Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatie 2019

le mercredi 10 avril 2019
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 11 avril 2019
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Le rayon de chaque trou est de 2 cm, donc chaque trou a un diamètre de 4 cm.
Puisqu'il y a 4 trous, leurs diamètres occupent donc une distance totale de $4 \times 4 = 16$ cm sur la ligne médiane de 91 cm.
Ainsi, les 5 distances égales qui séparent les trous adjacents le long de la ligne médiane occupent une distance totale de $91 - 16 = 75$ cm. Donc, la distance qui sépare les trous adjacents le long de la ligne médiane est égale à $\frac{75}{5} = 15$ cm.

(b) Soit r cm le rayon de chaque trou, donc chaque trou a un diamètre de $2r$ cm.
Puisqu'il y a 4 trous, leurs diamètres occupent donc une distance totale de $4 \times 2r = 8r$ cm sur la ligne médiane.
La distance qui sépare les trous adjacents le long de la ligne médiane est égale au rayon, r cm. Donc les 5 distances égales qui séparent les trous adjacents le long de la ligne médiane occupent une distance totale de $5r$ cm.
Puisque la ligne médiane a une longueur de 91 cm, alors $8r + 5r = 91$ ou $13r = 91$, ainsi chaque trou a un rayon de $\frac{91}{13} = 7$ cm.

(c) *Solution 1*
Comme dans la partie (b), si chaque trou a un diamètre de $2r$ cm, alors les 4 diamètres occupent une distance totale de $4 \times 2r = 8r$ cm sur la ligne médiane.
Si les trous adjacents se trouvent à 5 cm les uns des autres, alors ces 5 distances égales occupent une distance totale de 25 cm sur la ligne médiane.
Puisque la ligne médiane a une longueur de 91 cm, alors $8r + 25 = 91$ ou $8r = 66$, ainsi chaque trou a un rayon de $\frac{66}{8} = 8{,}25$ cm.
Or la distance verticale entre la ligne médiane et chaque bord du morceau de métal est de 8 cm. Comme les trous doivent être circulaires, le rayon de chaque trou ne peut pas être de 8,25 cm. La distance entre les trous adjacents ne peut donc pas être de 5 cm.

Solution 2
La distance minimale possible entre les trous adjacents est déterminée en maximisant le rayon de chacun des cercles.
Comme les trous doivent être circulaires et que la distance verticale entre la ligne médiane et chaque bord du morceau de métal est de 8 cm, le rayon maximal est de 8 cm.
Puisqu'il y a 4 trous, leurs diamètres occupent donc une distance totale de $4 \times 16 = 64$ cm sur la ligne médiane.
Puisque la ligne médiane a une longueur de 91 cm, alors ces 5 distances égales occupent une distance minimale totale de $91 - 64 = 27$ cm.
Ainsi, la distance minimale entre les trous adjacents est de $\frac{27}{5} = 5{,}4$ cm. On ne peut donc pas admettre 5 cm comme distance qui séparerait les trous adjacents puisque cette valeur est inférieure à la valeur minimale de 5,4 cm.

2. (a) Pour ajouter une bosse, le segment de droite de longueur 21 est d'abord divisé en trois segments dont chacun a une longueur de $\frac{21}{3} = 7$.
Parmi ces trois segments, on supprime celui du milieu et on ajoute deux nouveaux segments ayant chacun une longueur de 7.
Ainsi, après l'ajout d'une bosse à un segment de longueur 21, le nouveau chemin aura une longueur de $4 \times 7 = 28$.

(b) Un chemin avec une seule bosse a quatre segments de longueurs égales.
Si un tel chemin a une longueur de 240, alors chacun des quatre segments a une longueur de $\frac{240}{4} = 60$.
Ainsi, le segment de droite d'origine avait trois segments dont chacun avait une longueur de 60. Donc, le segment de droite d'origine avait une longueur de $3 \times 60 = 180$.

(c) Pour ajouter la première bosse, le segment de droite de longueur 36 est d'abord divisé en trois segments dont chacun a une longueur de $\frac{36}{3} = 12$.
Parmi ces trois segments, on supprime celui du milieu et on ajoute deux nouveaux segments ayant chacun une longueur de 12.
Ainsi, après l'ajout d'une première bosse à un segment de longueur 36, le nouveau chemin a une longueur de $4 \times 12 = 48$.

