}{4 \text{ cm}^3/\text{s}} = 90$ s.
(Par ailleurs, on peut aussi remarquer que puisque le réservoir B sera rempli à $\frac{1}{3}$ de sa capacité après 30 s et puisqu'il se remplit d'eau à un débit constant, il sera donc entièrement rempli après 3×30 s $= 90$ s.)
Puisque l'eau du réservoir A s'écoule à un débit constant de 4 cm^3/s, alors un volume d'eau de 360 cm^3 se sera écoulé en 90 s.
Puisque le réservoir A a un volume de 10 cm $\times$ 8 cm $\times$ 6 cm $=$ 480 cm^3, alors il ne restera plus que 480 cm^3 $-$ 360 cm^3 $=$ 120 cm^3 dans le réservoir après 90 s.
Le réservoir A est posé à plat sur une table de manière que l'une de ses faces de dimensions 10 cm $\times$ 8 cm soit en contact avec la table. Cette face a une aire de 80 cm^2.
Puisque l'eau prend la forme du contenant dans lequel elle se trouve et que ce dernier est un prisme droit à base rectangulaire, alors la profondeur de l'eau dans le réservoir A à ce moment précis est de $\dfrac{120 \text{ cm}^3}{80 \text{ cm}^2} = 1{,}5$ cm.

(iii) Puisque les réservoirs A et B sont respectivement plein et vide au départ et que l'eau s'écoule du réservoir A au même débit que celui auquel se remplit le réservoir B, alors le volume d'eau combiné dans les deux réservoirs est constant et est égal au volume initial du réservoir A, soit au volume de 480 cm^3.
Soit d cm la profondeur de l'eau dans le réservoir A et dans le réservoir B lorsque leurs profondeurs sont égales.
Puisque l'aire de la face inférieure du réservoir A est de 80 cm^2, alors le volume d'eau dans le réservoir A est égal à $80d$ cm^3 lorsque la profondeur est de d cm.
Puisque l'aire de la face inférieure du réservoir B est de 5 cm $\times$ 9 cm $=$ 45 cm^2, alors le volume d'eau dans le réservoir B est égal à $45d$ cm^3 lorsque la profondeur est de d cm.
Puisque le volume d'eau combiné est égal à 480 cm^3, alors $80d + 45d = 480$, d'où $125d = 480$ ou $25d = 96$, soit $d = \frac{96}{25} = 3{,}84$.
Donc, la profondeur est de 3,84 cm.

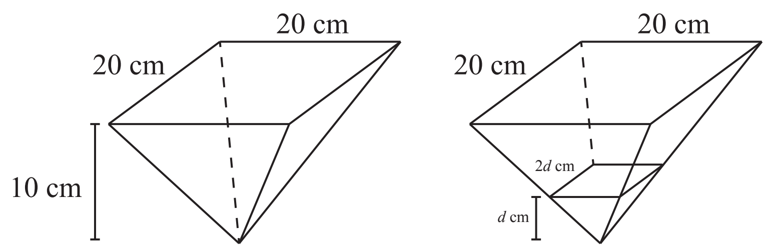
(b) Supposons que les réservoirs C et D contiennent tous les deux le même volume d'eau t secondes après que le réservoir D a commencé à se remplir d'eau.
Le réservoir C a un volume de 31 cm $\times$ 4 cm $\times$ 4 cm $=$ 496 cm^3.
Puisque le réservoir C est plein d'eau au départ et qu'il commence à se vider à un débit de 2 cm^3/s pendant $t - 2$ secondes, alors après t secondes le volume d'eau dans le réservoir C est égal à $(496 - 2(t - 2))$ cm^3.
Puisque le réservoir D est vide au départ et qu'il commence à se remplir d'eau à un débit de 1 cm^3/s, alors après t secondes le volume d'eau dans le réservoir D est égal à t cm^3.

Puisque ces volumes sont égaux, alors

$$\begin{aligned} 496 - 2(t-2) &= t \\ 496 - 2t + 4 &= t \\ 500 &= 3t \\ t &= \tfrac{500}{3} \end{aligned}$$

Donc, le volume d'eau dans le réservoir C est égal au volume d'eau dans le réservoir D après $\frac{500}{3}$ secondes. À ce moment-là, le réservoir D contient un volume d'eau de $\frac{500}{3}$ cm^3.

Supposons que la profondeur de l'eau dans le réservoir D à ce moment-là est de d cm. Remarquons que l'eau prend la forme du réservoir D, soit celle d'une pyramide à base carrée inversée. La surface de l'eau dans le réservoir D est en forme de carré ayant des côtés de longueur $2d$ cm.



