Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Galois 2019

le mercredi 10 avril 2019

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 11 avril 2019

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Le total de la commande, selon les prix indiqués dans le menu (donc taxe de vente non comprise), est de 7,50 \$ + 5,00 \$ + 3,00 \$ = 15,50 \$.
Une taxe de vente de 10 % du montant de 15,50 \$ est égale à 15,50 \$ × 0,10 = 1,55 \$.
Donc la facture totale de la commande, incluant la taxe de vente, est égale à 15,50 \$ + 1,55 \$ = 17,05 \$.
Par ailleurs, on aurait pu ajouter la taxe de vente de 10 % directement à la commande en multipliant
15,50 \$ × 1,10 = 17,05 \$.

(b) Un burrito qui coûte 6,00 \$ selon le menu coûtera 6,00 \$ × 1,10 = 6,60 \$ après la taxe de vente de 10 %.
À ce prix, 7 burritos coûteront 6,60 \$ × 7 = 46,20 \$ tandis que 8 burritos coûteront 6,60 \$ × 8 = 52,80 \$.
Puisque Jackson n'a que 50,00 \$ à dépenser, il ne pourra s'acheter que 7 burritos.

(c) Pour s'acheter deux hotdogs lundi, Chase a dépensé 5,00 \$ + 4,50 \$ = 9,50 \$, taxe de vente de 10% non comprise.
Taxe de vente comprise, Chase a donc dépensé 9,50 \$ × 1,10 = 10,45 \$ ce jour-là.

Pour s'acheter deux hotdogs mardi, Chase a dépensé 5,00 \$ + 5,00 \$ = 10,00 \$, taxe de vente de 5% non comprise.
Taxe de vente comprise, Chase a donc dépensé 10,00 \$ × 1,05 = 10,50 \$ ce jour-là.

Ainsi, Chase a dépensé moins d'argent lundi.

2. (a) L'ordonnée à l'origine de la droite d'équation $y = -2x + 12$ est égale à 12. Donc $OA = 12$.
On pose $y = 0$ dans l'équation de la droite afin de déterminer l'abscisse à l'origine de cette droite. On obtient donc $0 = -2x+12$ ou $2x = 12$ d'où $x = 6$.
L'abscisse à l'origine est ainsi égale à 6. Donc $OB = 6$. Le triangle AOB a donc une aire de $\frac{1}{2}(OB)(OA)$ ou $\frac{1}{2}(6)(12)$ ou 36.

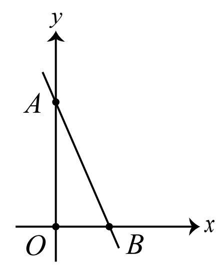

Figure 1

(b) *Solution 1*
On commence en déterminant l'équation de la droite qui passe par O et C.
Cette droite est perpendiculaire à la droite d'équation $y = -2x + 12$, donc sa pente est égale à l'opposé de l'inverse de -2, soit $\frac{1}{2}$.
Puisque cette droite passe par l'origine et qu'elle a une ordonnée à l'origine de 0, son équation est donc $y = \frac{1}{2}x$.

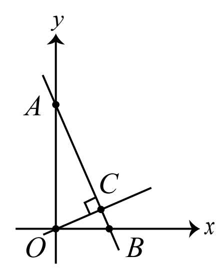

Figure 2

Les droites $y = \frac{1}{2}x$ et $y = -2x + 12$ se coupent en C.
On reporte l'équation de la première droite dans celle de la deuxième. On obtient donc $\frac{1}{2}x = -2x + 12$ ou $\frac{5}{2}x = 12$ d'où $x = \frac{24}{5}$.
On reporte $x = \frac{24}{5}$ dans l'équation $y = \frac{1}{2}x$ afin d'obtenir $y = \frac{1}{2}\left(\frac{24}{5}\right) = \frac{12}{5}$. Les coordonnées du point C sont donc $\left(\frac{24}{5}, \frac{12}{5}\right)$.