On ajoute ensuite une bosse à chacun des quatre segments de longueur 12.
Considérons l'ajout d'une bosse à l'un de ces quatre segments.
Le segment de longueur 12 est divisé en trois segments dont chacun a une longueur de $\frac{12}{3} = 4$.
Parmi ces trois segments, on supprime celui du milieu et on ajoute deux nouveaux segments ayant chacun une longueur de 4. Cette partie du chemin final a donc une longueur de $4 \times 4 = 16$.
Puisqu'on effectue ce processus aux quatre segments de longueur 12, la longueur totale du chemin final est égale à $4 \times 16 = 64$.

(d) Pour ajouter la première bosse, le segment de droite de longueur n est d'abord divisé en trois segments dont chacun a une longueur de $\frac{n}{3}$.
Parmi ces trois segments, on supprime celui du milieu et on ajoute deux nouveaux segments ayant chacun une longueur de $\frac{n}{3}$.
Ainsi, après l'ajout d'une première bosse à un segment de longueur n, le chemin 1 a une longueur de $4 \times \frac{n}{3} = \frac{4}{3}n$.

Afin de créer le chemin 2, on ajoute une bosse à chacun des quatre segments de longueur $\frac{n}{3}$.
Considérons l'ajout d'une bosse à l'un de ces quatre segments.
Le segment de longueur $\frac{n}{3}$ est divisé en trois segments dont chacun a une longueur de $\frac{1}{3} \times \frac{n}{3}$.
Parmi ces trois segments, on supprime celui du milieu et on ajoute deux nouveaux segments ayant chacun une longueur de $\frac{1}{3} \times \frac{n}{3}$. Donc la nouvelle longueur est égale à $4 \times \frac{1}{3} \times \frac{n}{3} = \frac{4}{3^2}n$.
Puisqu'on effectue ce processus à quatre tels segments, la longueur totale du chemin 2 est égale à $4 \times \frac{4}{3^2}n = \frac{4^2}{3^2}n$ ou $\left(\frac{4}{3}\right)^2 n$.

En résumé, lorsqu'on ajoute une bosse au segment de droite de longueur n, on obtient le chemin 1 dont la longueur est de $\frac{4}{3}n$.

Lorsqu'on ajoute les bosses au chemin 1, on obtient le chemin 2 dont la longueur est de $\left(\dfrac{4}{3}\right)^2 n$.

Ce processus se poursuivra de manière que chaque nouveau chemin ait une longueur totale égale à $\dfrac{4}{3}$ de la longueur du chemin précédent.

C'est-à-dire, le chemin 3 aura une longueur de $\left(\dfrac{4}{3}\right)^3 n$, le chemin 4 aura une longueur de $\left(\dfrac{4}{3}\right)^4 n$ et le chemin 5 aura une longueur de $\left(\dfrac{4}{3}\right)^5 n$.

Si la longueur du chemin 5 est un entier, alors n doit être divisible par 3^5 (puisqu'il n'y a pas de facteurs 3 dans 4^5).

Le plus petit entier n qui est divisible par 3^5 est $3^5 = 243$.

Donc, la plus petite valeur possible de n pour laquelle la longueur du chemin 5 est un entier est 243.

3. (a) La moyenne arithmétique de 36 et 64 est $\dfrac{36+64}{2} = \dfrac{100}{2} = 50$.

La moyenne géométrique de 36 et 64 est $\sqrt{36 \cdot 64} = \sqrt{6^2 \cdot 8^2} = 6 \cdot 8 = 48$.

(b) Si la moyenne arithmétique de deux nombres réels positifs, soit x et y, est égale à 13, alors $\dfrac{x+y}{2} = 13$.

Si la moyenne géométrique de deux nombres réels positifs, soit x et y, est égale à 12, alors $\sqrt{xy} = 12$.

En multipliant la première équation par 2, on obtient $x + y = 26$ d'où $x = 26 - y$.