En effet, au fur et à mesure que le réservoir D se remplit, le rapport entre la longueur des côtés de la base et la hauteur restera constant. Pour l'entièreté du réservoir, ce rapport est de 20 cm : 10 cm, ce qui est équivalent à 2 : 1. On pourrait dire que la pyramide à base carrée formée par l'eau sera, à tout instant, *semblable* au réservoir lui-même.
Le volume d'une pyramide à base carrée de hauteur d cm et dont la base a des côtés de longueur $2d$ cm est égal à $\frac{1}{3}(2d)^2 d$ cm^3 ou $\frac{4}{3}d^3$ cm^3.
Donc, $\frac{4}{3}d^3 = \frac{500}{3}$, d'où $d^3 = 125$ ou $d = 5$.
Donc, au moment où le volume d'eau dans le réservoir C est égal au volume d'eau dans le réservoir D, l'eau dans le réservoir D a une profondeur de 5 cm.

3. (a) P peut être un multiple de 216.
Par exemple, si $a = 6$, $b = 6$, $c = 6$ et $d = 2$, alors $P = abcd = 432$, ce qui est égal à 2×216.

(b) P ne peut être un multiple de 2000.
Pour le voir, on remarque d'abord que $2000 = 2 \times 10 \times 10 \times 10 = 2^4 \times 5^3$.
Pour que $P = abcd$ soit un multiple de 2000, P doit admettre au moins 4 diviseurs 2 et au moins 3 diviseurs 5.
Donc, le résultat du produit $abcd$ devrait admettre au moins 3 diviseurs 5.
Puisque les seules valeurs de a, b, c, d sont $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, on ne peut introduire des diviseurs 5 que d'une seule manière ; un ou plusieurs des entiers a, b, c, d doivent être 5. Il n'y a pas d'autres multiples de 5 dans cette liste.
Afin que P soit un multiple de 2000, P doit admettre 3 diviseurs 5. Donc, on doit avoir trois 5 parmi les entiers a, b, c, d.
Supposons que $a = b = c = 5$. Alors $P = 5 \times 5 \times 5 \times d = 125d$.
Dans ce cas, P est au plus $125 \times 9 = 1125$, ce dernier ne peut être un multiple de 2000 car il est trop petit.
Par ailleurs, on pourrait aussi remarquer que d ne peut contenir les 4 diviseurs 2 requis

puisqu'il n'y a pas de multiples de $2^4 = 16$ dans la liste.
Par conséquent, P ne peut pas être un multiple de 16 et ne peut donc pas être un multiple de 2000.

(c) On remarque d'abord que $2^7 = 128$ et que $2^{10} = 1024$.
Pour que P soit divisible par $2^7 = 128$ mais non par $2^{10} = 1024$, l'entier P doit admettre au moins 7 diviseurs 2 mais moins de 10 diviseurs 2. Autrement dit, P doit être divisible par 2^7, pourrait être divisible par 2^8 ou par 2^9, mais ne peut être divisible par quelconque puissance de 2 qui serait supérieure à ces dernières.
Supposons que a admet A diviseurs 2, que b admet B diviseurs 2, que c admet C diviseurs 2 et que d admet D diviseurs 2. Donc, $7 \leq A + B + C + D \leq 9$.
Remarquons qu'on doit compter les valeurs possibles de P et non les quadruplets (a,b,c,d).
Par conséquent, on peut supposer que $A \geq B \geq C \geq D$. Autrement dit, a admet au moins autant de diviseurs 2 que b, b admet au moins autant de diviseurs 2 que c et ainsi de suite.
Il existe parmi les valeurs possibles de a, b, c et d une valeur qui admet exactement 3 diviseurs 2 (à savoir 8), une valeur qui admet exactement 2 diviseurs 2 (à savoir 4), et deux valeurs qui admettent exactement 1 diviseur 2 (à savoir 2 et 6).
Donc, chacun de A, B, C, et D est au moins 0 et au plus 3.
Supposons que $A + B + C + D = 9$. Puisque $3 \geq A \geq B \geq C \geq D \geq 0$, alors on a les possibilités suivantes :

$$3 + 3 + 3 + 0 = 9 \qquad 3 + 3 + 2 + 1 = 9 \qquad 3 + 2 + 2 + 2 = 9$$

On détermine les valeurs possibles de P pour chacun des cas :

- $3 + 3 + 3 + 0 = 9$: Dans ce cas, $a = b = c = 8$ et d est l'un des entiers 1, 3, 5, 7 ou 9. On a donc 5 valeurs possibles de P : 2^9, 3×2^9, 5×2^9, 7×2^9, 9×2^9.
- $3 + 3 + 2 + 1 = 9$: Dans ce cas, $a = b = 8$, $c = 4$ et $d = 2$ ou $d = 6$. On n'obtient pas de nouvelles valeurs de P dans ce cas puisqu'on a 2^9 et 3×2^9 comme valeurs possibles de P.
- $3 + 2 + 2 + 2 = 9$: Dans ce cas, $a = 8$ et $b = c = d = 4$. On n'obtient pas de nouvelles valeurs de P puisque 2^9 est la seule valeur possible de P dans ce cas.