Solution 2

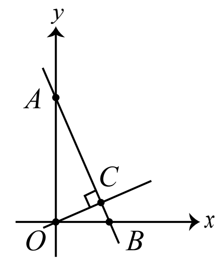

Figure 2

Comme dans la Solution 1, on remarque avant tout que l'équation de la droite qui passe par O et C a une pente de $\frac{1}{2}$.
Le point C est situé sur la droite d'équation $y = -2x + 12$. Donc si a est l'abscisse du point C, $-2a + 12$ en sera son ordonnée.
La droite qui passe par $O(0, 0)$ et $C(a, -2a + 12)$ a une pente de $\frac{-2a + 12}{a}$. Cette dernière doit être égale à $\frac{1}{2}$.
On résout afin d'obtenir $\frac{-2a + 12}{a} = \frac{1}{2}$ ou $2(-2a + 12) = a$ ou $24 = 5a$, d'où $a = \frac{24}{5}$.
Lorsque $a = \frac{24}{5}$, on obtient $-2a+12 = -2\left(\frac{24}{5}\right)+12 = -\frac{48}{5}+12 = \frac{12}{5}$. Les coordonnées du point C sont donc $\left(\frac{24}{5}, \frac{12}{5}\right)$.

(c) À partir de la partie (b) de la Solution 1, l'équation de la droite qui passe par O et C est $y = \frac{1}{2}x$. Le point D est situé sur cette droite. Donc si n est l'abscisse du point D, $\frac{1}{2}n$ en sera son ordonnée. Les coordonnées du point D sont donc $\left(n, \frac{1}{2}n\right)$.

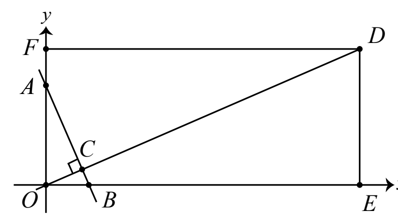

Figure 3

Le point E a la même abscisse que le point D car il est situé en-dessous de ce dernier. C'est-à-dire, les coordonnées du point E sont $(n, 0)$ d'où $OE = n$.
De même, F est situé sur la même droite horizontale que D et a donc la même ordonnée que le point D.
C'est-à-dire, les coordonnées du point F sont $\left(0, \frac{1}{2}n\right)$ d'où $OF = \frac{1}{2}n$.
L'aire de $DEOF$ est égale à 1352. Donc $(OE)(OF) = 1352$ ou $n\left(\frac{1}{2}n\right) = 1352$ ou $n^2 = 2704$, d'où $n = \sqrt{2704} = 52$ (car $n > 0$) et $\frac{1}{2}n = 26$.
Si l'aire de $DEOF$ est égale à 1352, les coordonnées du point D sont donc $(52, 26)$.

3. (a) Autrement dit, cette question cherche à déterminer le plus grand nombre de facteurs 2 dans $9!$.
En exprimant $9!$ sous la forme d'un produit de ses facteurs premiers, on obtient

$$9! = 9(8)(7)(6)(5)(4)(3)(2)(1) = (3^2)(2^3)(7)(2 \cdot 3)(5)(2^2)(3)(2)(1)$$

que l'on peut exprimer sous la forme $9! = 7(5)(3^4)(2^7)$. Donc 7 est le plus grand entier positif m qui admettrait 2^m comme diviseur de $9!$.

(b) Afin que $n!$ soit divisible par 7^2, il doit contenir au moins deux facteurs 7.
Les multiples de 7 sont les seuls entiers qui ont 7 comme facteur.
Les plus petits multiples positifs de 7 sont 7 et 14, dont chacun ne contribue qu'un seul facteur 7 à la factorisation première de $14!$. Donc si $n \leq 13$, alors il est impossible que $n!$ ait deux facteurs 7.
Donc, 14 est la plus petite valeur de n pour laquelle $n!$ est divisible par 7^2.

(c) Un entier positif égal à $n!$ est divisible par 7^7 mais non par 7^8 lorsqu'on retrouve uniquement sept facteurs 7 dans sa factorisation première (cette dernière peut aussi contenir d'autres facteurs premiers).
Les multiples de 7 sont les seuls entiers qui ont 7 comme facteur.
Les six premiers multiples positifs de 7 $(7, 14, 21, 28, 35, 42)$ ont chacun un seul facteur 7 et donc contribuent chacun un seul 7 à la factorisation première de $42!$.
C'est-à-dire, $42!$ est divisible par 7^6 mais non par 7^7, donc $n > 42$.
La prochaine valeur de $n > 42$ qui est un multiple de 7 (et qui contient donc plus qu'un seul facteur 7 dans sa factorisation première) est 49.
Par contre, 49 contribue deux facteurs 7 supplémentaires à la factorisation première de $49!$ (puisque $49 = 7^2$), donc $49!$ est divisible par $7^{6+2} = 7^8$.
Pour chaque entier positif $n \geq 49$, $n!$ est divisible par 7^8 (et peut-être même par une puissance plus élevée de 7).
Pour chaque entier positif $n < 49$, la plus grande puissance de 7 par laquelle on peut diviser $n!$ est 7^6.
Donc, il n'y a aucun entier positif n pour lequel $n!$ est divisible par 7^7 mais n'est pas divisible par 7^8.

