Le CENTRE d'ÉDUCATION

en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Pascal 2019

(9e année – Secondaire III)

le mardi 26 février 2019

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 27 février 2019

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On évalue afin d'obtenir $2 \times 3 + 2 \times 3 = 6 + 6 = 12$.

Réponse : (D)

2. Puisqu'un carré a quatre côtés égaux, la longueur d'un côté doit être égale à un quart du périmètre du carré.
Donc, la longueur des côtés d'un carré dont le périmètre est de 28 sera de $28 \div 4 = 7$.

Réponse : (E)

3. Dans la figure, il y a 9 hexagones dont 5 sont ombrés.
Donc la fractions de tous les hexagones qui est ombrée est égale à $\frac{5}{9}$.

Réponse : (B)

4. Puisque 38 % des élèves pmt reçu un muffin, donc 100 % − 38 % = 62 % des élèves n'ont pas reçu de muffin.
Autrement, on aurait pu utiliser les pourcentages d'élèves qui ont reçu un yaourt, un fruit ou une barre de céréales afin d'obtenir le pourcentage d'élèves qui n'ont pas reçu de muffin, soit : $10\ \% + 27\ \% + 25\ \% = 62\ \%$.

Réponse : (D)

5. On sait que $\frac{1}{2} = 0{,}5$. Puisque $\frac{4}{9} \approx 0{,}44$ est inférieur à $\frac{1}{2} = 0{,}5$, alors on ne peut pas placer un 4 (ou quelconque entier inférieur à 4) dans la boîte. Puisque $\frac{5}{9} \approx 0{,}56$ est supérieur à $\frac{1}{2} = 0{,}5$, donc 5 est le plus petit entier que l'on peut placer dans la boîte.

Réponse : (D)

6. Puisque $4x + 14 = 8x - 48$, alors $14 + 48 = 8x - 4x$ ou $62 = 4x$.
On divise les deux côtés de l'équation par 2 afin d'obtenir $\frac{4x}{2} = \frac{62}{2}$, d'où $2x = 31$.

Réponse : (B)

7. Le segment de la droite numérique qui se trouve entre les valeurs de 3 et de 33 a une longueur égale à $33 - 3 = 30$.
Puisque ce segment est divisé en six parties égales, la longueur de chaque partie est égale à $30 \div 6 = 5$.
Le segment PS comprend trois telles parties et a donc une longueur égale à $3 \times 5 = 15$.
Le segment TV comprend deux telles parties et a donc une longueur égale à $2 \times 5 = 10$.
Ainsi la somme des longueurs de PS et TV est de $15 + 10$, soit 25.

Réponse : (A)

8. Puisque $\frac{20}{19}$ est supérieur à 1 et est inférieur à 2 et que $20 \times 19 = 380$, donc $\frac{20}{19} < 20 \times 19 < 2019$.
On remarque d'ailleurs que $19^{20} > 10^{20} > 10\,000$ et que $20^{19} > 10^{19} > 10\,000$.
Cela signifie que 19^{20} et 20^{19} sont tous les deux supérieurs à 2019.
Autrement dit, si les cinq nombres $19^{20}, \frac{20}{19}, 20^{19}, 2019, 20 \times 19$ étaient arrangés en ordre croissant, 2019 serait le troisième dans la liste. De plus, 2019 serait aussi la médiane de la liste car étant le troisième nombre dans la liste de cinq nombres.
(On remarque qu'il importe peu que 19^{20} soit supérieur ou inférieur à 20^{19}.)

Réponse : (D)

9. Puisque la mesure totale de l'angle au centre de chaque cercle est de $360°$ et que la partie non ombrée du cercle n'a qu'une mesure d'angle de $90°$, alors la partie non ombrée de chaque cercle ne représente que $\frac{90°}{360°} = \frac{1}{4}$ de l'aire totale du cercle.
Autrement dit, chaque cercle n'est qu'à $\frac{3}{4}$ ombré. Il y a 12 cercles dans le diagramme.
Puisque chaque cercle a un rayon de 1, donc chaque cercle a une aire de $\pi \times 1^2$ ou π.
Ainsi, l'aire totale de la région ombrée est égale à $\frac{3}{4} \times 12 \times \pi$ ou 9π.