On reporte $x = 26 - y$ dans la deuxième équation et on élève ensuite les deux côtés de cette nouvelle équation au carré afin d'obtenir $(26 - y)y = 12^2$ ou $y^2 - 26y + 144 = 0$.

En factorisant le côté gauche de cette équation, on obtient $(y - 8)(y - 18) = 0$ d'où $y = 8$ ou $y = 18$.

Lorsque $y = 8$, $x = 26 - 8 = 18$. Lorsque $y = 18$, $x = 8$.

C'est-à-dire, les nombres 8 et 18 ont une moyenne arithmétique de 13 et une moyenne géométrique de 12.

(c) Il nous faut résoudre l'équation $\dfrac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = 1$, x et y étant des entiers positifs où $x < y \leq 50$.

On a donc :

$$\begin{array}{rcll}
\dfrac{x+y}{2} - \sqrt{xy} &=& 1 & \\
x - 2\sqrt{xy} + y &=& 2 & \\
(\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{xy} + (\sqrt{y})^2 &=& 2 & (\text{car } x, y > 0) \\
(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 &=& 2 & \\
\sqrt{x} - \sqrt{y} &=& \pm\sqrt{2} & \\
\sqrt{y} - \sqrt{x} &=& \sqrt{2} & (\text{car } y > x) \\
\sqrt{y} &=& \sqrt{x} + \sqrt{2} & \\
y &=& x + 2 + 2\sqrt{2x} &
\end{array}$$

Puisque x est un entier positif, alors $y = 2 + x + 2\sqrt{2x}$ est un entier positif uniquement lorsque $\sqrt{2x}$ est un entier positif.
Cela se passe uniquement lorsque $x = 2m^2$ pour des valeurs entières de m.
Puisque $x < y \leq 50$, alors $2m^2 < 50$ ou $m^2 < 25$, d'où m est donc un entier de 1 à 4.
On détermine alors les valeurs correspondantes de x et de y dans le tableau ci-dessous.

m	$x = 2m^2$	$y = 2 + x + 2\sqrt{2x}$
1	2	8
2	8	18
3	18	32
4	32	50

Les couples (x, y) qui remplissent les conditions requises sont $(2, 8), (8, 18), (18, 32)$ et $(32, 50)$.

4. (a) On commence en multipliant la première équation par 5 et la deuxième équation par 3 afin d'obtenir :

$$\begin{aligned} 15x + 20y &= 50 \\ 15x + 18y &= 3c \end{aligned}$$

On soustrait la deuxième équation de la première afin d'obtenir

$$(15x + 20y) - (15x + 18y) = 50 - 3c$$

ou $2y = 50 - 3c$ que l'on réécrit ensuite sous la forme

$$y = 25 - \frac{3}{2}c$$

On reporte cette équation dans la première des deux équations d'origine afin d'obtenir

$$3x + 4\left(25 - \frac{3}{2}c\right) = 10$$

On distribue le facteur 4 aux termes entre parenthèses afin d'obtenir $3x + 100 - 6c = 10$ d'où $3x = 6c - 90$ ou $x = 2c - 30$. Donc, en fonction de c, on a

$$(x, y) = \left(2c - 30, 25 - \frac{3}{2}c\right)$$

(b) De la même manière que dans la partie (a), on va exprimer x et y en fonction de d.
On en soutirera ensuite les valeurs de d qui admettraient des entiers comme valeurs de x et de y.
On multiplie la première équation par 4 afin d'obtenir $4x + 8y = 12$.
On soustrait $4x + dy = 6$ de $4x + 8y = 12$ afin d'obtenir $8y - dy = (8 - d)y = 6$.
Cela signifie que $y = \dfrac{6}{8 - d}$.
On obtient $x = 3 - 2y$ de la première équation.
On reporte $y = \dfrac{6}{8 - d}$ dans cette dernière équation. On a donc

$$x = 3 - 2\left(\frac{6}{8 - d}\right) = 3 - \frac{12}{8 - d}$$

Il faut déterminer les valeurs de d qui admettraient des entiers comme valeurs de $y = \dfrac{6}{8-d}$ et de $x = 3 - \dfrac{12}{8-d}$.

