Le CENTRE d'ÉDUCATION

en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Gauss 2019

(7e et 8e années – Secondaire I et II)

le mercredi 15 mai 2019

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 16 mai 2019

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

Personnel du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

Ed Anderson
Jeff Anderson
Terry Bae
Jacquelene Bailey
Shane Bauman
Jenn Brewster
Ersal Cahit
Sarah Chan
Serge D'Alessio
Rich Dlin
Fiona Dunbar
Mike Eden
Barry Ferguson
Brian Fernandes
Judy Fox
Carley Funk
Steve Furino
John Galbraith
Lucie Galinon
Robert Garbary
Melissa Giardina
Rob Gleeson
Sandy Graham
Conrad Hewitt
Angie Hildebrand
Carrie Knoll
Judith Koeller
Laura Kreuzer
Paul Leistra
Bev Marshman
Josh McDonald
Paul McGrath
Mike Miniou
Carol Miron
Dean Murray
Jen Nelson
Ian Payne
Anne Petersen
J.P. Pretti
Kim Schnarr
Carolyn Sedore
Ashley Sorensen
Ian VanderBurgh
Troy Vasiga
Heather Vo

Comité du concours Gauss

Ashley Sorensen (présidente), University of Waterloo, Waterloo, ON
Kevin Grady (président adjoint), Cobden District P.S., Cobden, ON
Mark Bredin, Winnipeg, MB
Kora Lee Gallant, Madeline Symonds M.S., Hammonds Plains, NS
Sarah Garrett, Mitchell Woods P.S., Guelph, ON
JoAnne Halpern, Thornhill, ON
David Matthews, University of Waterloo, Waterloo, ON
John McLoughlin, University of New Brunswick, Fredericton, NB
David Switzer, Scott Central P.S., Richmond Hill, ON
Rachael Verbruggen, University of Waterloo, Waterloo, ON
Laurissa Werhun, Parkdale C.I., Toronto, ON
Robert Wong, Vernon Barford School, Edmonton, AB
Chris Wu, Ledbury Park E. and M.S., Toronto, ON
Lori Yee, E.B. Phin P.S., Pickering, ON

7e année

1. Erin reçoit 3 \$ par jour. Afin de reçevoir un total de 30 \$, il lui faudra $\dfrac{30\ \$}{3\ \$} = 10$ jours.

Réponse : (E)

2. En commençant à l'origine $(0, 0)$, le point $(2, 4)$ est situé à 2 unités à la droite and à 4 unités vers le haut.
Le point $(2, 4)$ est donc situé à D.

Réponse : (D)

3. Puisqu'un des quatre carrés identiques est ombré, donc la fraction du carré $PQRS$ qui est ombrée est $\frac{1}{4}$. Cette fraction est égale à 25 %.

Réponse : (C)

4. En additionant, on obtient $0{,}9 + 0{,}09 = 0{,}99$.

Réponse : (D)

5. Le mode correspond à la quantité de pluie qui revient le plus fréquemment dans les données.
D'après le diagramme, les quantités de pluie quotidiennes de dimanche à samedi sont respectivement de 6 mm, de 15 mm, de 3 mm, de 6 mm, de 3 mm, de 3 mm et de 9 mm.
Le mode pour la quantité de pluie pour la semaine est de 3 mm.

Réponse : (C)

6. Si $x = 3$,

$$\begin{array}{rcccc} 2x & = & 2 \times 3 & = & 6 \\ 3x - 1 & = & 3 \times 3 - 1 & = & 8 \\ x + 5 & = & 3 + 5 & = & 8 \\ 7 - x & = & 7 - 3 & = & 4 \\ 6 + 2x & = & 6 + 2 \times 3 & = & 12 \end{array}$$

Parmi les choix de réponse, la seule équation qui est vraie lorsque $x = 3$ est $3x - 1 = 8$.

Réponse : (B)

7. Lorsqu'on additionne -37 et 11, on obtient $-37 + 11 = -26$. La bonne réponse est donc (A).
Par ailleurs, on peut obtenir ce même résultat en soustrayant, $-26 - 11 = -37$.

Réponse : (A)

8. *Solution 1*
Le tiers de 396 est égal à $396 \div 3 = 132$. Donc, Joshua a lu les 132 premières pages du livre.
Afin de terminer son livre, il lui reste encore $396 - 132 = 264$ pages à lire.

Solution 2
Joshua a seulement lu le premier tiers du livre. Donc, il lui reste encore $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ du livre à lire.
Les deux tiers de 396 correspondent à $396 \times \frac{2}{3} = \frac{396 \times 2}{3} = \frac{792}{3} = 264$.
Il lui reste donc 264 pages à lire.

Réponse : (A)

9. Un tour complet est égal à 360°.
Donc, $k^\circ + 90^\circ = 360^\circ$ d'où $k = 360 - 90 = 270$.

Réponse : (D)

10. *Solution 1*
La moyenne des nombres $20, 30, 40$ est égale à $\dfrac{20 + 30 + 40}{3} = \dfrac{90}{3} = 30$.
Puisque chacun des choix de réponse comprend trois nombres, les trois nombres du bon choix

de réponse doivent avoir une somme de $30 \times 3 = 90$ afin d'obtenir une moyenne de 30.
Parmi les choix de réponse, le seul qui comprend un ensemble de trois nombres dont la somme est égale à 90 est le choix (D) $(23 + 30 + 37 = 90)$.

Solution 2
Puisque 20 est 10 de moins que 30 et que 40 est 10 de plus que 30, alors la moyenne des nombres $20, 30, 40$ est égale à 30.
Dans chacun des choix de réponse, le nombre 30 est celui du milieu dans la liste des trois nombres. Donc, afin que la moyenne des trois nombres soit égale à 30, le premier nombre et le dernier nombre doivent se trouver à des «distances» égales de 30 (où l'un des nombres est inférieur à 30 tandis que l'autre est supérieur à 30).
En examinant le choix de réponse (D), on constate que 23 est 7 de moins que 30 et que 37 est 7 de plus que 30. La moyenne de ces trois nombres est donc égale à 30. (On peut vérifier que ceci n'est pas le cas pour chacun des quatre autres choix de réponse.)

Réponse : (D)

11. On a : $\sqrt{81} = 9$ et $9 = 3^2$, donc $\sqrt{81} = 3^2$.

Réponse : (B)

12. La largeur du rectancle $PQRS$ est égale à la distance horizontale entre le point P et le point Q (ou celle entre le point S et le point R) car ces deux points ont les mêmes ordonnées.
Cette distance est égale à la différence entre leurs abscisses, soit $4 - (-4) = 8$.
De même, la hauteur du rectangle $PQRS$ est égale à la distance verticale entre le point S et le point P (ou celle entre le point R et le point Q) car ces deux points ont les mêmes abscisses.
Cette distance est égale à la différence entre leurs ordonnées, soit $2 - (-2) = 4$.
L'aire du rectangle $PQRS$ est égale à $8 \times 4 = 32$.

Réponse : (B)

13. La régularité $La - Si - Do - Ré - Mi - Fa - Sol$ comprend 7 touches blanches.
Puisque la première touche blanche est la note *La*, cette régularité se poursuit à chaque nombre de touches qui est un multiple de 7.
Puisque 28 est un multiple de 7, alors la 28^e touche blanche est la note *Sol* et donc la 29^e touche blanche est la note *La*, la 30^e touche blanche est la note *Si*, la 31^e touche blanche est la note *Do*, la 32^e touche blanche est la note *Ré* et la 33^e touche blanche est la note *Mi*.

Réponse : (E)

14. D'après le disque, les nombres premiers impairs sont $3, 5$ et 7.
Puisque le disque est divisé en 8 secteurs égaux, la probabilité que la flèche s'arrête dans un secteur dont le numéro est un nombre premier impair est égale à $\frac{3}{8}$.

Réponse : (C)

15. Les 12 pièces de Barry comprennent au moins une de chacune des 5 pièces de valeurs différentes.
La valeur totale de ces 5 pièces est de 2,00 \$ + 1,00 \$ + 0,25 \$ + 0,10 \$ + 0,05 \$ = 3,40 \$.
Barry pourrait avoir la plus petite somme d'argent si les $12 - 5 = 7$ pièces restantes étaient toutes des pièces de 0,05 \$ (la plus petite valeur possible d'une pièce de monnaie).
Donc, la plus petite somme d'argent que Barry peut avoir est :

$$3{,}40\ \$ + 7 \times 0{,}05\ \$ = 3{,}40\ \$ + 0{,}35\ \$ = 3{,}75\ \$.$$

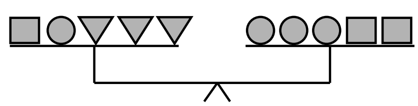
Réponse : (A)

16. *Solution 1*
Il existe 10 palindromes entre 100 et 200 : $101, 111, 121, 131, 141, 151, 161, 171, 181$ et 191.
Il existe 10 palindromes entre 200 et 300 : $202, 212, 222, 232, 242, 252, 262, 272, 282$ et 292.
De même, il existe 10 palindromes entre 300 et 400, entre 400 et 500, entre 500 et 600, entre 600 et 700, entre 700 et 800, entre 800 et 900 et entre 900 et 1000.
Autrement dit, pour l'étendue des nombres de 100 à 1000, il existe 10 palindromes entre chacun des 9 couples de multiples consécutifs de 100.
Le nombre de palindromes entre 100 et 1000 est donc $10 \times 9 = 90$.