Réponse : (D)

10. Supposons que soixante cubes $1 \times 1 \times 1$ sont joints face à face en rangée sur une table.
Chacun des soixante cubes a donc trois faces exposées, soit la face supérieure, la face d'avant et la face d'arrière.
De plus, la face gauche du cube au bout gauche de la rangée est exposée. De même, la face droite du cube au bout droit de la rangée est aussi exposée. Aucune autre face n'est exposée.
Ainsi, le nombre de faces 1×1 qui sont exposées est égal à $60 \times 3 + 2$, soit 182.

Réponse : (C)

11. À l'aide de la deuxième rangée, on comprend que la somme des nombres dans chaque rangée, dans chaque colonne et dans chaque diagonale doit être égale à $3{,}6 + 3 + 2{,}4 = 9$.
Puisque la somme des nombres dans la première colonne doit être égale à 9, alors le nombre en bas à gauche doit être égal à $9 - 2{,}3 - 3{,}6 = 9 - 5{,}9 = 3{,}1$
Sachant que la diagonale qui passe du coin supérieur gauche au coin inférieur droit du carré magique doit contenir des nombres dont la somme est égale à 9, on comprend alors que le nombre en bas à droite doit être égal à $9 - 2{,}3 - 3 = 9 - 5{,}3 = 3{,}7$
Puisque la rangée inférieure du carré magique doit contenir des nombres dont la somme est égale à 9, alors $3{,}1 + x + 3{,}7 = 9$, d'où $x + 6{,}8 = 9$ ou $x = 9 - 6{,}8 = 2{,}2$.
On peut remplir le carré magique de la manière suivante :

2,3	3,8	2,9
3,6	3	2,4
3,1	2,2	3,7

Réponse : (E)

12. Puisque le triangle PQX est rectangle en Q, alors

$$\angle PXQ = 90° - \angle QPX = 90° - 62° = 28°$$

Puisque $\angle PXQ$ et $\angle SXR$ sont des angles opposés, alors $\angle SXR = \angle PXQ = 28°$.
Puisque le triangle RXS est un triangle isocèle où $RX = SX$, alors $\angle XRS = \angle XSR = y°$.
Sachant que la somme des angles d'un triangle est égale à $180°$, alors :

$$\begin{aligned} \angle XRS + \angle XSR + \angle SXR &= 180° \\ y° + y° + 28° &= 180° \\ 2y + 28 &= 180 \\ 2y &= 152 \end{aligned}$$

donc $y = 76$.

Réponse : (C)

13. *Solution 1*
Étant donné que p, q, r, s est une liste d'entiers consécutifs arrangés en ordre croissant, on en déduit que q est 1 de plus que p et que r est 1 de moins que s.
Cela signifie que $q + r = (p + 1) + (s - 1) = p + s = 109$.

Solution 2
Étant donné que p, q, r, s est une liste d'entiers consécutifs arrangés en ordre croissant, on en déduit que $q = p + 1$, que $r = p + 2$ et que $s = p + 3$.
Puisque $p + s = 109$, donc $p + p + 3 = 109$ d'où $2p = 106$ ou $p = 53$.
Cela signifie que $q = 54$ et que $r = 55$. Donc, $q + r = 109$.

Réponse : (B)

14. Puisque le rapport du nombre de planches à roulettes au nombre de vélos était de 7 : 4, le nombre de planches à roulettes peut être exprimé de la forme $7k$ tandis que le nombre de vélos peut être exprimé de la forme $4k$, k étant un entier positif dans les deux cas.
Puisqu'il y avait 12 planches à roulettes de plus que de vélos, alors $7k - 4k = 12$ d'où $3k = 12$ ou $k = 4$.
Ainsi, le nombre total de planches à roulettes et de vélos est de $7k + 4k = 11k = 11 \times 4 = 44$.