Puisque 3 est un entier, x ne sera un entier que lorsque $\dfrac{12}{8-d}$ est un entier.

Afin que ceci soit le cas, $8 - d$ doit être un diviseur de 12.

Par contre, afin que $y = \dfrac{6}{8-d}$ soit un entier, $8 - d$ doit être un diviseur de 6.

Puisque tout diviseur de 6 est aussi un diviseur de 12, cela signifie que si y est un entier, alors x le sera aussi.

Ainsi, il faut tout simplement déterminer les valeurs de d qui admettraient des entiers comme valeurs de y.

Les diviseurs de 6 (et donc les valeurs possibles de $8 - d$) sont $-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3$ et 6.

Ainsi, les valeurs possibles de d sont $2, 5, 6, 7, 9, 10, 11$ et 14.

(On peut vérifier que chacune de ces valeurs de d admet des entiers comme valeurs de x et de y.)

(c) Afin de simplifier les choses, on va d'abord montrer que, quelles que soient les valeurs de x, de y et de k, si n est un entier, alors y doit être égal à -1.

Dans ce but, on commence en multipliant la première équation par -2 et la deuxième par 3 afin d'obtenir

$$\begin{aligned} -(18n+12)x + (6n+4)y &= -6n^2 - 12n - (6k+10) \\ (18n+12)x + (9n^2+6n)y &= -3n^2 + (6k+6) \end{aligned}$$

On additionne ensuite les deux équations.

Lors de cette addition, les expressions $-(18n+12)$ et $(18n+12)$ sont opposées et s'annulent d'où on obtient alors

$$(9n^2 + 12n + 4)y = -9n^2 - 12n - 4$$

On voit que $(3n + 2)^2 = 9n^2 + 12n + 4$, on réécrit donc cette équation sous la forme

$$y(3n + 2)^2 = -(3n + 2)^2$$

Supposons que $(3n+2)^2 = 0$. Alors $3n+2 = 0$ d'où $n = -\frac{2}{3}$. Ce dernier n'est pas un entier.

Ainsi, si on suppose que n est un entier, on peut diviser l'équation ci-dessus par $(3n + 2)^2$ afin d'obtenir

$$y = \frac{-(3n+2)^2}{(3n+2)^2} = -1$$

On cherche à trouver des valeurs entières positives de k pour lesquelles il existe des entiers n qui admettraient (x, y) comme solution au système d'équations où x et y seraient des entiers.

Dorénavant on supposera donc que n est un entier qui, comme on l'a montré ci-dessus, veut dire que $y = -1$.

De la première équation, on a alors

$$(9n + 6)x - (3n + 2)(-1) = 3n^2 + 6n + (3k + 5)$$

que l'on peut réécrire de la forme

$$(9n + 6)x = 3n^2 + 3n + 3k + 3 \tag{1}$$

La deuxième équation devient

$$(6n+4)x+(3n^2+2n)(-1)=-n^2+(2k+2)$$

que l'on peut réécrire de la forme

$$(6n+4)x \quad = \quad 2n^2+2n+2k+2 \tag{2}$$

Si l'on divise l'équation (1) par 3 ou l'équation (2) par 2, on obtient

$$(3n+2)x=n^2+n+1+k$$

On veut que n, k et x soient tous des entiers. Cela veut dire que les valeurs de n et de k doivent admettre $n^2+n+1+k$ comme multiple de $3n+2$.
Donc, on va montrer que $n^2+n+1+k$ est un multiple de $3n+2$ uniquement si $3(n^2+n+1+k)$ est un multiple de $3n+2$.
Si l'on suppose que $n^2+n+1+k$ est un multiple de $3n+2$, il est donc vrai que $3(n^2+n+1+k)$ est un multiple de $3n+2$.
On remarque que $3n+2$ est égal à 2 de plus qu'un multiple de 3, alors $3n+2$ n'est pas un multiple de 3.
Cela signifie que $3n+2$ n'a pas 3 comme facteur premier. Alors si $3(n^2+n+k+1)$ est un multiple de $3n+2$, cela signiferait à son tour que $n^2+n+1+k$ est un multiple de $3n+2$.
En résumé, on veut donner un sens aux couples d'entiers (n, k) qui admettraient $n^2+n+1+k$ comme multiple de $3n+2$.
Comme on l'a montré plus tôt, cela signifie la même chose que de trouver des couples d'entiers (n, k) qui admettraient $3n^2+3n+3+3k$ comme multiple de $3n+2$.
En réorganisant et en factorisant, cela revient à trouvers des couples d'entiers (n, k) qui admettraient $n(3n+2)+n+3+3k$ comme multiple de $3n+2$.
On remarque que