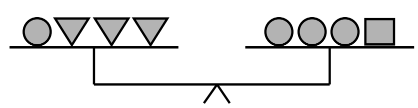
Solution 2
Chaque palindrome entre 100 et 1000 est un nombre à 3 chiffres de la forme aba où a est un chiffre de 1 à 9, où b est un chiffre de 0 à 9 et où les chiffres a et b ne sont pas forcément différents.
Il y a donc 9 choix pour le premier chiffre (le chiffre a). De plus, le choix du premier chiffre aura une conséquence sur le troisième chiffre qui, lui aussi, devra être a.
Il y a 10 choix pour le deuxième chiffre (le chiffre b). Il y a donc $9 \times 10 = 90$ choix pour a et b.
Ainsi, il existe 90 palindromes entre 100 et 1000.

Réponse : (B)

17. Selon la première balance, l'ensemble ◯◯◯ a la même masse que l'ensemble ▽▽.
Selon la deuxième balance, l'ensemble □◯▽ a la même masse que l'ensemble □□.
Donc, lorsqu'on additionne la masse de l'ensemble ▽▽ à celle de l'ensemble □◯▽, on obtient une somme qui est égale à celle de l'addition de la masse de l'ensemble ◯◯◯ à la masse de l'ensemble □□.
D'où la balance à deux bras équilibrée ci-dessous :



Les côtés gauche et droit de cette balance contiennent chacun un □. La balance reste donc en équilibre si on enlève un □ de chaque côté (puisqu'ils ont la même masse).
D'où la balance à deux bras équilibrée ci-dessous :



Ainsi, parmi les choix de réponse, l'ensemble ◯▽▽▽ a la même masse que l'ensemble ◯◯◯□.

Réponse : (D)

18. L'aire du rectangle de longueur x et de largeur y est égale à $x \times y$.
L'aire du triangle dont la base est de 16 et dont la hauteur est de x est égale à $\frac{1}{2} \times 16 \times x$ ou $8 \times x$.
L'aire du rectangle est égale à l'aire du triangle d'où $x \times y = 8 \times x$, ainsi $y = 8$.

Réponse : (C)

19. *Solution 1*
Chacune des quatre fractions a un numérateur de 1 et est équivalente aux trois autres fractions.
Ainsi, chaque dénominateur doit être égal aux trois autres dénominateurs.
D'où $a - 2 = b + 2 = c + 1 = d - 3$.
On pose $b = 4$. Donc $a - 2 = 4 + 2 = c + 1 = d - 3$ ou $a - 2 = 6 = c + 1 = d - 3$. D'où $a = 8, c = 5$ et $d = 9$.

Donc le bon ordre est $b < c < a < d$.

Solution 2
Chacune des quatre fractions a un numérateur de 1 et est équivalente aux trois autres fractions.
Ainsi, chaque dénominateur doit être égal aux trois autres dénominateurs.
D'où $a - 2 = b + 2 = c + 1 = d - 3$.
De plus, en ajoutant 3 à chacun, on obtient $a + 1 = b + 5 = c + 4 = d$.
Puisque $d = a + 1$, alors d est un de plus que a, donc $a < d$.
Puisque $a + 1 = c + 4$, alors a est 3 de plus que c, donc $c < a$.
Puisque $c + 4 = b + 5$, alors c est un de plus que b, donc $b < c$.
Donc le bon ordre est $b < c < a < d$.

Réponse : (E)

20. Les nombres 14 et 21 sont des diviseurs de n.
Puisque $14 = 2 \times 7$, donc les nombres 2 et 7 sont aussi des diviseurs de n.
Puisque $21 = 3 \times 7$, donc le nombre 3 est un diviseur de n (comme l'est le nombre 7, chose qu'on a déjà remarqué).
Jusqu'à présent, les diviseurs positifs qu'admet n sont : $1, 2, 3, 7, 14$ et 21.
Puisque les nombres 2 et 3 sont des diviseurs de n, leur produit $2 \times 3 = 6$ est aussi un diviseur de n.
Puisque les nombres $2, 3$ et 7 sont des diviseurs de n, leur produit $2 \times 3 \times 7 = 42$ est aussi un diviseur de n.
Les diviseurs positifs qu'admet n sont donc : $1, 2, 3, 6, 7, 14, 21$ et 42.
Étant donné que n admet exactement 8 diviseurs positifs dont 1 et n, et que notre liste comporte exactement 8 diviseurs positifs, on peut présumer que $n = 42$.
La somme des 8 diviseurs positifs est égale à $1 + 2 + 3 + 6 + 7 + 14 + 21 + 42 = 96$.

Réponse : (D)

21. On sépare l'information comme suit :
- Kathy possède plus de chats qu'Alice
- Kathy possède plus de chiens que Bruce
- Alice possède plus de chiens que Kathy
- Bruce possède plus de chats qu'Alice

Des 2^e^ et 3^e^ puces, on peut conclure qu'Alice possède plus de chiens que Kathy et Bruce.
De la 4^e^ puce, on peut conclure que le choix de réponse (A) n'est pas le bon.
Des 1^re^ et 4^e^ puces, on peut conclure que Kathy et Bruce possèdent tous les deux plus de chats qu'Alice.
Par contre, on ne peut pas déterminer si Kathy possède plus de chats que Bruce ou vice versa.
Donc, on ne peut pas conclure que (B) ou (C) *doivent* être vrais.
De la 2^e^ puce, on peut conclure que (E) n'est pas vrai.
Donc l'énoncé qui *doit* être vrai est (D).

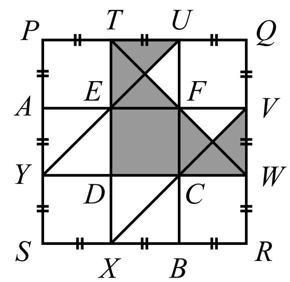
Réponse : (D)

22. Les diviseurs à un chiffre de 36 sont : $1, 2, 3, 4, 6$ et 9.
À partir de ces diviseurs, on peut créer des groupes de 3 chiffres dont le produit de ces derniers est égal à 36 : $1, 4, 9$; $1, 6, 6$; $2, 2, 9$; $2, 3, 6$ et $3, 3, 4$.
On compte ensuite le nombre de façons dont on pourrait arranger les chiffres dans chacun de ces 5 groupes.

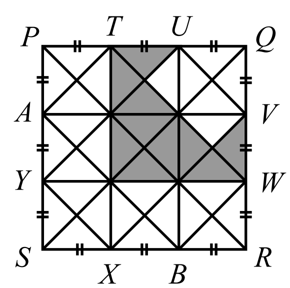
Les chiffres $1, 4, 9$ peuvent être arrangés comme suit : $149, 194, 419, 491, 914, 941$.
Les chiffres $1, 6, 6$ peuvent être arrangés comme suit : $166, 616, 661$.
Les chiffres $2, 2, 9$ peuvent être arrangés comme suit : $229, 292, 922$.
Les chiffres $2, 3, 6$ peuvent être arrangés comme suit : $236, 263, 326, 362, 623, 632$.
Les chiffres $3, 3, 4$ peuvent être arrangés comme suit : $334, 343, 433$.
Il y a donc $6 + 3 + 3 + 6 + 3 = 21$ entiers positifs à 3 chiffres dont les chiffres ont un produit de 36.

Réponse : (A)

23. On construit un segment AV perpendiculaire à TX. On construit un segment UB perpendiculaire à YW.



Les quatre segments TX, UB, AV et YW divisent le carré $PQRS$ en 9 carrés identiques.
Les couples perpendiculaires de ces quatre segments se coupent en C, D, E et F.
Le segment UY est une diagonale du carré $PUCY$ et passe donc au centre de ce dernier, soit le point E.
Le segment UE est une diagonale du carré $TUFE$.
Le segment TW est une diagonale du carré $TQWD$ tandis que le segment TF est une diagonale du carré $TUFE$.
Les diagonales d'un carré quelconque le divisent en 4 triangles identiques.
Par exemple, les diagonales TF et UE divisent le carré $TUFE$ en 4 triangles identiques parmi lesquels 3 sont ombrés.
De même, les diagonales FW et VC divisent le carré $FVWC$ en 4 triangles identiques parmi lesquels 3 sont ombrés.



Dans la figure ci-contre, on construit les diagonales manquantes dans chacun des 9 carrés.
Ces diagonales divisent le carré $PQRS$ en $9 \times 4 = 36$ triangles identiques.
Parmi ces triangles, 10 sont ombrés. Donc, la fraction du carré $PQRS$ qui est ombrée est $\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

Réponse : (A)

24. *Solution 1*
Les dix mouvements ont des longueurs égales à 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10.
Si le premier mouvement est vertical, alors les cinq mouvements verticaux ont des longueurs de 1, de 3, de 5, de 7 et de 9 tandis que les cinq mouvements horizontaux ont des longueurs de 2, de 4, de 6, de 8 et de 10.
Si le premier mouvement est horizontal, alors les cinq mouvements horizontaux ont des longueurs de 1, de 3, de 5, de 7 et de 9 tandis que les cinq mouvements verticaux ont des longueurs de 2, de 4, de 6, de 8 et de 10.
Si la direction d'un mouvement est vers la droite, la longueur du mouvement est additionnée à l'abscisse.
Si la direction d'un mouvement est vers la gauche, la longueur du mouvement est soustraite de l'abscisse.
Si la direction d'un mouvement est vers le haut, la longueur du mouvement est additionnée à l'ordonnée.