Réponse : (A)

15. Afin que la moyenne de Sophie soit égale à 80 %, la somme de ses notes aux cinq épreuves doit être égale à $5 \times 80\ \% = 400\ \%$.
Après les trois premières épreuves, la somme de ses notes est égale à $73\ \% + 82\ \% + 85\ \% = 240\ \%$.
Par conséquent, elle atteindra son but tant que la somme de ses notes aux deux épreuves restantes soit égale à *au moins* $400\ \% - 240\ \% = 160\ \%$.
Dans les choix de réponse, les sommes des couples de notes sont égales à (A) 161 %, (B) 161 %, (C) 162 %, (D) 156 %, (E) 160 %.
Ainsi, le couple de notes qui ne permettrait pas à Sophie d'atteindre son but serait le couple du choix (D).

Réponse : (D)

16. *Solution 1*
Puisque le résultat doit être le même pour tout nombre réel x inférieur à -2, on reporte $x = -4$ dans chacune des cinq expressions :

(A) $x = -4$ (B) $x + 2 = -2$ (C) $\frac{1}{2}x = -2$ (D) $x - 2 = -6$ (E) $2x = -8$

Donc, $2x$ est l'expression avec la moindre valeur lorsque $x = -4$ et doit donc être l'expression dont la valeur est toujours la plus petite.

Solution 2
Pour tout nombre réel x, on sait que $x - 2$ est inférieur à x et que ce dernier est inférieur à $x + 2$.
Donc, parmi les cinq valeurs, ni x ni $x + 2$ ne peuvent être les plus petites.
Pour tout nombre réél négatif x, la valeur de $2x$ sera inférieure à la valeur de $\frac{1}{2}x$.
Donc, parmi les cinq valeurs, $\frac{1}{2}x$ ne peut pas être la plus petite.
Ainsi, la plus petite valeur est soit $x - 2$ soit $2x$.
Lorsque $x < -2$, on sait que $2x - (x - 2) = x + 2 < 0$.
Puisque $2x$ et $x - 2$ ont une différence qui est négative, donc $2x$ est la plus petite valeur parmi les cinq.

Réponse : (E)

17. Chaque animal est soit rayé ou tacheté. Aucun animal n'est à la fois rayé et tacheté.
Puisqu'il y a 100 animaux dont 62 sont tachetés, il y a donc $100 - 62 = 38$ animaux rayés.
Chaque animal rayé doit avoir soit des ailes, soit des cornes. Aucun animal n'a les deux.
Puisqu'il y a 28 animaux rayés dotés d'ailes, il y a donc $38 - 28 = 10$ animaux rayés dotés de cornes.
Tout animal à cornes doit être rayé ou tacheté.
Puisqu'il y a 36 animaux à cornes, il y a donc $36 - 10 = 26$ animaux tachetés qui sont dotés de cornes.

Réponse : (E)

18. À l'aide du théorème de Pythagore,

$$QT^2 = QP^2 + PT^2 = k^2 + k^2 = 2k^2$$

Puisque $QT > 0$, alors $QT = \sqrt{2}k$.
Puisque le triangle QTS est un triangle isocèle, alors $TS = QT = \sqrt{2}k$.
À l'aide du théorème de Pythagore,

$$QS^2 = QT^2 + TS^2 = (\sqrt{2}k)^2 + (\sqrt{2}k)^2 = 2k^2 + 2k^2 = 4k^2$$

Puisque $QS > 0$, alors $QS = 2k$.
Puisque le triangle QSR est un triangle isocèle, alors $SR = QS = 2k$.
Puisque le triangle QPT est rectangle en P, son aire est égale à $\frac{1}{2}(QP)(PT) = \frac{1}{2}k^2$.
Puisque le triangle QTS est rectangle en T, son aire est égale à

$$\tfrac{1}{2}(QT)(TS) = \tfrac{1}{2}(\sqrt{2}k)(\sqrt{2}k) = \tfrac{1}{2}(2k^2) = k^2$$

Puisque le triangle QSR est rectangle en S, son aire est égale à $\frac{1}{2}(QS)(SR) = \frac{1}{2}(2k)(2k) = 2k^2$.
Puisque les trois triangles ont une aire totale de 56, alors $\frac{1}{2}k^2 + k^2 + 2k^2 = 56$ ou $\frac{7}{2}k^2 = 56$, d'où $k^2 = 16$.
Puisque $k > 0$, alors $k = 4$.