(d) Les multiples de 13 sont les seuls entiers qui ont 13 comme facteur.
Puisque $n!$ a deux facteurs 13, alors n doit être au moins 26 (un facteur du 13 et un deuxième du 26).
Puisque 29 est un nombre premier qui ne paraît pas dans la factorisation première de $n!$, alors $n \leq 28$.
On remarque que pour chacune des valeurs possibles $n = 26, 27$ et 28, $n!$ a deux facteurs 11, deux facteurs 13 et un seul facteur de chacun des facteurs suivants : 17, 19 et 23.
Dans le tableau ci-dessous, on détermine le nombre de facteurs $2, 3, 5$ et 7 dans $26!$.

Nombres qui contiennent des facteurs 2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
Nombre de facteurs 2 dans chacun	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1
Nombres qui contiennent des facteurs 3	3	6	9	12	15	18	21	24					
Nombre de facteurs 3 dans chacun	1	1	2	1	1	2	1	1					
Nombres qui contiennent des facteurs 5	5	10	15	20	25								
Nombre de facteurs 5 dans chacun	1	1	1	1	2								
Nombres qui contiennent des facteurs 7	7	14	21										
Nombre de facteurs 7 dans chacun	1	1	1										

On se rappelle que $n! = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$ et $a + b + c + d = 45$.
Puisque $n!$ a a facteurs 2, alors à partir du tableau ci-dessus, $a = 23$ lorsque $n = 26$.
De même, $26!$ a $b = 10$, $c = 6$ et $d = 3$, d'où $a + b + c + d = 23 + 10 + 6 + 3 = 42$, donc $n \neq 26$.
On détermine ensuite les valeurs de a, b, c, d pour $27!$.
Puisque $27!$ contient non seulement les facteurs premiers de $26!$ mais aussi ceux de $27 = 3^3$,

alors $a+b+c+d = 23+(10+3)+6+3 = 45$, comme il fallait montrer.
Finalement, on détermine les valeurs de a, b, c, d pour 28!.
Puisque 28! contient non seulement les facteurs premiers de 27! mais aussi ceux de $28 = 2^2 \cdot 7$, alors $a+b+c+d = (23+2)+13+6+(3+1) = 48$, d'où $n \neq 28$.
Ainsi, $n = 27$ est le seul entier positif pour lequel $n! = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$ et $a+b+c+d = 45$.

4. (a) Afin qu'un entier positif soit divisible par 10, son chiffre des unités doit être 0.
Afin qu'un entier positif ait un équilibre des chiffres, chaque chiffre d doit y paraître un nombre maximal de d fois.
Dans le cas où $d = 0$, cela signifie qu'un entier positif qui fait preuve d'un équilibre des chiffres aurait un maximum de 0 zéros.
Cela signifie qu'il y a 0 zéros.
Un multiple de 10 ne peut pas avoir un équilibre des chiffres car il contient au moins un 0 comme chiffre (le chiffre des unités).

(b) Chaque entier positif à quatre chiffres peut être exprimé sous l'une des formes suivantes : x, x, x, x ou x, x, x, y ou x, x, y, y ou x, x, y, z ou x, y, z, w, où w, x, y et z sont des chiffres différents.
Dans cette partie, nous excluons la possibilité qu'un chiffre puisse être égal à 0.

Un entier positif de la forme w, x, y, z aura toujours un équilibre des chiffres car aucun des chiffres ne paraît plus d'une seule fois.

Un entier positif de la forme x, x, x, x n'a pas un équilibre des chiffres si $x = 1$ ou $x = 2$ ou $x = 3$. Il y a 3 tels entiers.

Un entier positif de la forme x, x, x, y n'a pas un équilibre des chiffres si $x = 1$ ou $x = 2$ (où y serait tout chiffre autre que 0 et x).
Il y a deux choix pour x, 8 choix pour y (tout chiffre autre que 0 et x) et 4 emplacements possibles pour le chiffre y (milliers, centaines, dizaines ou unités), après quoi les chiffres x sont placés sans autre choix.
Donc, dans ce cas, il y a $2 \times 8 \times 4 = 64$ entiers qui n'ont pas un équilibre des chiffres.