Si la direction d'un mouvement est vers le bas, la longueur du mouvement est soustraite de l'ordonnée.
Donc, une fois que les dix mouvements ont été effectués, le changement dans l'une des coordonnées est une combinaison d'additions et de soustractions des longueurs 1, 3, 5, 7 et 9 tandis que le changement dans l'autre coordonnée est une combinaison d'additions et de soustractions des longueurs 2, 4, 6, 8 et 10.
Par exemple, si le point se déplace vers la droite de 1, vers le bas de 2, vers la droite de 3, vers le haut de 4, vers la droite de 5, vers le bas de 6, vers la droite de 7, vers le haut de 8, vers la gauche de 9 et vers le haut de 10, alors son abscisse finale sera

$$20 + 1 + 3 + 5 + 7 - 9 = 27$$

tandis que son ordonnée finale sera

$$19 - 2 + 4 - 6 + 8 + 10 = 33$$

L'emplacement final du point sera donc le choix (A), soit $(27, 33)$. Donc le choix (A) n'est pas le bon.
On remarque que dans la direction où s'effectuent les mouvements dont les longueurs sont des nombres pairs, la différence entre la coordonnée initiale et la coordonnée finale est un nombre pair car on ne peut qu'obtenir un nombre entier pair à partir de l'addition ou de la soustraction de nombres entiers pairs.
Dans l'autre direction, la différence entre la coordonnée initiale et la coordonnée finale est un nombre impair car l'addition ou la soustraction d'un nombre impair de nombres entiers impairs aura toujours comme résultat un nombre entier impair. (Puisque impair plus impair est pair et que impair moins impair est pair, donc après deux mouvements de longueurs impaires, le changement jusqu'ici est pair, et après quatre mouvements de longueurs impaires, le changement jusque-là est toujours pair. Cela signifie qu'après le cinquième mouvement de longueur impaire, le changement final sera impair puisque l'addition ou la soustraction d'un nombre pair par un nombre impair est égale à un nombre impair.)
À partir de nos observations, on se sert du tableau suivant afin de déterminer la direction dans laquelle on devrait effectuer les mouvements de longueurs impaires et la direction dans laquelle on devrait effectuer les mouvements de longueurs paires.

Choix	Différence dans l'abscisse	Différence dans l'ordonnée	Mouvements horizontaux	Mouvements verticaux
(A) (27,33)	7	14	$1+3+5+7-9=7$	$-2+4-6+8+10=14$
(B) (30,40)	10	21	$2-4-6+8+10=10$	
(C) (21,21)	1	2	$1-3+5+7-9=1$	$2+4-6-8+10=2$
(D) (42,44)	22	25	$2-4+6+8+10=22$	$1+3+5+7+9=25$
(E) (37,37)	17	18	$-1-3+5+7+9=17$	$2+4-6+8+10=18$

Puisque les emplacements (A), (C), (D) et (E) sont possibles, donc l'emplacement qui n'est pas possible doit être (B).
On remarque que le choix (B) a une différence dans l'ordonnée qui n'est pas possible.
Autrement dit, on ne peut pas obtenir un résultat de 21 à partir de l'addition ou de la soustraction des nombres 1, 3, 5, 7 et 9.
Pourquoi ?

Solution 2

Soit a le changement horizontal de la position initiale à la position finale du point et soit b le changement vertical de la position initiale à la position finale.

Par exemple, si $a = -5$ et si $b = 6$, le point se trouve à une position finale de 5 unités à gauche et de 6 unités au-dessus de la position initiale de $(20, 19)$.

On remarque que si (x, y) est la position finale du point, alors on peut calculer a comme étant $a + 20 = x$ ou $a = x - 20$ et b comme étant $b + 19 = y$ ou $b = y - 19$.

Supposons que le premier mouvement est dans la direction horizontale.

Cela signifie que le deuxième mouvement sera dans la direction verticale, tandis que le troisième mouvement sera dans la direction horizontale, et ainsi de suite.

En tout, les premier, troisième, cinquième, septième et neuvième mouvements seront horizontaux tandis que les autres seront verticaux.

De plus, le premier mouvement est effectué par une unité, le second par deux unités, le troisième par trois unités, et ainsi de suite de manière que les mouvements horizontaux sont effectués par unités de 1, de 3, de 5, de 7 et de 9.

Chacun de ces mouvements est effectué vers la gauche ou vers la droite.

Si tous les mouvements horizontaux s'effectuent vers la droite, donc $a = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$.

Si le point se déplace à gauche au premier mouvement, à droite au troisième mouvement, puis à gauche aux cinquième, septième et neuvième mouvements, donc a sera égal à $-1 + 3 - 5 - 7 - 9$ ou -19.

Dans ce cas, la position finale se trouve à 19 unités à la gauche de la position initiale (remarquons d'ailleurs qu'il aurait pu aussi y avoir un mouvement vertical).

Pour chacun des cinq mouvements horizontaux, le point se déplace vers la gauche ou vers la droite.

Cela signifie qu'il y a deux choix (gauche ou droite) pour chacun des cinq mouvements horizontaux. Le nombre possible de configurations similaires aux exemples ci-dessus est donc $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$.

Le tableau ci-dessous calcule toutes les valeurs possibles de a et nous permet d'examiner ces configurations plus attentivement :

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
1+3+5+7+9 & = & 25 & \quad & 1+3+5+7-9 & = & 7 \\
-1+3+5+7+9 & = & 23 & & -1+3+5+7-9 & = & 5 \\
1-3+5+7+9 & = & 19 & & 1-3+5+7-9 & = & 1 \\
-1-3+5+7+9 & = & 17 & & -1-3+5+7-9 & = & -1 \\
1+3-5+7+9 & = & 15 & & 1+3-5+7-9 & = & -3 \\
-1+3-5+7+9 & = & 13 & & -1+3-5+7-9 & = & -5 \\
1-3-5+7+9 & = & 9 & & 1-3-5+7-9 & = & -9 \\
-1-3-5+7+9 & = & 7 & & -1-3-5+7-9 & = & -11 \\
1+3+5-7+9 & = & 11 & & 1+3+5-7-9 & = & -8 \\
-1+3+5-7+9 & = & 9 & & -1+3+5-7-9 & = & -9 \\
1-3+5-7+9 & = & 5 & & 1-3+5-7-9 & = & -13 \\
-1-3+5-7+9 & = & 3 & & -1-3+5-7-9 & = & -15 \\
1+3-5-7+9 & = & 1 & & 1+3-5-7-9 & = & -17 \\
-1+3-5-7+9 & = & -1 & & -1+3-5-7-9 & = & -19 \\
1-3-5-7+9 & = & -5 & & 1-3-5-7-9 & = & -23 \\
-1-3-5-7+9 & = & -7 & & -1-3-5-7-9 & = & -25
\end{array}
$$

En examinant la liste, on constate que certains nombres apparaissent plus d'une fois. On constate d'ailleurs que lorsque le premier mouvement est horizontal, les valeurs possibles de a sont les nombres impairs compris entre -25 et 25 (y compris -25 et 25) à l'exception de -21 et de 21.

Lorsque le premier mouvement est horizontal, les deuxième, quatrième, sixième, huitième et dixième mouvements seront verticaux et auront des longueurs de 2, de 4, de 6, de 8 et de 10 unités.

Dans le même ordre d'idées que celui du cas précédent, on peut calculer les 32 valeurs possibles de b lorsque le premier mouvement est horizontal :

$$\begin{array}{rcr@{\qquad\qquad}rcr}
2+4+6+8+10 &=& 30 & 2+4+6+8-10 &=& 10\\
-2+4+6+8+10 &=& 26 & -2+4+6+8-10 &=& 6\\
2-4+6+8+10 &=& 22 & 2-4+6+8-10 &=& 2\\
-2-4+6+8+10 &=& 18 & -2-4+6+8-10 &=& -2\\
2+4-6+8+10 &=& 18 & 2+4-6+8-10 &=& -2\\
-2+4-6+8+10 &=& 14 & -2+4-6+8-10 &=& -6\\
2-4-6+8+10 &=& 10 & 2-4-6+8-10 &=& -10\\
-2-4-6+8+10 &=& 6 & -2-4-6+8-10 &=& -14\\
2+4+6-8+10 &=& 14 & 2+4+6-8-10 &=& -6\\
-2+4+6-8+10 &=& 10 & -2+4+6-8-10 &=& -10\\
2-4+6-8+10 &=& 6 & 2-4+6-8-10 &=& -14\\
-2-4+6-8+10 &=& 2 & -2-4+6-8-10 &=& -18\\
2+4-6-8+10 &=& 2 & 2+4-6-8-10 &=& -18\\
-2+4-6-8+10 &=& -2 & -2+4-6-8-10 &=& -22\\
2-4-6-8+10 &=& -6 & 2-4-6-8-10 &=& -26\\
-2-4-6-8+10 &=& -10 & -2-4-6-8-10 &=& -30
\end{array}$$

Encore une fois, on constate que certains nombres apparaissent plus d'une fois. On constate d'ailleurs que lorsque le premier mouvement est horizontal, les valeurs possibles de b sont les nombres pairs compris entre -30 et 30 (y compris -30 et 30) qui ne sont pas des multiples de 4.

Examinons maintenant les réponses possibles. Le point du choix (A) est $(27, 33)$.