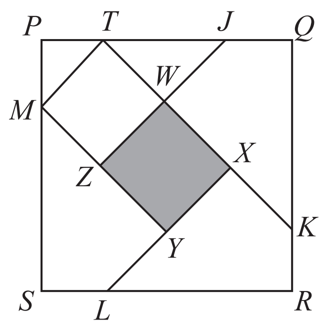
Réponse : (C)

19. Étant donné qu'il y a six boules rouges et trois boules vertes et qu'on en sélectionne quatre au hasard, ces quatre boules pourraient être :
- 4 boules rouges, ou
- 3 boules rouges et 1 boule verte, ou
- 2 boules rouges et 2 boules vertes, ou
- 1 boule rouge et 3 boules vertes.

Un groupe de 4 boules rouges n'a qu'un seul arrangement visiblement différent.
Un groupe composé de 3 boules rouges et d'une boule verte n'a que quatre arrangements visiblement différents : dans les arrangements, la boule verte peut être dans la 1re, 2e, 3e ou 4e position.
Un groupe composé de 2 boules rouges et de 2 boules vertes n'a que six arrangements visiblement différents car les boules rouges peuvent se trouver dans les couples de positions suivantes : 1re/2e, 1re/3e, 1re/4e, 2e/3e, 2e/4e ou 3e/4e.
Un groupe composé d'une boule rouge et de 3 boules vertes n'a que quatre arrangements visiblement différents : dans les arrangements, la boule rouge peut être dans la 1re, 2e, 3e ou 4e position.
En tout, il y a $1 + 4 + 6 + 4 = 15$ arrangements visiblement différents.

Réponse : (A)

20. Puisque les côtés du quadrilatère $WXYZ$ sont parallèles aux diagonales du carré $PQRS$ (et que les diagonales d'un carré sont perpendiculaires l'une à l'autre), donc les côtés adjacents du quadrilatère $WXYZ$ sont perpendiculaires les uns aux autres.
Cela signifie que le quadrilatère $WXYZ$ a quatre angles droits et est donc un rectangle.
Puisque la figure ne change pas lorsqu'elle subit une rotation de 90°, de 180° ou de 270°, donc $WX = XY = YZ = YW$. On en déduit alors que la figure $WXYZ$ est un carré.
Il faut avant tout déterminer la longueur de WZ afin de pouvoir calculer l'aire de $WXYZ$.
On ralonge le segment de droite KW afin qu'il coupe PQ en T. On relie aussi le point M au point T.



Puisque TK est parallèle à la diagonale PR, donc $\angle QTK = \angle QKT = 45°$, cela signifie que le triangle TQK est un triangle isocèle où $QT = QK$.
Puisque $QR = 40$ et que $KR = 10$, donc $QK = QR - KR = 30$, d'où $QT = 30$.
Puisque $PQ = 40$, donc $PT = PQ - QT = 10$.
Puisque $PM = PT = 10$, alors MPT est un triangle rectangle et est aussi isocèle, cela signifie que MT est parallèle à la diagonale SQ. (On n'a pas construit MT en s'attendant à ce que cela soit vrai mais il s'est avéré que ça l'était).
Puisque les côtés de $MTWZ$ sont parallèles aux diagonales du carré, donc $MTWZ$ est aussi un rectangle, cela signifie que $WZ = MT$.
Puisque $PM = PT$, donc

$$MT = \sqrt{PM^2 + PT^2} = \sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{200}$$

à l'aide du théorème de Pythagore.
Ainsi, $WZ = MT = \sqrt{200}$. Donc l'aire du carré $WXYZ$ est égale à WZ^2 ou 200.

Réponse : (B)

21. Le chiffre des unités de 5^{2019} est un 5 car le chiffre des unités de toute puissance de 5 sera toujours un 5.
On peut constater cela en dressant la liste des quelques premières puissances de 5 :

$$5^1 = 5 \quad 5^2 = 25 \quad 5^3 = 125 \quad 5^4 = 625 \quad 5^5 = 3125 \quad 5^6 = 15\,625$$

Lors de la multiplication d'entiers, le chiffre des unités du produit ne dépend que des chiffres des unités du multiplicande et du multiplicateur. Puisque $5 \times 5 = 25$ (et que les chiffres des unités sont 5), le chiffre des unités de toute puissance de 5 sera toujours un 5.