Un entier positif de la forme x, x, y, y n'a pas un équilibre des chiffres si soit $x = 1$ soit $y = 1$. Supposons que $x = 1$ et que $y \neq 1$.
Il y a 8 choix pour y et 6 choix d'emplacements pour x. (Si l'entier a les chiffres $abcd$, alors x pourrait représenter les positions a, b ou a, c ou a, d ou b, c ou b, d ou c, d.)
Donc, dans ce cas, il y a $8 \times 6 = 48$ entiers qui n'ont pas un équilibre des chiffres.

Un entier positif de la forme x, x, y, z n'a pas un équilibre des chiffres si $x = 1$. Dans ce cas, on suppose que $y \neq 1$ que $z \neq 1$ et que $y \neq z$.
Il y a 6 choix d'emplacements pour les deux x. (Si l'entier a les chiffres $abcd$, alors x pourrait représenter les positions a, b ou a, c ou a, d ou b, c ou b, d ou c, d.)
Il y a donc 8 choix pour le chiffre le plus à gauche (tout chiffre autre que 0 et 1) et 7 choix pour le chiffre restant (tout chiffre autre que 0, 1 et y).
Dans ce cas, il y a donc $6 \times 8 \times 7 = 336$ entiers qui n'ont pas un équilibre des chiffres.

Au total, il y a $336+48+64+3 = 451$ entiers à 4 chiffres, dont aucun n'est 0, qui n'auraient pas un équilibre des chiffres.

(c) Supposons que n et m sont des entiers à k chiffres qui ont un équilibre des chiffres et qui vérifient $m + n = 10^k$ où k est aussi grand que possible. Tout d'abord, on va déduire que $k \leq 21$. Après cela, on va expliquer comment créer des entiers à k chiffres qui font preuve d'un équilibre des chiffres et dont la somme est égale à 10^k pour tout entier k où $1 \leq k \leq 21$. Cela démontrera ainsi que la réponse au problème est 21.

On pose $n = n_k n_{k-1} n_{k-2} \cdots n_2 n_1$ et $m = m_k m_{k-1} m_{k-2} \cdots m_2 m_1$ de manière que n_k, n_{k-1}, $\ldots$, n_1 et $m_k, m_{k-1}, \ldots, m_1$ soient respectivement les chiffres de n et de m. On avait énoncé dans la partie (a) qu'un nombre qui a un équilibre des chiffres ne peut pas avoir un 0 comme chiffre. Donc, tous les chiffres de m et n sont des chiffres de 1 à 9.

À partir de $m + n = 10^k$, on remarque que $m_1 + n_1$ doit terminer en 0 et est donc un multiple de 10. Puisque $1 \leq m_1 \leq 9$ et $1 \leq n_1 \leq 9$, on sait donc que $2 \leq m_1 + n_1 \leq 18$. Le seul multiple de 10 dans cet intervalle est 10 lui-même, donc $m_1 + n_1 = 10$. Cela signifie qu'il y a une retenue dans l'addition :

$$\begin{array}{rcccccc} & & & & & ^1 & \\ & n_k & n_{k-1} & \cdots & n_4 & n_3 & n_2 & n_1 \\ + & m_k & m_{k-1} & \cdots & m_4 & m_3 & m_2 & m_1 \\ \hline & & & & & & & 0 \end{array}$$

Dans le chiffre des dizaines, il faut que $n_2 + m_2 + 1$ soit un multiple de 10. Comme dans la situation ci-dessus, $1 \leq n_2 \leq 9$ et $1 \leq m_2 \leq 9$, donc $2 \leq n_2 + m_2 \leq 18$, qui signifie $3 \leq n_2 + m_2 + 1 \leq 19$. Le seul multiple de 10 dans cet intervalle est 10 lui-même, cela signifie que $n_2 + m_2 + 1 = 10$ ou $n_2 + m_2 = 9$.

On continue l'addition :

$$\begin{array}{rccccccc} & & & & & ^1 & ^1 & \\ & n_k & n_{k-1} & \cdots & n_4 & n_3 & n_2 & n_1 \\ + & m_k & m_{k-1} & \cdots & m_4 & m_3 & m_2 & m_1 \\ \hline & & & & & & 0 & 0 \end{array}$$

À l'aide du même raisonnement, on sait que $n_3 + m_3 = 9$, que $n_4 + m_4 = 9$ et ainsi de suite.

Pour l'instant, on ne va pas se soucier du chiffre des unités n. On va plutôt porter notre attention sur les chifres allant de n_k à n_2. On va les désigner comme les "premiers $k - 1$ chiffres" de n. De même, on va désigner les chiffres allant de m_k à m_2 comme les premiers $k - 1$ chiffres de m.