Supposons que $A + B + C + D = 8$. Puisque $3 \geq A \geq B \geq C \geq D \geq 0$, alors on a les possibilités suivantes :

$$3 + 3 + 2 + 0 = 8 \qquad 3 + 3 + 1 + 1 = 8 \qquad 3 + 2 + 2 + 1 = 8 \qquad 2 + 2 + 2 + 2 = 8$$

On détermine les valeurs possibles de P pour chacun des cas :

- $3 + 3 + 2 + 0 = 8$: Dans ce cas, $a = b = 8$, $c = 4$ et d est l'un des entiers 1, 3, 5, 7 ou 9. On a donc 5 valeurs additionnelles de P : 2^8, 3×2^8, 5×2^8, 7×2^8, 9×2^8.
- $3 + 3 + 1 + 1 = 8$: Dans ce cas, $a = b = 8$ et c et d sont chacun égal à 2 ou à 6. Cela signifie que P peut être égal à 2^8 ou à 3×2^8 ou à 9×2^8, d'où on n'a donc pas de valeurs additionnelles de P.
- $3 + 2 + 2 + 1 = 8$: Dans ce cas, $a = 8$, $b = c = 4$ et $d = 2$ ou $d = 6$. On n'obtient pas de nouvelles valeurs de P dans ce cas.
- $2 + 2 + 2 + 2 = 8$: Dans ce cas, $a = b = c = d = 4$. On n'obtient pas de nouvelles valeurs de P dans ce cas.

Supposons que $A + B + C + D = 7$. Puisque $3 \geq A \geq B \geq C \geq D \geq 0$, alors on a les possibilités suivantes :

$$3 + 3 + 1 + 0 = 7 \qquad 3 + 2 + 2 + 0 = 7 \qquad 3 + 2 + 1 + 1 = 7 \qquad 2 + 2 + 2 + 1 = 7$$

On détermine les valeurs possibles de P pour chacun des cas :

- $3+3+1+0=7$: Dans ce cas, $a=b=8$, $c=2$ ou $c=6$ et d est l'un des entiers 1, 3, 5, 7 ou 9. On obtient donc 8 valeurs additionnelles de P : 2^7, 3×2^7, 5×2^7, 7×2^7, 9×2^7, 15×2^7, 21×2^7, 27×2^7.
- $3+2+2+0=7$: Dans ce cas, $a=8$, $b=c=4$ et $d=1,3,5,7,9$. On n'obtient pas de nouvelles valeurs de P dans ce cas.
- $3+2+1+1=7$: Dans ce cas, $a=8$, $b=4$ et c et d sont chacun égal à 2 ou à 6. On n'obtient pas de nouvelles valeurs de P dans ce cas.
- $2+2+2+1=7$: Dans ce cas, $a=b=c=4$ et d est égal à 2 ou à 6. On n'obtient pas de nouvelles valeurs de P dans ce cas.

Il y a donc $5+5+8=18$ valeurs possibles de P en tout.

(d) Puisque P est 98 de moins qu'un multiple de 100, alors $P=2$ ou les deux derniers chiffres de P sont 02.
Un entier strictement positif est divisible par 5 uniquement lorsqu'il a 0 ou 5 comme chiffre des unités. Donc P n'est pas divisible par 5.
Un entier strictement positif est divisible par 4 uniquement lorsque l'entier formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4. Puisque 2 n'est pas divisible par 4, P n'est pas divisible par 4.
Puisque $P=abcd$ et que chacun des entiers a, b, c, d est égal à l'un des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, alors :

- aucun des entiers a, b, c, d n'est égal à 5 puisque P n'est pas un multiple de 5,
- aucun des entiers a, b, c, d n'est égal à 4 ou à 8 puisque P n'est pas un multiple de 4 et
- exactement un seul des entiers a, b, c, d est égal à 2 ou à 6 puisque P est pair tout en n'étant pas un multiple de 4.

Autrement dit, exactement un seul des entiers a, b, c, d est égal à 2 ou à 6 tandis que les entiers restants ne peuvent avoir que 1, 3, 7 ou 9 pour valeurs.
Pour l'instant, supposons que a est égal à 2 ou à 6 et que $b\le c\le d$. On finira par lever ces restrictions afin de pouvoir organiser les valeurs possibles en quadruplets.