Le chiffre des unités de 3^{2019} est un 7 car il existe une régularité cyclique pour les chiffres des unités des puissances de 3, cette régularité est comme suit : 3,9,7,1,3,9,7,1, ...
On peut constater cela en dressant la liste des quelques premières puissances de 3 :

$$3^1 = 3 \quad 3^2 = 9 \quad 3^3 = 27 \quad 3^4 = 81 \quad 3^5 = 243 \quad 3^6 = 729$$

Puisque le chiffre des unités d'un produit ne dépend que des chiffres des unités du multiplicande et du multiplicateur et que nous multiplions par 3 pour passer d'une puissance à l'autre, alors une régularité s'établit car on finit par multiplier de manière cyclique la même suite de chiffres d'unités.
Puisque les chiffres des unités des puissances de 3 forment une suite cyclique de 4 chiffres d'unités et que 2016 est un multiple de 4, donc le chiffre des unités de 3^{2016} est un 1.
En suivant la suite cyclique des chiffres des unités des puissances de 3, le chiffre des unités de 3^{2019} sera donc un 7.

Puisque le chiffre des unités de 5^{2019} est un 5 et que le chiffre des unités de 3^{2019} est un 7, donc le chiffre des unités de leur différence est un 8. (Lorsqu'un entier dont le chiffre des unités est un 7 est soustrait d'un entier plus grand dont le chiffre des unités est un 5, leur différence aura un 8 comme chiffre des unités.)

Réponse : (E)

22. *Solution 1*
En respectant les conditions imposées dans le problème, le plus petit entier supérieur à 2019 peut être formé à l'aide des deux prochains entiers consécutifs, soit 20 et 21, afin d'obtenir l'entier à quatre chiffres 2120.
Le plus grand entier que l'on peut former de cette manière est 9998.
Donc, voici la liste des entiers qui peuvent être formés de cette manière :

$$2120, 2221, 2322, \ldots, 9796, 9897, 9998$$

Entre chaque paire d'entiers consécutifs, on constate une différence de 101 (car de nombre en nombre, le chiffre des centaines augmente de 1 et le chiffre des unités augmente aussi de 1).
Puisque les entiers dans cette liste sont équidistants, leur somme sera égale au produit de la multiplication du nombre d'entiers dans la liste par l'entier qui représente la moyenne de la liste.
L'entier qui représente la moyenne de la liste est égal à $\dfrac{2120+9998}{2} = \dfrac{12118}{2} = 6059$.
Puisque la différence entre chaque paire d'entiers consécutifs est de 101, il doit donc exister $\dfrac{9998-2120}{101} = \dfrac{7878}{101} = 78$ incréments de 101 dans la liste au complet.
Puisqu'il y a 78 incréments, il y a donc 79 entiers.
Cela signifie que la somme des entiers de la liste est égale à $79 \times 6059 = 478\,661$.

Solution 2
Comme dans la solution 1, voici la liste des entiers qui peuvent être formés de cette manière : $2120, 2221, 2322, \ldots, 9796, 9897, 9998$.
Si la somme de ces entiers est égale à S, alors

$$\begin{aligned}
S &= 2120 + 2221 + 2322 + \ldots + 9796 + 9897 + 9998 \\
&= (2100 + 2200 + 2300 + \cdots + 9700 + 9800 + 9900) \\
&\qquad + (20 + 21 + 22 + \cdots + 96 + 97 + 98) \\
&= 100(21 + 22 + 23 + \cdots + 96 + 97 + 98 + 99) \\
&\qquad + (20 + 21 + 22 + \cdots + 96 + 97 + 98) \\
&= 100(21 + 22 + 23 + \cdots + 96 + 97 + 98 + 99) \\
&\qquad + (21 + 22 + \cdots + 96 + 97 + 98 + 99) + 20 - 99 \\
&= 101(21 + 22 + 23 + \cdots + 96 + 97 + 98 + 99) - 79
\end{aligned}$$

Il y a 79 nombres dans la liste d'entiers consécutifs de 21 à 99 ; le nombre du milieu étant 60.
Donc, $S = 101 \times 79 \times 60 - 79 = 478\,661$.