$$\frac{n(3n+2)+n+3+3k}{3n+2}=n+\frac{n+3+3k}{3n+2}$$

et que l'expression du côté droit est uniquement un entier si $n+3+3k$ est un multiple de $3n+2$.
Donc, il faut trouver les couples d'entiers (n, k) qui admettraient $n+3+3k$ comme multiple de $3n+2$.
À l'aide du même raisonnement qu'avant, puisque $3n+2$ n'a pas 3 comme facteur premier, alors $n+3+3k$ est un multiple de $3n+2$ uniquement si $3(n+3+3k)=3n+9+9k$ est un multiple de $3n+2$.
On remarque que

$$\frac{3n+9+9k}{3n+2}=\frac{(3n+2)+(7+9k)}{3n+2}=1+\frac{7+9k}{3n+2}$$

donc $3n+9+9k$ est un multiple de $3n+2$ uniquement si $\dfrac{7+9k}{3n+2}$ est un entier, ou si $7+9k$ est un multiple de $3n+2$.
En rassemblant le tout et sachant que n et k sont des entiers, le système d'équations a (x, y) comme solution, x et y étant des entiers, précisément quand $7+9k$ est un multiple de $3n+2$.

Ayant réarticulé la question de cette manière, on cherche à déterminer l'entier positif k pour lequel il y a seulement 8 entiers n qui admettraient $3n + 2$ comme facteur de $9k + 7$. Cela signifie qu'on a besoin d'un entier positif k qui ferait de sorte qu'exactement huit des facteurs de $9k + 7$ soient égaux à deux de plus qu'un multiple de 3.

En commençant par $k = 1$, on a $9k + 7 = 16$.
Les facteurs de 16 sont $-16, -8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8$ et 16, desquels seulement $-16, -4, -1, 2$ et 8 sont 2 de plus qu'un multiple de 3.

Lorsque $k = 2$, $9k + 7 = 25$.
Les facteurs de 25 sont $-25, -5, -1, 1, 5$ et 25.
Il y a moins de huit facteurs au total, donc $k = 2$ est inadmissible.

Lorsque $k = 3$, $9k + 7 = 34$.
Les facteurs de 34 sont $-34, -17, -2, -1, 1, 2, 17, 34$, desquels seulement $-34, -1, 2$ et 17 sont 2 de plus qu'un multiple de 3.

Lorsque $k = 4$, $9k + 7 = 43$. Puisque ce dernier est un nombre premier, il n'a donc que quatre facteurs au total d'où $k = 4$ est alors inadmissible.

Lorsque $k = 5$, $9k + 7 = 52$.
Les facteurs de 52 sont $-52, -26, -13, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 13, 26$ et 52, desquels seulement $-52, -13, -4, -1, 2$ et 26 sont 2 de plus qu'un multiple de 3.

Lorsque $k = 6$, $9k + 7 = 61$. Puisque ce dernier est un nombre premier, il n'a donc que quatre facteurs au total d'où $k = 6$ est inadmissible.

Lorsque $k = 7$, $9k + 7 = 70$.
Les facteurs de 70 sont

$$-70, -35, -14, -10, -7, -5, -2, -1, 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35 \text{ et } 70$$

desquels seulement $-70, -10, -7, -1, 2, 5, 14$ et 35 sont deux de plus qu'un multiple de 3.
Il y a précisément 8 nombres dans cette liste.
Donc, si $k = 7$, il y a précisément huit entiers n ($-70, -10, -7, -1, 2, 5, 14$ et 35) pour lesquels le système d'équations a (x, y) comme solution, x et y étant des entiers.
(Il est à noter qu'il existe d'autres valeurs de k qui répondent aux critères donnés.)