Dans ce cas, on a : $a = 27 - 20 = 7$ et $b = 33 - 19 = 14$. Ces valeurs de a et de b correspondent aux critères soulignés ci-dessus, donc (27,33) est une position finale possible.

Le point $(21, 21)$ du choix (C) a : $a = 1$ et $b = 2$. Cela signifie que $(21, 21)$ est aussi une position finale possible pour le point.

Le point $(37, 37)$ du choix (E) a : $a = 17$ et $b = 18$. Donc ce point est aussi une position finale possible.

On comprend alors que la réponse est soit (B) ou (D). On remarque que a est pair et b est impair dans les deux cas. Donc, afin qu'un de ces points soit une position finale possible, le premier mouvement ne peut en aucun cas être un mouvement horizontal, il doit donc être vertical.

Si le premier mouvement est vertical, alors les troisième, cinquième, septième et neuvième mouvements sont également verticaux tandis que les autres mouvements sont horizontaux.

En procédant de la même manière qu'auparavant, nous verrons que les restrictions relatives à a et à b ont changé.

C.-à-d., a doit être un nombre pair entre -30 et 30 (y compris -30 et 30) qui n'est pas un multiple de 4 tandis que b doit être un nombre impair entre -25 et 25 (y compris -25 et 25) à l'exception de -21 et de 21.

Le point $(42, 44)$ du choix (D) a : $a = 22$ et $b = 25$. Ces valeurs sont admissibles si le premier mouvement est vertical.

Par contre, le point $(30, 40)$ du choix (B) a : $a = 10$ et $b = 21$. Puisque 21 n'est pas une valeur admissible de b, alors $(30, 40)$ n'est pas une position finale possible.

Réponse : (B)

25. Le prisme rectangulaire a deux faces dont l'aire de chacune est de $8 \times 8 = 64$, et quatre faces dont l'aire de chacune est de $8 \times n$.
Donc, A est $2 \times 64 + 4 \times 8 \times n = 128 + 32n$.
Le prisme est composé de $8 \times 8 \times n = 64 \times n$ cubes dont chacun a les dimensions $1 \times 1 \times 1$.
Chaque cube $1 \times 1 \times 1$ a une aire de surface de 6 car chaque cube a 6 faces dont chacune est un carré de 1×1.
Donc, $B = 6 \times 64 \times n = 384n$.
On obtient donc
$$\frac{B}{A} = \frac{384n}{128 + 32n} \ .$$
On réussit à simplifier cette expression car $384, 128$ et 32 sont tous les trois divisible par 32.
En divisant le numérateur et le dénominateur par 32, on obtient
$$\frac{B}{A} = \frac{12n}{4 + n} \ .$$
Étant donné que $\frac{B}{A}$ doit être égal à un entier, on détermine les entiers que peut être $\frac{12n}{4+n}$.
On remarque d'abord que n est positif, donc $12n$ et $4+n$ sont tous les deux positifs. Cela signifie que $\frac{12n}{4+n}$ est positif. $\frac{12n}{4+n}$ est donc un entier positif. On cherche ainsi à déterminer les entiers positifs qui sont égaux à $\frac{12n}{4+n}$.
Si $\frac{12n}{4+n} = 1$, donc $12n = 4 + n$ que l'on simplifie à la forme $11n = 4$ ou $n = \frac{4}{11}$.
Puisque n doit être un entier, on comprend que $\frac{12n}{4+n}$ ne peut pas être égal à 1.
Et si $\frac{12n}{4+n} = 2$? Dans ce cas, il faudrait que $12n$ soit deux fois plus grand que $4 + n$, soit $12n = 8 + 2n$.
On peut simplifier ce dernier à $10n = 8$ ou $n = \frac{8}{10}$.
Puisque cette valeur de n n'est pas un entier, on comprend alors que $\frac{12n}{4+n}$ n'est pas égal à 2.
En suivant ce raisonnement, si $\frac{12n}{4+n}$ est égal à 3, on détermine que n est égal à $\frac{4}{3}$, qui lui aussi n'est pas un entier, donc $\frac{12n}{4+n}$ n'est pas égal à 3.
Si $\frac{12n}{4+n}$ est égal à 4, donc $12n$ est quatre fois plus grand que $4 + n$, soit $12n = 16 + 4n$.
En simplifiant, on obtient $8n = 16$, donc $n = 2$. Ainsi, $\frac{12n}{4+n}$ peut être égal à 4 lorsque $n = 2$.
On continue de cette même manière pour toutes les valeurs possibles d'entiers positifs égales à $\frac{12n}{4+n}$ et allant jusqu'à $\frac{12n}{4+n} = 11$.

Les résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous :

$\dfrac{12n}{n+4}$	n	n est un entier
1	$\dfrac{4}{11}$	$\times$
2	$\dfrac{8}{10}$	$\times$
3	$\dfrac{4}{3}$	$\times$
4	2	✓
5	$\dfrac{20}{7}$	$\times$
6	4	✓
7	$\dfrac{28}{5}$	$\times$
8	8	✓
9	12	✓
10	20	✓
11	44	✓

Selon le tableau, $\dfrac{12n}{4+n}$ peut être égal à chacun des entiers $4, 6, 8, 9, 10$ et 11 lorsque n est respectivement égal à $2, 4, 8, 12, 20$ et 44.

On considère maintenant ce qui se passe lorsque $\dfrac{12n}{4+n}$ est égal à 12 ou plus.

Si $\dfrac{12n}{4+n} = 12$, alors $12n$ est 12 fois plus grand que $4+n$, soit $12n = 48 + 12n$.

Puisque $48 + 12n$ sera toujours supérieur à $12n$, il n'y a aucune valeur de n pour laquelle $12n = 48 + 12n$.

De même, puisque n est un entier positif, il n'y a aucune valeur de n pour laquelle $\dfrac{12n}{4+n}$ est égal à 13 ou plus.

On comprend alors que les seules valeurs possibles d'entiers positifs égales à $\dfrac{12n}{4+n}$ sont celles dans le tableau. Donc, $\dfrac{12n}{4+n}$ est un entier lorsque n est égal à 2, à 4, à 8, à 12, à 20 et à 44.

La somme de ces nombres est égale à $2 + 4 + 8 + 12 + 20 + 44 = 90$.

Réponse : (B)

8e année

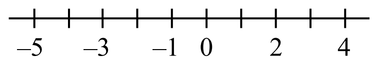
1. Exprimée sous forme de pourcentage, la moitié d'un muffin est égale à $\frac{1}{2} \times 100\% = 50\ \%$ du muffin.

RÉPONSE : (E)

2. Les mesures des trois angles d'un triangle ont une somme de 180°.
Donc $x + x + x = 180$ ou $3x = 180$, d'où $x = \frac{180}{3} = 60$.

RÉPONSE : (B)

3. On ordonne les choix de réponse et le zéro sur une droite numérique comme dans la figure ci-dessous.
L'entier le plus proche de zéro est -1.



RÉPONSE : (A)

4. Lorsque divisé par 5, un nombre qui est 3 de plus qu'un multiple de 5 donnera un reste de 3.
Puisque 88 est 3 de plus que 85 et que ce dernier est un multiple de 5, on obtient un reste de 3 lorsqu'on divise 88 par 5.
D'ailleurs, on peut vérifier que cette réponse est la seule qui donne un reste de 3 lorsque divisée par 5.

RÉPONSE : (D)

5. On sait qu'un nombre premier est un entier qui est supérieur à 1 et qui admet exactement deux diviseurs distincts, soit 1 et lui-même.
Les nombres premiers entre 10 et 20 sont : $11, 13, 17$ et 19.
Donc, il y a 4 nombres premiers entre 10 et 20.

RÉPONSE : (E)

6. D'après le diagramme, 15 véhicules avaient une vitesse moyenne de 80 km/h à 89 km/h, 30 véhicules avaient une vitesse moyenne de 90 km/h à 99 km/h et 5 véhicules avaient une vitesse moyenne de 100 km/h à 109 km/h.
La vitesse moyenne de chacun des autres véhicules était inférieure à 80 km/h.
Il y avait donc $15 + 30 + 5 = 50$ véhicules qui avaient une vitesse moyenne d'au moins 80 km/h.

RÉPONSE : (E)

7. Tout entier positif qui admet 3 et 7 comme diviseurs admettrait aussi comme diviseur le produit de ces derniers, soit $3 \times 7 = 21$.
Autrement dit, il faut déterminer le nombre d'entiers positifs inférieurs à 100 qui seraient des multiples de 21.
Ces entiers sont : $21, 42, 63$ et 84.
On remarque que le prochain multiple de 21 est $21 \times 5 = 105$. Ce dernier est supérieur à 100.
Il y a donc 4 entiers positifs inférieurs à 100 qui sont divisibles à la fois par 3 et par 7.

RÉPONSE : (C)

8. La circonférence d'un cercle est égale à π fois son diamètre. On a donc $C = \pi \times d$, C étant la circonférence et d, le diamètre.
Puisque la circonférence est de 100, donc $100 = \pi \times d$ d'où $d = \dfrac{100}{\pi}$.

RÉPONSE : (C)

9. L'aire d'un triangle peut être exprimée par $A = \dfrac{b \times h}{2}$, A étant l'aire, b, la longueur de la base et h, la hauteur du triangle.
Étant donné que l'aire du triangle est de 6, on a donc $6 = \dfrac{b \times h}{2}$ d'où $b \times h = 12$.