Supposons que $a=2$.
Puisque P est égal à 2 ou que ses deux derniers chiffres sont 02, alors $P=100k+2$, k étant un entier non négatif quelconque.
Puisque $P=abcd$ et que $a=2$, alors $2\times bcd=100k+2$ ou $bcd=50k+1$.
Donc, bcd est 1 de plus qu'un multiple de 50, d'où on a donc que $bcd=1$ ou que les deux derniers chiffres de bcd sont 01 ou 51.

Supposons que $a=6$. Dans ce cas, on a donc $P=6bcd$ et on remarque également que $P>2$, d'où on a donc $P\ge 102$.
Puisque P a 2 comme chiffre des unités et que $P=6\times bcd$, alors bcd doit avoir 2 ou 7 comme chiffre des unités.
On a donc $bcd=10q+2$ ou $bcd=10q+7$, q étant un entier non négatif quelconque.
Donc, $6\times bcd=60q+12$ ou $6\times bcd=60q+42$, d'où $60q=P-12$ ou $60q=P-42$.
Puisque les deux derniers chiffres de P sont 02, alors les deux derniers chiffres de $60q$ sont soit 90 ou 60.
Puisque 60 est divisible par 4, alors $60q$ est divisible par 4. Puisqu'un entier se terminant par 90 n'est pas divisible par 4, ce cas n'est pas possible. Donc, on ne peut avoir $bcd=10q+2$.
Si les deux derniers chiffres de $60q=10\times(6q)$ sont 60, alors $6q$ a 6 comme chiffre des unités, d'où q doit avoir 1 ou 6 comme chiffre des unités. (On peut le voir en testant tous

les chiffres des unités possibles de q.)
Puisque $bcd = 10q + 7$, alors les deux derniers chiffres de bcd sont soit 17 ou 67.

On doit maintenant déterminer quels produits bcd (s'il y en a) ont 01, 51, 17, 67 comme deux derniers chiffres avec $b \leq c \leq d$; chacun des entiers b, c, d étant égal à l'un des nombres 1, 3, 7, 9, et $a = 2$ (les chiffres 01 ou 51) ou $a = 6$ (les chiffres 17 ou 67).
Supposons que $b = c = 1$. On a donc $bcd = d$. Donc, on peut obtenir les bons chiffres à partir d'une seule possibilité, soit $d = 1$, ce qui correspond à $a = 2$.

Supposons que $b = 1$ et que $c > 1$. Alors $bcd = cd$. Dans ce cas, on a les possibilités suivantes pour cd :

$$3 \times 3 = 9 \quad 3 \times 7 = 21 \quad 3 \times 9 = 27 \quad 7 \times 7 = 49 \quad 7 \times 9 = 63 \quad 9 \times 9 = 81$$

On ne peut obtenir les bons chiffres à partir de ces possibilités.
Supposons que $b = 3$. On a donc $bcd = 3 \times cd$. Puisque $3 \leq c \leq d$, on peut utiliser les possibilités du cas précédent que l'on multiplie par 3 afin de voir que bcd peut être égal à n'importe lequel des entiers suivants : 27, 63, 81, 147, 189, 243. Or, aucun de ces derniers ne contient les bons chiffres.
Supposons que $b = 7$. On a donc $7 \leq c \leq d$. Dans ce cas, on a les possibilités suivantes :

$$7 \times 7 \times 7 = 343 \quad 7 \times 7 \times 9 = 441 \quad 7 \times 9 \times 9 = 567$$

On peut obtenir les bons chiffres pour P à partir du dernier cas lorsque $a = 6$.
Finalement, si $b = 9$, alors on doit avoir $b = c = d = 9$, d'où $bcd = 729$. Or, ce dernier ne se termine pas par les bons chiffres.

Donc, on pourrait avoir $a = 2$ avec $b = c = d = 1$ ou $a = 6$ avec $b = 7$ et $c = d = 9$.

Finalement, on doit placer les chiffres $2, 1, 1, 1$ et $6, 7, 9, 9$ de manière à obtenir des quadruplets.
Dans le premier cas, on peut placer 2 dans quatre emplacements. Il y a donc 4 quadruplets dans ce cas.
Dans le second cas, il y a quatre emplacements dans lesquels on peut d'abord placer 6 puis trois emplacements restants dans lesquels on peut placer 7. On n'aura donc aucun autre choix que de placer les 9 dans les emplacements restants. On a donc $4 \times 3 = 12$ quadruplets.
En tout, il y a $4 + 12 = 16$ quadruplets (a, b, c, d) pour lesquels le produit P est 98 de moins qu'un multiple de 100.