



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatie

(11^e année – Sec. V)

le mercredi 10 avril 2019

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 11 avril 2019

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)



UNIVERSITY OF
WATERLOO

Durée : 75 minutes

©2019 University of Waterloo

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 4

Chaque question vaut 10 points.

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci :



- Chacune vaut 2 ou 3 points.
- Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
- **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.

2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci :



- Elles valent le reste des 10 points attribués à la question.
- La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
- Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
- Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.



ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.

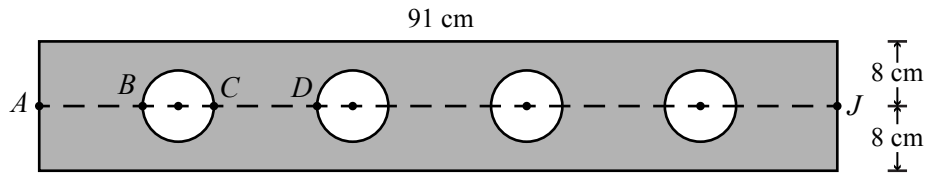
Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, et leur niveau scolaire, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca. Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

NOTE :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de  , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de  , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent être présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
7. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Fryer, Galois ou Hypatie.

1. Dans la figure suivante, un morceau de métal rectangulaire mesure 91 cm sur 16 cm. On en découpe quatre trous circulaires identiques. Les centres des trous circulaires sont tous situés sur la ligne médiane du rectangle, soit AJ . Ces quatre trous se trouvent aussi à distances égales les uns des autres. Donc, par exemple, $AB = CD$.



- (a) Si le rayon de chaque trou est de 2 cm, quelle est la distance qui sépare les trous adjacents le long de la ligne médiane (c.-à-d. quelle est la longueur de CD) ?
- (b) Si la distance qui sépare les trous adjacents le long de la ligne médiane est égale au rayon de chaque trou, quel est le rayon de chaque trou ?
- (c) Sachant que les trous doivent être circulaires, démontrer pourquoi cette condition ne permettrait pas une valeur de 5 cm comme distance qui séparerait les trous adjacents.

2. On peut ajouter une *bosse* à tout segment de droite à l'aide du processus suivant :
 - diviser le segment en trois segments de longueurs égales,
 - supprimer le segment du milieu,
 - ajouter une *bosse* dont la forme est un triangle équilatéral où la longueur de chaque côté est égale à la longueur du segment qui a été supprimé.

La série de figures ci-dessous montre l'ajout d'une *bosse* à un segment de droite de longueur 3 et la transformation de ce dernier en un chemin de longueur 4.





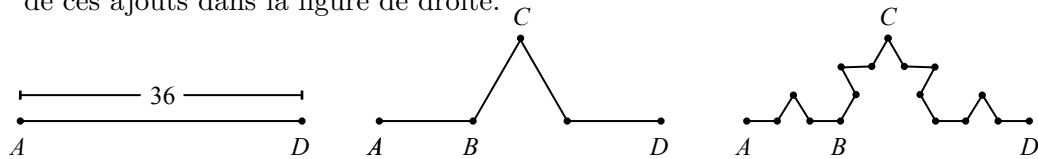
(a) Un segment de droite a une longueur de 21. Que sera la longueur du chemin après l'ajout d'une bosse ?



(b) Un chemin avec une seule bosse a une longueur de 240. Quelle était la longueur du segment de droite d'origine ?



(c) Lin commence par un segment de droite de longueur 36 et y ajoute une bosse afin de créer un chemin. Elle ajoute ensuite une bosse à chaque segment de droite dont était composé le chemin. Parmi les figures ci-dessous, on voit le résultat final de ces ajouts dans la figure de droite.



Quelle est la longueur totale du chemin illustré dans la figure de droite des figures ci-dessus ?



(d) Ann commence par un segment de droite dont la longueur est égale à un entier positif n et y ajoute une bosse afin de créer le chemin 1. Elle crée ensuite le chemin 2 en ajoutant une bosse à chaque segment de droite dont était composé le chemin 1. Elle continue ce processus de manière à créer les chemins 3, 4 et 5. Si la longueur du chemin 5 est un entier, déterminer la plus petite valeur possible de n .

3. La *moyenne arithmétique* de deux nombres réels positifs, soit x et y , est égale à la moitié de la somme des deux nombres, soit $\frac{x+y}{2}$. La *moyenne géométrique* de deux nombres réels positifs, soit x et y , est égale à la racine carrée du produit des deux nombres, soit \sqrt{xy} .



(a) Quelles sont la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de 36 et 64 ?



(b) Déterminer un couple de nombres réels positifs dont la moyenne arithmétique est égale à 13 et dont la moyenne géométrique est égale à 12.



(c) Pour deux entiers positifs x et y , lorsqu'on soustrait la moyenne géométrique de la moyenne arithmétique, on obtient une différence de 1 (c.-à.d. la moyenne arithmétique moins la moyenne géométrique font 1). Déterminer, avec justifications, les couples (x, y) où $x < y \leq 50$ qui satisfont cette condition.

4.



(a) Supposons que c soit un nombre réel. Résoudre le système d'équations afin d'exprimer x et y en fonction de c :

$$3x + 4y = 10$$

$$5x + 6y = c$$



(b) Déterminer tous les entiers d pour lesquels le système d'équations

$$x + 2y = 3$$

$$4x + dy = 6$$

a (x, y) comme solution, x et y étant des entiers.



(c) Déterminer l'entier positif k pour lequel il y a seulement 8 entiers n pour lesquels le système d'équations

$$(9n + 6)x - (3n + 2)y = 3n^2 + 6n + (3k + 5)$$

$$(6n + 4)x + (3n^2 + 2n)y = -n^2 + (2k + 2)$$

a (x, y) comme solution, x et y étant des entiers.



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Hypatie de 2019! Chaque année, plus de 260 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire ou au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2019.

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- des copies gratuites des concours précédents
- des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
- des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- obtenir des renseignements au sujet des concours de 2019/2020
- inscrire vos élèves aux Concours canadiens de mathématiques de niveau intermédiaire et supérieur qui auront lieu en novembre
- jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11^e et 12^e année
- vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
- vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
- vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
- trouver les résultats de vos élèves dans les concours