Imaginons que la base, b, du triangle est le segment PQ. Donc $b = 4$.
Puisque $b \times h = 12$ et que $b = 4$, donc la hauteur, h, est égale à 3.
Le point qui est situé à une distance perpendiculaire de 3 unités au-dessus du segment PQ est le point E.

Réponse : (E)

10. Les 12 pièces de Barry comprennent au moins une de chacune des 5 pièces de valeurs différentes.
La valeur totale de ces 5 pièces est de 2,00 \$ + 1,00 \$ + 0,25 \$ + 0,10 \$ + 0,05 \$ = 3,40 \$.
Barry pourrait avoir la plus petite somme d'argent si les $12 - 5 = 7$ pièces restantes étaient toutes des pièces de 0,05 \$ (la plus petite valeur possible d'une pièce de monnaie).
Donc, la plus petite somme d'argent que Barry peut avoir est :

$$3{,}40\ \$ + 7 \times 0{,}05\ \$ = 3{,}40\ \$ + 0{,}35\ \$ = 3{,}75\ \$.$$

Réponse : (A)

11. Un triangle isocèle a deux côtés de même longueur.
Étant donné qu'un triangle isocèle a un côté de longueur 6 et un autre côté de longueur 8, il est donc possible que les longueurs des côtés soient de 6, de 6 et de 8.
Dans ce cas, le périmètre du triangle est égal à $6 + 6 + 8 = 20$. Or, cette réponse ne figure pas parmi les choix de réponse.
Cela dit, la seule autre possibilité est que les longueurs des côtés soient de 6, de 8 et de 8.
Dans ce cas, le périmètre est égal à $6 + 8 + 8 = 22$.

Réponse : (C)

12. Les angles dont les mesures sont de 60° et de $(y + 5)^\circ$ sont situés sur le segment de droite PQ. Ils ont donc une somme de 180°.
Ainsi, $60 + y + 5 = 180$ ou $y + 65 = 180$, alors $y = 180 - 65 = 115$.
Les angles dont les mesures sont de $(4x)^\circ$ et de $(y + 5)^\circ$ sont opposés, donc $4x = y + 5$.
Puisque $y = 115$, on obtient $4x = 120$ d'où $x = 30$.
Donc $x + y = 30 + 115 = 145$.

Réponse : (A)

13. Afin qu'il puisse exister un mode pour l'ensemble des cinq nombres $12, 9, 11, 16$ et x, ce dernier doit être égal à l'un des quatre autres nombres, soit $12, 9, 11$ ou 16.
Si $x = 9$, donc le mode est égal à 9. Or, la moyenne des cinq nombres $9, 9, 11, 12, 16$ est supérieure à 9.
Si $x = 16$, donc le mode est égal à 16. Or, la moyenne des cinq nombres $9, 11, 12, 16, 16$ est inférieure à 16.
Donc, x doit être égal à 11 ou à 12.
Si $x = 11$, la moyenne des nombres est de $\frac{9+11+11+12+16}{5} = \frac{59}{5}$. Or, cette moyenne n'est pas égale au mode de 11.

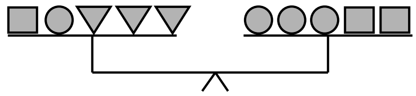
Si $x = 12$, la moyenne des nombres est de $\frac{9+11+12+12+16}{5} = \frac{60}{5} = 12$. Cette moyenne est égale au mode de 12.

Finalement, lorsque $x = 12$, la médiane (le nombre du milieu dans la liste $9, 11, 12, 12, 16$) est aussi égale à 12.

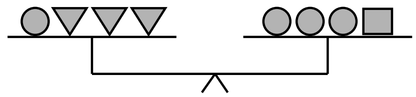
Réponse : (C)

14. Selon la première balance, l'ensemble $\bigcirc\bigcirc\bigcirc$ a la même masse que l'ensemble $\bigtriangledown\bigtriangledown$.
Selon la deuxième balance, l'ensemble $\square\bigcirc\bigtriangledown$ a la même masse que l'ensemble $\square\square$.
Donc, lorsqu'on additionne la masse de l'ensemble $\bigtriangledown\bigtriangledown$ à celle de l'ensemble $\square\bigcirc\bigtriangledown$ on obtient une somme qui est égale à celle de l'addition de la masse de l'ensemble $\bigcirc\bigcirc\bigcirc$ à la masse de l'ensemble $\square\square$.

D'où la balance à deux bras équilibrée ci-dessous :



Les côtés gauche et droit de cette balance contiennent chacun un □. La balance reste donc en équilibre si on enlève un □ de chaque côté (puisqu'ils ont la même masse).
D'où la balance à deux bras équilibrée ci-dessous :



Ainsi, parmi les choix de réponse, l'ensemble ○▽▽▽ a la même masse que l'ensemble ○○○□.

Réponse : (D)

15. *Solution 1*
Après qu'on ait fait tourner la flèche deux fois, les résultats possibles sont : rouge, rouge ; rouge, bleu ; rouge, vert ; bleu, rouge ; bleu, bleu ; bleu, vert ; vert, rouge ; vert, bleu ; vert, vert.
C'est-à-dire qu'il y a 9 résultats possibles.
Parmi ces 9 résultats, une même couleur paraît deux fois dans 3 résultats, soit : rouge, rouge ; bleu, bleu ; vert, vert.
La probabilité que la flèche s'arrête deux fois dans un secteur de la même couleur est égale à $\frac{3}{9}$ ou $\frac{1}{3}$.

Solution 2
On compte le nombre total de résultats possibles étant donné qu'on a fait tourner la flèche deux fois.
Il y a 3 résultats possibles (rouge, bleu, vert) lors du premier tour.
Il y a encore 3 résultats possibles lors du deuxième tour.
Donc, quand on fait tourner la flèche deux fois, il y a $3 \times 3 = 9$ résultats possibles.
On compte ensuite le nombre total de résultats possibles où la flèche s'arrêterait deux fois dans un secteur de la même couleur.
Il y a 3 résultats possibles lors du premier tour (rouge, bleu, vert).
Lors du deuxième tour, il n'y a qu'un seul résultat possible (puisque la flèche doit s'arrêter dans le même secteur, et donc la même couleur, qu'au premier tour).
Donc, quand on fait tourner la flèche deux fois, il y a $3 \times 1 = 3$ résultats possibles où la flèche s'arrêterait deux fois dans un secteur de la même couleur.
La probabilité que la flèche s'arrête deux fois dans un secteur de la même couleur est de $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Solution 3
Lors du premier tour, la flèche va s'arrêter sur une couleur parmi les trois.
Afin que la flèche s'arrête sur la même couleur deux fois, elle doit s'arrêter sur la même couleur au deuxième tour qu'au premier tour.
Puisqu'une seule couleur parmi les trois correspond à celle du premier tour, la probabilité que la flèche s'arrête deux fois sur la même couleur est de $\frac{1}{3}$.

Réponse : (D)

16. L'ampoule est allumée pendant 2 heures par jour et elle a une durée de vie de 24 999 heures.
Donc, l'ampoule ne durera que $24\,999 \div 2 = 12\,499{,}5$ jours. Elle arrêtera donc de fonctionner au $12\,500^{\text{e}}$ jour.
Combien de semaines y a-t-il dans 12 500 jours ?
Puisque $12\,500 \div 7 \approx 1785{,}71$, il y a entre 1785 et 1786 semaines dans 12 500 jours.
Plus précisément, $12\,500 - 7 \times 1785 = 12\,500 - 12\,495 = 5$. Il y a donc 1785 semaines complètes

et 5 jours supplémentaires dans 12 500 jours.
L'ampoule est allumée un lundi et donc, après 1785 semaines complètes, on arrive à un dimanche.
L'ampoule cessera de fonctionner 5 jours après ce dimanche, soit un vendredi.

Réponse : (B)

17. Puisque $w + x = 45$ et que $x + y = 51$, donc $x + y$ est 6 de plus que $w + x$ (puisque 51 est 6 de plus que 45).
Puisque $x+y$ et $w+x$ contiennent tous les deux un x, la différence de 6 entre ces deux expressions doit donc être la différence entre y et w.
Autrement dit, y est 6 de plus que w (ou $y = 6 + w$).
Étant donné la dernière équation, $y + z = 28$, et sachant que y est 6 de plus que w, on peut ainsi dire qu'on peut ajouter 6 de plus que w à z afin d'obtenir une somme de 28.
Puisque $6 + 22 = 28$, donc $w + z = 22$.

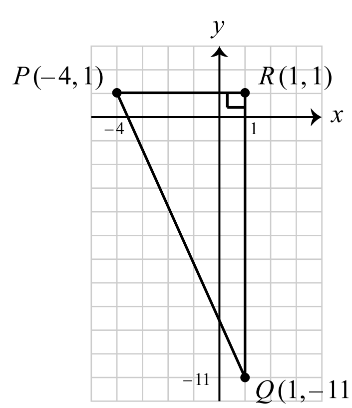
Réponse : (B)

18. On sépare l'information comme suit :
- Kathy possède plus de chats qu'Alice
- Kathy possède plus de chiens que Bruce
- Alice possède plus de chiens que Kathy
- Bruce possède plus de chats qu'Alice

Des 2^e et 3^e puces, on peut conclure qu'Alice possède plus de chiens que Kathy et Bruce.
De la 4^e puce, on peut conclure que le choix de réponse (A) n'est pas le bon.
Des 1^{re} et 4^e puces, on peut conclure que Kathy et Bruce possèdent tous les deux plus de chats qu'Alice.
Par contre, on ne peut pas déterminer si Kathy possède plus de chats que Bruce ou vice versa.
Donc, on ne peut pas conclure que (B) ou (C) *doivent* être vrais.
De la 2^e puce, on peut conclure que (E) n'est pas vrai.
Donc l'énoncé qui *doit* être vrai est (D).