Puisque n et m ont tous les deux un équilibre des chiffres, pas plus d'un des premiers $k-1$ chiffres de n ou de m ne peut être égal à 1.

De même, au plus deux des premiers $k - 1$ chiffres de m et de n sont des 2, au plus trois des premiers $k - 1$ chiffres sont des 3 et au plus quatre des premiers $k - 1$ chiffres sont des 4.

Supposons que $n_r = 5$ pour un $r > 1$ quelconque. Donc on doit avoir $m_r = 4$ car $n_r + m_r = 9$. Puisqu'au plus quatre des premiers $k - 1$ chiffres de m peuvent être des 4, cela signifie qu'au plus quatre des premiers $k - 1$ chiffres de n sont des 5.

Si $n_r = 6$ pour un $r > 1$ quelconque, alors $m_r = 3$ car $n_r + m_r = 9$. Puisque m a un équilibre des chiffre, cela signifie qu'au plus trois des premiers $k - 1$ chiffres de n sont des 6.

De même, au plus deux des premiers $k - 1$ chiffres de n sont des 7 et pas plus d'un des premiers $k - 1$ chiffres de n ne peut être égal à 8.

Si $n_r = 9$ pour un $r > 1$ quelconque, alors $m_r = 0$. Mais puisque m a un équilibre des chiffres, aucun de ses chiffres n'est un 0. Donc, aucun des premiers $k - 1$ chiffres de n ne peut être égal à 9.

Le tableau suivant résume le nombre maximal de fois que peut paraître chaque chiffre dans les premiers $k-1$ chiffres de n :

chiffre	le nombre maximal de fois que peut paraître le chiffre dans n
1	1
2	2
3	3
4	4
5	4
6	3
7	2
8	1
9	0

Puisque tous les chiffres de n doivent être des chiffres de 1 à 9, cela signifie que $k-1$ n'est pas plus grand que

$$1+2+3+4+4+3+2+1+0=20$$

Ce qui signifie que $k-1 \leq 20$, donc $k \leq 21$. Ceci établit que si n et m ont tous les deux un équilibre des chiffres, chacun aura k chiffres et, ensembles, ils vérifieront $m+n=10^k$ où $k \leq 21$. On va maintenant expliquer comment créer des entiers à k chiffres qui font preuve d'un équilibre des chiffres et qui remplissent la condition que $1 \leq k \leq 21$.

Afin de créer des entiers, n et m, à 21 chiffres qui font preuve d'un équilibre des chiffres et dont la somme est égale à $m+n=10^{21}$, on doit utiliser le nombre maximal de chaque chiffre dans les 20 premiers chiffres.

Si les chiffres des unités sont $n_1=m_1=5$, cela vérifie $n_1+m_1=10$, et m et n auront chacun que quatre chiffres 5 dans les 20 premiers chiffres. Donc m et n ont un équilibre des chiffres si leurs chiffres des unités sont des 5. Lorsque $k=21$, pouvez-vous voir pourquoi les chiffres des unités de m et de n doivent être des 5 ?

On peut obtenir le résultat souhaité à l'aide de $n_1=m_1=5$. Par exemple :

$$n=877666555544443332215 \quad \text{et} \quad m=122333444455556667785$$

Chacun de ces entiers a 21 chiffres et a un équilibre des chiffres. Leur somme est aussi égale à 10^{21}.

Afin de créer des couples d'entiers, m et n, à k chiffres qui ont un équilibre des chiffres et dont la somme est égale à 10^k (k étant inférieur à 21), on peut tout simplement enlever des chiffres un par un des extrémités gauches de n et de m. Par exemple,

$$n=77666555544443332215 \quad \text{et} \quad m=22333444455556667785$$

est un couple d'entiers à vingt chiffres qui ont un équilibre des chiffres et dont la somme est égale à 10^{20}.

Le couple

$$n=44443332215 \quad \text{et} \quad m=55556667785$$

est un couple d'entiers à onze chiffres qui ont un équilibre des chiffres et dont la somme est égale à 10^{11}.

Le couple $n=5$ et $m=5$ est un couple d'entiers à un chiffre qui ont un équilibre des chiffres et dont la somme est égale à $10=10^1$.

Il existe donc des entiers positifs m et n qui ont un équilibre des chiffres, où m et n ont chacun k chiffres (k étant les entiers de 1 à 21) et qui vérifient $m + n = 10^k$.

Il y a donc 21 valeurs possibles de k.