Réponse : (C)

23. Puisque la roue roule à vitesse constante, alors le pourcentage de temps qu'une partie ombrée de la roue touche une partie ombrée du chemin sera égal au pourcentage de la longueur totale du chemin où il y a un contact «ombré sur ombré».
Puisque la roue a un rayon de 2 m, donc sa circonférence est égale à $2\pi \times 2$ m, c.-à-d. 4π m.
Puisque la roue est divisée en quatre quarts, alors la partie de la circonférence qu'occupe chaque quart est égale à π m.
Soit l'extrémité gauche du chemin 0 m.
Lorsque la roue tourne une première fois, la première partie ombrée de la roue touche le chemin entre 0 m et $\pi \approx 3{,}14$ m.
Alors que la route continue à tourner, la deuxième partie ombrée de la roue touche le chemin entre $2\pi \approx 6{,}28$ m et $3\pi \approx 9{,}42$ m.
À chaque multiple impair de 1 m, 1 m du chemin est ombré. À chaque multiple pair de 1 m, 1 m du chemin est non ombré.
Donc, la première partie ombrée de la roue touche une partie ombrée du chemin entre 1 m et 2 m et entre 3 m et π m.
La deuxième partie ombrée de la roue touche une partie ombrée du chemin entre 7 m et 8 m et entre 9 m et 3π m.
Donc, la longueur totale de «ombré sur ombré» est égale à $1 \text{ m} + (\pi - 3) \text{ m} + 1 \text{ m} + (3\pi - 9) \text{ m}$ ou $(4\pi - 10)$ m.
La longueur totale du chemin sur lequel roule la roue est de 4π m.
Cela signifie que le pourcentage de temps requis est égal à $\dfrac{(4\pi - 10) \text{ m}}{4\pi \text{ m}} \times 100\ \% \approx 20{,}4\ \%$.
Parmi les choix de réponse, (A) 20 % est le choix le plus proche à cette réponse.

Réponse : (A)

24. On remarque avant tout que $88\,663\,311\,000$ est divisible par 792. (Chose qu'on pourrait vérifier en effectuant la division.)
Ainsi, $88\,663\,311\,000\,000$ est aussi divisible par 792.
Puisque $88\,663\,311\,000\,000$ est divisible par 792, donc $88\,663\,311\,pqr\,s48$ est seulement divisible par 792 lorsque $pqr\,s48$ est divisible par 792. (Car si la différence entre deux nombres entiers est divisible par d, soit ces nombres sont tous les deux divisibles par d, soit ils ne le sont pas.)
48 est le plus petit entier de la forme $pqr\,s48$ (qui est "000 048") et 999 948 est le plus grand entier de la forme $pqr\,s48$.
Puisque $999\,948 \div 792 \approx 1262{,}6$, alors les multiples de 792 entre 48 et 999 948 sont des entiers de la forme $792 \times n$ où $1 \leq n \leq 1262$.
Supposons que $792 \times n = pqr\,s48$, n étant un entier.
En comparant les chiffres des unités, on voit que le chiffre des unités de n doit être un 4 ou un 9.
Cela signifie que $n = 10c + 4$ ou $n = 10c + 9$, c étant un entier supérieur ou égal à 0 ($c \geq 0$).

Dans le premier cas, $792(10c + 4) = 7920c + 3168$.
Cet entier a un 8 comme chiffre des unités.
Afin que cet entier ait un 4 comme chiffre des dizaines, $2c + 6$ doit avoir un 4 comme chiffre des unités. Ceci est vrai uniquement lorsque c a un 4 ou un 9 comme chiffre des unités.
Cela signifie que c peut être égal à $4, 9, 14, 19, 24, \ldots$.
Cela signifie aussi que n peut être égal à $44, 94, 144, 194, 244, \ldots$.
Puisque $1 \leq n \leq 1262$, donc il existe 25 valeurs possibles de n où ce dernier aurait un 4 comme

chiffre des unités car il y a 2 valeurs de n entre 0 et 100, 2 telles valeurs entre 100 et 200, et ainsi de suite jusqu'à 1200. La dernière telle valeur se trouve entre 1200 et 1262, soit 1244.