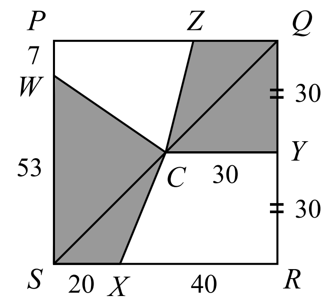
Réponse : (D)

19. Dans la figure ci-contre, la ligne horizontale qui passe au point P et la ligne verticale qui passe au point Q se coupent en $R(1{,}1)$.
On relie les points P, Q et R afin de créer le triangle rectangle PQR dont l'hypoténuse est le segment PQ.
L'abscisse du point P est de -4 tandis que l'abscisse du point R est de 1, donc le segment PR a une longueur de $1 - (-4) = 5$ (car le point P et le point R ont les mêmes ordonnées).
L'ordonnée du point Q est de -11 tandis que l'ordonnée du point R est de 1, donc le segment QR a une longueur de $1-(-11) = 12$ (car le point Q et le point R ont les mêmes abscisses).
À l'aide du théorème de Pythagore, $PQ^2 = PR^2 + QR^2$ ou $PQ^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$, donc $PQ = \sqrt{169} = 13$ (puisque $PQ > 0$).
(Par ailleurs, on aurait pu dessiner une ligne verticale qui passe au point P et une ligne horizontale qui passe au point Q qui se coupent en $(-4, -11)$.)



Réponse : (A)

20. *Solution 1*



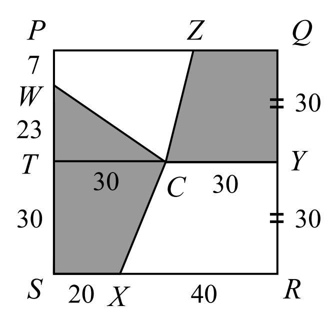
Le carré $PQRS$ a des côtés de longueur 60 et donc a une aire de $60^2 = 3600$.
Puisque l'aire totale des régions ombrées doit être égale à l'aire totale des régions non ombrées, donc l'aire totale des régions ombrées doit être égale à 1800, soit la moitié de l'aire du carré.
La distance entre le centre du carré, C, et les côtés du carré est de $\frac{1}{2}(60) = 30$.
Afin de déterminer l'aire de chacune des régions ombrées, on remplit le carré dans la figure ci-contre avec les valeurs des longueurs fournises dans la question (ainsi que celles que l'on peut déterminer) et on y construit la diagonale SQ.

Le quadrilatère $WCXS$ est composé de deux triangles : le triangle SCX et le triangle SCW.
Dans le triangle SCX, la longueur de la base, SX, est de 20, tandis que la longueur de la hauteur qui relie le point C à SR est de 30 (puisque C est le centre du carré $PQRS$).
Donc, le triangle SCX a une aire de $\frac{1}{2}(20)(30) = 300$.
Dans le triangle SCW, la longueur de la base, SW, est de 53, tandis que la longueur de la hauteur qui relie le point C à SW est de 30.
Donc, le triangle SCW a une aire de $\frac{1}{2}(53)(30) = 795$.
Ainsi, le quadrilatère $WCXS$ a une aire de $300 + 795 = 1095$.

Le quadrilatère $ZQYC$ est composé de deux triangles : le triangle CQY et le triangle CQZ.
Y est le milieu de QR tandis que C est le centre du carré, donc CY est perpendiculaire à QY.
Dans le triangle CQY, la longueur de la base, CY, est de 30, tandis que la longueur de la hauteur, YQ, est de 30. Donc le triangle CQY a une aire de $\frac{1}{2}(30)(30) = 450$.
Dans le triangle CQZ, si la base est ZQ, donc la hauteur qui relie le point C à PQ est de 30.
Donc, le triangle CQZ a une aire de $\frac{1}{2}(ZQ)(30) = 15(ZQ)$.
Ainsi, le quadrilatère $ZQYC$ a une aire de $15 \times ZQ + 450$.

Finalement, on additionne les aires des régions ombrées afin d'obtenir $1095+15\times ZQ+450 = 1800$ ou $15 \times ZQ = 1800 - 1095 - 450 = 255$, d'où $ZQ = \frac{255}{15} = 17$.

Solution 2



Comme dans la solution 1, l'aire totale des régions ombrées doit être égale à 1800.
Dans la figure ci-contre, on nomme T le milieu du côté PS.
Puisque Y est le milieu de QR, donc TY passe au point C et est perpendiculaire à PS et à QR.
Puisque C est le centre du carré, la distance entre ce dernier et les côtés du carré est de $\frac{1}{2}(60) = 30$.
On remplit le carré dans la figure ci-contre avec les valeurs des longueurs fournises dans la question (ainsi que celles que l'on peut déterminer).

Le quadrilatère $WCXS$ est composé du triangle WCT et du trapèze $TCXS$ (TC est parallèle à SX et donc $TCXS$ est un trapèze).
Dans le triangle WCT, la longueur de la base WT est égale à $WS-TS = 53-30 = 23$ tandis que la longueur de la hauteur, CT, est de 30. Donc, le triangle WCT a une aire de $\frac{1}{2}(23)(30) = 345$.
Dans le trapèze $TCXS$, les côtés parallèles ont des longueurs de $TC = 30$ et de $SX = 20$ tandis que la hauteur est de $TS = 30$.

Donc, le trapèze $TCXS$ a une aire de $\frac{1}{2}(30)(30+20) = 750$.
Ainsi, le quadrilatère $WCXS$ a une aire de $345 + 750 = 1095$.

Le quadrilatère $ZQYC$ est aussi un trapèze (car ZQ est parallèle à CY).
Le trapèze $ZQYC$ a une aire de $\frac{1}{2}(QY)(ZQ+30) = 15(ZQ+30)$.

On additionne les aires des régions ombrées afin d'obtenir $1095 + 15(ZQ + 30) = 1800$ ou $15(ZQ+30) = 1800 - 1095 = 705$ ou $ZQ + 30 = \frac{705}{15} = 47$, d'où $ZQ = 17$.

Réponse : (E)

21. Soit n le nombre d'équipes qui font partie de la ligue de baseball de Jen.
Chacune de ces n équipes joue exactement 6 matchs contre chacune des $n-1$ autres équipes de la ligue.
Puisqu'il y a 2 équipes dans chaque match, le nombre total de matchs est égal à $\dfrac{6n(n-1)}{2}$.
Il y a eu un total de 396 matchs, donc $\dfrac{6n(n-1)}{2} = 396$ ou $3n(n-1) = 396$ ou $n(n-1) = 132$.
La différence entre les nombres n et $n-1$ est de 1. On recherche donc deux entiers positifs consécutifs dont le produit est de 132.
Puisque $12 \times 11 = 132$, il y a donc 12 équipes qui font partie de la ligue de baseball de Jen.

Réponse : (A)

22. Soit $abcd$ l'entier positif à 4 chiffres où d est le chiffre des unités, où c est le chiffre des dizaines, où b est le chiffre des centaines et où a est le chiffre des milliers du nombre original.
On commence en déterminant lequel des 4 chiffres a été effacé.
Si Rich efface le chiffre a, donc l'entier à 3 chiffres qui en résulte est bcd, ainsi la somme des deux entiers est exprimée par $abcd + bcd$.
On détermine le chiffre des unités de cette somme an additionnant les chiffres des unités de l'entier $abcd$ et de l'entier bcd, soit $d + d = 2d$.
Dans ce cas, le chiffre des unités de la somme est un chiffre pair car $2d$ est pair.
Étant donné que la somme des deux entiers doit être 6031 et que ce dernier a un chiffre des unités impair, alors le chiffre qui a été effacé ne peut pas être le chiffre a.
Avec ce même raisonnement, on ne peut pas effacer les chiffres b ou c. Donc le chiffre qui a dû être effacé est le chiffre d.
Ensuite, on détermine les chiffres a,b,c,d afin que

$$\begin{array}{rr} & a\,bcd \\ + & abc \\ \hline & 6\,031 \end{array}$$

Lorsqu'on additionne $b+a$ à la retenue dans la colonne des dizaines, on obtient une somme dans la colonne des centaines qui a un 0 comme chiffre des unités.
Autrement dit, cette somme est égale à soit 0, soit 10, soit 20.
Si la somme est égale à 0, donc $a = 0$. Or, à partir de la colonne des milliers, on constate que a ne peut pas être égal à 0.
Si la somme est égale à 20, donc $a + b = 18$ (puisque la valeur maximale de tout chiffre est de 9 tandis que la retenue dans la colonne des dizaines a une valeur maximale de 2).
Si $a + b = 18$, donc $a = 9$. Or, à partir de la colonne des milliers, on constate que a ne peut pas être égal à 9.
Donc, lorsqu'on additionne $b + a$ à la retenue dans la colonne des dizaines, on obtient 10. Donc

la retenue de la colonne des centaines à la colonne des milliers est de 1.
À partir de la colonne des milliers, on obtient donc $a+1=6$ d'où $a=5$.

$$\begin{array}{r} 5\,bcd \\ +\quad 5bc \\ \hline 6\,031 \end{array}$$

Lorsqu'on additionne $b+5$ à la retenue dans la colonne des dizaines, on obtient une somme de 10 dans la colonne des centaines.
Si la retenue dans la colonne des dizaines est de 0, donc $b+5=10$ d'où $b=5$.
Dans la colonne des dizaines, si $b=5$, donc $c+b=c+5$ est supérieur à 3 et doit donc être 13.
On comprend alors qu'une retenue de 0 n'est pas possible dans la colonne des dizaines.
Si la retenue dans la colonne des dizaines est de 1, donc $b+5+1=10$ d'où $b=4$.
(On remarque que la somme de la colonne des dizaines a un 3 comme chiffre des unités et donc une retenue de 2 n'est pas possible.)

$$\begin{array}{r} 5\,4cd \\ +\quad 54c \\ \hline 6\,031 \end{array}$$

La somme dans la colonne des dizaines a un 3 comme chiffre des unités. Donc, lorsqu'on additionne $c+4$ à la retenue dans la colonne des unités, on obtient 13 (et non 3 ou 23).
S'il n'y a aucune retenue dans la colonne des unités, alors $c+4=13$ d'où $c=9$.
Mais si $c=9$, donc le $d+9$ de la colonne des unités doit être égal à 11 (ce qui indique qu'il y aurait eu une retenue dans la colonne des unités).
Ainsi c n'a pas une valeur de 9.
S'il y a une retenue de 1 dans la colonne des unités, alors $c+4+1=13$ d'où $c=8$ et $d=3$.
La somme finale est comme suit :

$$\begin{array}{r} 5\,483 \\ +\quad 548 \\ \hline 6\,031 \end{array}$$

La somme des chiffres de l'entier d'origine à 4 chiffres est égale à $a+b+c+d=5+4+8+3=20$

Réponse : (B)

23. On constate que les choix de réponse ont tous un numérateur commun, soit (20!)(19!).
Puisque 20! est égal au produit des entiers de 1 à 20, on pourrait aussi dire que 20! est égal au produit des entiers de 1 à 19, le tout multiplié par 20.
Cela dit, le produit des entiers de 1 à 19 peut être réécrit sous la forme 19!, donc $20! = 19! \times 20$.
Autrement dit, le numérateur commun (20!)(19!) peut être réécrit sous la forme $(19! \times 20)(19!)$ ou $(19!)^2 \times 20$.
On considère ensuite le résultat de la division de $(19!)^2 \times 20$ par chacun des dénominateurs suivants :

$$\frac{(20!)(19!)}{1} = \frac{(19!)^2 \times 20}{1} = (19!)^2 \times 20$$

$$\frac{(20!)(19!)}{2} = \frac{(19!)^2 \times 20}{2} = (19!)^2 \times 10$$

$$\frac{(20!)(19!)}{3} = \frac{(19!)^2 \times 20}{3} = (19!)^2 \times \tfrac{20}{3}$$

$$\frac{(20!)(19!)}{4} = \frac{(19!)^2 \times 20}{4} = (19!)^2 \times 5$$

$$\frac{(20!)(19!)}{5} = \frac{(19!)^2 \times 20}{5} = (19!)^2 \times 4$$

Puisque $(19!)^2$ est le carré de l'entier $(19!)$, c'est donc un carré parfait.
Un carré parfait et un entier positif, f, ont comme produit un carré parfait uniquement lorsque f est un carré parfait.
Cette condition est remplie par le choix de réponse (E).
Comment se fait-il que $(19!)^2 \times 4$ soit un carré parfait ?
On réécrit $(19!)^2 \times 4 = (19!)^2 \times 2^2 = (19! \times 2)^2$ afin de démontrer que c'est le carré de l'entier $19! \times 2$ et que c'est donc un carré parfait.
Chacun des quatre autres choix de réponse n'est pas égal à un carré parfait, pourquoi ?

Réponse : (E)

24. On constate d'abord que la liste des 10 nombres a une somme de $0+1+2+3+4+5+6+7+8+9$ ou 45.
Si n est le nombre de groupes et que m est la somme des nombres dans chaque groupe, donc $mn = 45$.
45 est donc un multiple du nombre de groupes.
Puisqu'il doit y avoir au moins 2 groupes, le nombre de groupes est l'un des suivants : $3, 5, 9, 15, 45$.
S'il y a 9 groupes, la somme des nombres dans chaque groupe est égale à $\frac{45}{9} = 5$. Or, ceci n'est pas possible car un des groupes doit contenir le nombre 9 et donc ne peut avoir une somme de 5.
De même, s'il y a 15 ou 45 groupes, la somme des nombres dans chaque groupe doit être respectivement 3 ou 1 ; ces sommes sont trop petites.
Donc, il y a soit 5 ou 3 groupes.

Supposons d'abord qu'il y ait cinq groupes.
Dans ce cas, la somme des nombres dans chaque groupe doit être égale à $\frac{45}{5} = 9$.
Puisque 0 ne contribue aucunement à la somme, on peut l'omettre pour l'instant.
Puisque la somme des nombres dans chaque groupe doit être égale à 9, un des groupes doit être composé uniquement du nombre 9.
Le nombre 8 doit être dans un groupe avec le nombre 1 afin de ne pas dépasser la somme requise de 9.
Autrement dit, un des groupes ne comporte que les nombres 1 et 8. Ce groupe est dénoté $\{1, 8\}$.
Le nombre 7 ne peut pas être dans un groupe avec un nombre supérieur à 2. Puisque le nombre 1 est déjà associé au nombre 8, le groupe qui comprend le nombre 7 doit être le groupe $\{2, 7\}$.
En suivant le même raisonnement, il en découle que $\{3,6\}$ soit un groupe et que $\{4,5\}$ soit un autre groupe.
Donc, s'il y a 5 groupes, ceux-ci doivent être les groupes $\{9\}, \{1, 8\}, \{2, 7\}, \{3, 6\}$ et $\{4, 5\}$.
Comme indiqué précédemment, 0 ne contribue aucunement à la somme, on peut donc l'insérer dans n'importe lequel des 5 groupes sans que cela n'affecte leurs sommes.
On peut faire cela de cinq manières : $\{0, 9\}$, $\{1, 8\}$, $\{2, 7\}$, $\{3, 6\}$, $\{4, 5\}$, ou $\{9\}$, $\{0, 1{,}8\}$, $\{2, 7\}$, $\{3, 6\}$, $\{4, 5\}$ et ainsi de suite.
On a donc montré qu'il y a 5 façons de séparer les nombres de 0 à 9 en cinq groupes de manière que chaque groupe ait la même somme.

Supposons maintenant qu'il y ait trois groupes.
Comme dans le cas ci-dessus, on omet le 0 pour l'instant.
Puisqu'il y a trois groupes, la somme des nombres dans chaque groupe doit être égale à $\frac{45}{3} = 15$.
On détermine maintenant les groupes dont la somme des nombres dans chacun d'eux est égale à 15.

Puisqu'il y en a 17, on les nomme de A à Q :

A	$\{6,9\}$	G	$\{2,5,8\}$	M	$\{1,3,4,7\}$
B	$\{1,5,9\}$	H	$\{3,4,8\}$	N	$\{4,5,6\}$
C	$\{2,4,9\}$	I	$\{1,2,4,8\}$	O	$\{1,3,5,6\}$
D	$\{1,2,3,9\}$	J	$\{2,6,7\}$	P	$\{2,3,4,6\}$
E	$\{7,8\}$	K	$\{3,5,7\}$	Q	$\{1,2,3,4,5\}$
F	$\{1,6,8\}$	L	$\{1,2,5,7\}$		

Parmi ces 17 groupes, le nombre 9 paraît uniquement dans les groupes A, B, C et D.
Par conséquent, tout moyen qui sépare les entiers en trois groupes doit utiliser uniquement un de ces quatre groupes.
Supposons que $A = \{6,9\}$ est un des groupes. Cela veut dire que les deux autres groupes ne comprennent pas le nombre 6 ou le nombre 9.
Les groupes qui ne comprennent pas 6 et 9 sont les groupes E, G, H, I, K, L, M et Q.
Si $E = \{7,8\}$ est un des groupes, on aura utilisé les nombres $6, 7, 8$ et 9, donc le groupe restant doit être $Q = \{1,2,3,4,5\}$.
Si $G = \{2,5,8\}$ est un des groupes, on aura utilisé les nombres $2, 5, 6, 8$ et 9.
Donc le troisième groupe devra être $M = \{1,3,4,7\}$.
De même, si H est un des groupes, L l'est aussi, et si I est un des groupes, K l'est aussi.
À ce stade, nul besoin de continuer la vérification car si on suppose par exemple que M est l'un des groupes, on est obligé de prendre G en tant que troisième groupe. Or, on a déjà identifié le cas où on sépare les nombres en groupes A, M et G.
Pour résumer, si A est l'un des groupes, les configurations possibles sont les suivantes :

$$A, E, Q \qquad A, G, M \qquad A, H, L \qquad A, I, K$$

Si on suppose que B est un des groupes, les deux autres groupes ne peuvent pas comprendre les nombres 1, 5 et 9.
Les groupes remplissant cette condition sont les groupes E, H, J et P.
En suivant le même raisonnement que celui dans le paragaraphe précédent, les configurations comprenant B sont :

$$B, E, P \qquad B, H, J$$

Les groupes qui n'ont aucun membre en commun avec C sont les groupes E, F, K et O. Les configurations qui comprennent C sont donc :

$$C, E, O \qquad C, F, K$$

Les seuls groupes qui n'ont aucun membre en commun avec D sont les groupes E et N. La seule configuration qui comprend D est donc :

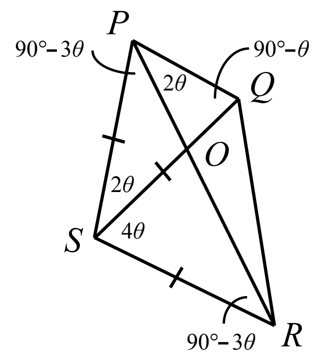
$$D, E, N.$$

En tout, on a trouvé 9 façons possibles de séparer les nombres de 1 à 9 en trois groupes, chacun ayant la même somme.
Comme indiqué précédemment, 0 ne contribue aucunement à la somme, on peut donc l'insérer dans n'importe lequel des groupes sans que cela n'affecte leurs sommes. Puisqu'il y a trois groupes, il y a donc trois manières possibles d'inclure le 0 dans chaque configuration, ainsi il y a $9 \times 3 = 27$ façons de séparer les entiers de 0 à 9 en trois groupes dont la somme de chacun est la même.