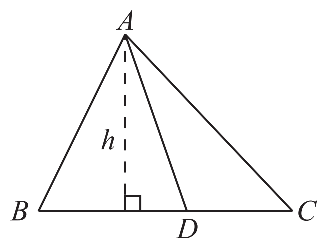
Dans le deuxième cas, $792(10c + 9) = 7920c + 7128$.
Cet entier a un 8 comme chiffre des unités.
Afin que cet entier ait un 4 comme chiffre des dizaines, $2c + 2$ doit avoir un 4 comme chiffre des unités. Ceci est vrai uniquement lorsque c a un 1 ou un 6 comme chiffre des unités.
Cela signifie que c peut être égal à $1, 6, 11, 16, 21, \ldots$.
Cela signifie aussi que n peut être égal à $19, 69, 119, 169, 219, \ldots$.
Puisque $1 \leq n \leq 1262$, donc il existe 25 valeurs possibles de n où ce dernier aurait un 9 comme chiffre des unités.

En tout, il y a $25 + 25 = 50$ entiers positifs à 14 chiffres de la forme $88\,663\,311\,pqr\,s48$ qui sont divisibles par 792.

Réponse : (E)

25. Dans le triangle ABC, si D est situé sur BC, alors

$$\frac{\text{Aire du triangle } ABD}{\text{Aire du triangle } ACD} = \frac{BD}{CD}$$



car les triangles ABD et ACD ont la même hauteur, h, d'où

$$\frac{\text{Aire du triangle } ABD}{\text{Aire du triangle } ACD} == \frac{\frac{1}{2} \times BD \times h}{\frac{1}{2} \times CD \times h} = \frac{BD}{CD}$$

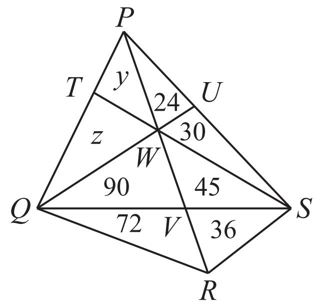
De plus, sachant que le point V est situé sur le côté QS du triangle WQS et sur le côté QS du triangle RQS, on comprend alors que

$$\frac{\text{Aire du triangle } QVW}{\text{Aire du triangle } SVW} = \frac{QV}{SV} = \frac{\text{Aire du triangle } QVR}{\text{Aire du triangle } SVR}$$

On combine la première et la troisième partie de cette égalité afin d'obtenir les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{8x+50}{5x+20} &= \frac{8x+32}{5x+11} \\ (8x+50)(5x+11) &= (8x+32)(5x+20) \\ 40x^2 + 88x + 250x + 550 &= 40x^2 + 160x + 160x + 640 \\ 338x + 550 &= 320x + 640 \\ 18x &= 90 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Puisque $x = 5$, donc on peut calculer les aires de plusieurs parties de la figure, ces aires seront inscrites dans les parties correspondantes de la figure :



Soit y l'aire du triangle PTW. Soit z l'aire du triangle QTW.
On sait que

$$\frac{\text{Aire du triangle } QVW}{\text{Aire du triangle } SVW} = \frac{QV}{SV}$$

donc $\dfrac{QV}{SV} = \dfrac{90}{45} = 2$.
Puisque V est situé sur le côté QS du triangle PQS, alors

$$\frac{\text{Aire du triangle } PQV}{\text{Aire du triangle } PSV} = \frac{QV}{SV} = 2$$

donc $\dfrac{y+z+90}{99} = 2$, d'où $y+z+90 = 198$ ou $y+z = 108$.
Enfin, sachant que le point W se trouve sur le côté TS du triangle PTS ainsi que sur le côté TS du triangle QTS, alors

$$\frac{y}{54} = \frac{TW}{WS} = \frac{z}{135}$$

d'où $135y = 54z$ ou $5y = 2z$ ou $z = \frac{5}{2}y$.
Donc, $y + \frac{5}{2}y = 108$ ou $\frac{7}{2}y = 108$ d'où $y = \frac{216}{7} = 30\frac{6}{7}$.
Parmi les choix de réponse, (E) 31 est le choix le plus proche à cette réponse.

Réponse : (E)