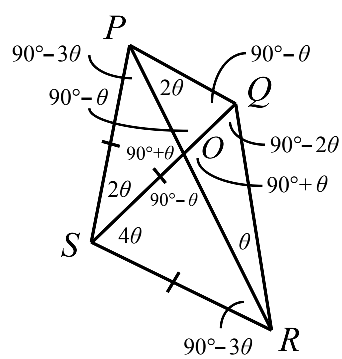
En se souvenant qu'il y avait 5 façons de séparer les nombres de 0 à 9 en cinq groupes, on peut séparer la liste $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ de $27 + 5 = 32$ différentes façons afin qu'il y ait au moins deux groupes et que la somme des nombres de chaque groupe soit la même.

Réponse : (E)

25. On nomme d'abord $\angle QSP = 2\theta$. Puisque $\angle QSR = 2\angle QSP$, donc $\angle QSR = 2 \times 2\theta = 4\theta$.



Ensuite, on détermine la mesure des 12 angles en fonction de θ.
Soit $x = \angle SPR$. Le triangle SPR est isocèle car $SP = SR$, donc $\angle SRP = \angle SPR = x$.
De plus, $\angle PSR = 2\theta + 4\theta = 6\theta$, donc $180^\circ = 6\theta + x + x$.
On a ainsi : $2x = 180^\circ - 6\theta$, d'où $x = 90^\circ - 3\theta$.
Dans le triangle SPQ, on sait que $\angle SPQ + \angle SQP + \angle PSQ = 180^\circ$, on se sert de cette règle et de $\angle PSQ = 2\theta$ afin d'écrire $\angle SPQ + \angle SQP = 180^\circ - 2\theta$.
Puisque $SP = SR$, le triangle SPQ est isocèle, donc $\angle SPQ = \angle SQP$.
On reporte cette dernière dans l'équation ci-dessus afin d'obtenir $2\angle SQP = 180^\circ - 2\theta$ ou $\angle SQP = 90^\circ - \theta$.
On remarque que ceci veut aussi dire $\angle SPQ = 90^\circ - \theta$, donc $\angle SPR + \angle RPQ = 90^\circ - \theta$.
On reporte $\angle SPR = 90^\circ - 3\theta$ afin d'obtenir $90^\circ - 3\theta + \angle RPQ = 90^\circ - \theta$ d'où $\angle RPQ = 2\theta$.
Puisque $\angle POQ + \angle PQO + \angle OPQ = 180^\circ$, donc $\angle POQ + (90^\circ - \theta) + 2\theta = 180^\circ$.



On obtient ainsi $\angle POQ = 90^\circ - \theta$.
Les angles $\angle POQ$ et $\angle ROS$ sont opposés, donc $\angle ROS = \angle POQ = 90^\circ - \theta$. De plus, $\angle POQ + \angle QOR = 180^\circ$, alors $\angle QOR = 180^\circ - \angle POQ = 180^\circ - (90^\circ - \theta) = 90^\circ + \theta$.
Puisque les angles $\angle POS$ et $\angle ROQ$ sont opposés, ils sont aussi égaux, donc $\angle POS = 90^\circ + \theta$.
On pose $\angle SQR = y$.
Puisque $SQ = SR$, le triangle SQR est isocèle, donc $\angle SRQ = \angle SQR = y$.
On reporte cette dernière, ainsi que $\angle QSR = 4\theta$, dans la règle $\angle QSR + \angle SRQ + \angle SQR = 180^\circ$ afin d'obtenir $4\theta + 2y = 180^\circ$, donc $2y = 180^\circ - 4\theta$ ou $y = 90^\circ - 2\theta$.
On a donc $\angle ROQ + \angle OQR + \angle QRO = 180^\circ$, d'où $\angle QRO = 180^\circ - (90^\circ + \theta) - (90^\circ - 2\theta) = \theta$.
En résumé, les 12 angles, exprimés en fonction de θ, sont :

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & \angle QSP & = & \angle RPQ & = & 2\theta \\ & & & & \angle QSR & = & 4\theta \\ & & \angle SRP & = & \angle RPS & = & 90^\circ - 3\theta \\ & & & & \angle QRP & = & \theta \\ & & & & \angle RQS & = & 90^\circ - 2\theta \\ \angle SQP & = & \angle POQ & = & \angle ROS & = & 90^\circ - \theta \\ & & \angle POS & = & \angle QOR & = & 90^\circ + \theta \end{array}$$

On sait que la mesure de chacun de ces angles en degrés est un entier.
On comprend notamment que θ doit être un degré entier puisque $\angle QRP = \theta$.
On sait aussi que PR et QS se coupent à l'intérieur de $PQRS$.
On déduit donc que $6\theta = \angle PSR < 180^\circ$.
Cela veut dire que $\theta < 30^\circ$.

Puisque 4θ est pair (et est supérieur à 2), il ne peut pas être un nombre premier pour tout entier θ.
Les entiers 2θ et 3θ sont uniquement des nombres premiers lorsque $\theta = 1^\circ$.
Dans ce cas, les douze angles sont :

$$2^\circ, 2^\circ, 4^\circ, 87^\circ, 87^\circ, 1^\circ, 88^\circ, 89^\circ, 89^\circ, 89^\circ, 91^\circ, 91^\circ$$

dont cinq sont des nombres premiers : deux copies de 2° et trois copies de 89°.
Donc, $\theta \neq 1^\circ$.
En factorisant, on obtient $90^\circ - 2\theta = 2(45^\circ - \theta)$ qui est pair.
Donc, celui-ci peut uniquement être un nombre premier lorsque $45^\circ - \theta = 1$ ou $\theta = 44^\circ$.
On sait que $\theta < 30^\circ$, donc $90^\circ - 2\theta$ est un nombre composé.
De même, $90^\circ - 3\theta = 3(30^\circ - \theta)$ peut uniquement être un nombre premier lorsque $30^\circ - \theta = 1^\circ$ ou $\theta = 29^\circ$.
Lorsque $\theta = 29^\circ$, les douze angles sont :

$$58^\circ, 58^\circ, 116^\circ, 3^\circ, 3^\circ, 29^\circ, 32^\circ, 61^\circ, 61^\circ, 61^\circ, 119^\circ, 119^\circ$$

dont six sont des nombres premiers : 29°, les deux copies de 3° et les trois copies de 61°.
Lorsque $\theta < 30^\circ$ est tout autre que 1° et 29°, chacun des six angles

$$2\theta, 4\theta, 90^\circ - 3\theta, 90^\circ - 2\theta, 2\theta, 90^\circ - 3\theta$$

est un nombre composé.
Afin de remplir la condition que les mesures de 6 angles soient des nombres premiers, il faut que les mesures des angles θ, $90^\circ - \theta$ et $90^\circ + \theta$ soient des nombres premiers.
Les nombres premiers inférieurs à 30 sont $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$ et 29.
On a déjà évalué la mesure des angles lorsque $\theta = 29^\circ$. On évalue ensuite les valeurs des angles $\theta, 90^\circ + \theta$ et $90^\circ - \theta$ pour les autres cas dans le tableau suivant :

θ	$90^\circ - \theta$	$90^\circ + \theta$	Les trois angles sont des nombres premiers ?
2°	88°	92°	×
3°	87°	93°	×
5°	85°	95°	×
7°	83°	97°	✓
11°	79°	101°	✓
13°	77°	103°	×
17°	73°	107°	✓
19°	71°	109°	✓
23°	67°	113°	✓

Parmi les angles qui paraissent dans les deux colonnes du milieu, les nombres premiers sont :

$$67^\circ, 71^\circ, 73^\circ, 79^\circ, 83^\circ, 97^\circ, 101^\circ, 103^\circ, 107^\circ, 109^\circ, 113^\circ.$$

Donc, les trois angles sont tous des nombres premiers lorsque θ est l'un de $7^\circ, 11^\circ, 17^\circ, 19^\circ, 23^\circ$.
Finalement, en rassemblant nos résultats (à ne pas oublier ceux du cas où $\theta = 29^\circ$), on obtient un total de 6 quadrilatères qui remplissent les conditions telles qu'indiquées dans la question.

Réponse : (D)