



Le CENTRE d'ÉDUCATION en  
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE  
*cemc.uwaterloo.ca*

# Concours Galois

(10<sup>e</sup> année – Sec. IV)

le mercredi 10 avril 2019

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 11 avril 2019

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)



UNIVERSITY OF  
**WATERLOO**

Durée : 75 minutes

©2019 University of Waterloo

*Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.*

Nombre de questions : 4

Chaque question vaut 10 points.

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci :



- Chacune vaut 2 ou 3 points.
- Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
- **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.

2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci :



- Elles valent le reste des 10 points attribués à la question.
- La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
- Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
- Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

**ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.**

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple,  $\pi + 1$  et  $1 - \sqrt{2}$  sont des nombres exacts simplifiés.

*Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.*

*Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, et leur niveau scolaire, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au [cemc.uwaterloo.ca](http://cemc.uwaterloo.ca). Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.*

NOTE :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de  , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de  , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent être présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par  $y = x^3 - x$ , mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
7. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Fryer, Galois ou Hypatie.

1. Le restaurant Galois est situé dans une région qui ajoute une taxe de vente de 10% au prix des boissons et des plats commandés au restaurant. Les prix indiqués dans leur menu ne comprennent pas la taxe de vente.



(a) Becky commande du menu une assiette de lasagnes au prix de 7,50 \$, une salade au prix de 5,00 \$ et une limonade au prix de 3,00 \$. Après la taxe de vente, que sera la facture totale de Becky ?



(b) Un burrito coûte 6,00 \$ dans le menu. Sachant que la taxe de vente est incluse dans la facture totale, quel est le nombre maximal de burritos que Jackson pourra s'acheter s'il n'a que 50,00 \$ à dépenser ?



(c) Dans le menu du restaurant Galois, on propose des hotdogs à un prix habituel de 5,00 \$. Par contre, le restaurant propose aussi les offres promotionnelles suivantes :

- Le lundi, l'achat d'un premier hotdog au prix habituel de 5,00 \$ vous permet d'acheter un deuxième hotdog à un prix réduit de 4,50\$.
- Le mardi, le restaurant n'ajoute que la moitié de la taxe de vente au prix des hotdogs.

Chase a acheté deux hotdogs lundi et deux hotdogs mardi. Sachant que la taxe de vente est incluse dans la facture totale, déterminer le jour où Chase a dépensé le moins d'argent.

2. Dans la Figure 1, l'hypoténuse du triangle rectangle  $AOB$  est située sur la droite d'équation  $y = -2x + 12$  tandis que les cathètes du triangle  $AOB$  sont situées sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.



- (a) Quelle est l'aire du triangle  $AOB$  ?



- (b) Dans la Figure 2, une deuxième droite passe par  $O$  et est perpendiculaire à la première droite. Ces deux droites se coupent en  $C$ . Déterminer les coordonnées du point  $C$ .



- (c) Dans la Figure 3, la deuxième droite passe par le point  $D$  dans le premier quadrant. Les points  $E$  et  $F$  sont situés sur les axes de manière que  $DEOF$  soit un rectangle. Si l'aire de  $DEOF$  est égale à 1352, déterminer les coordonnées du point  $D$ .

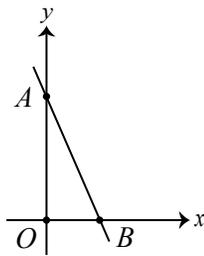


Figure 1

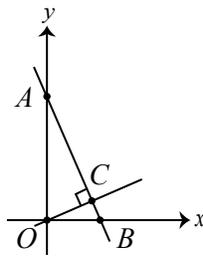


Figure 2

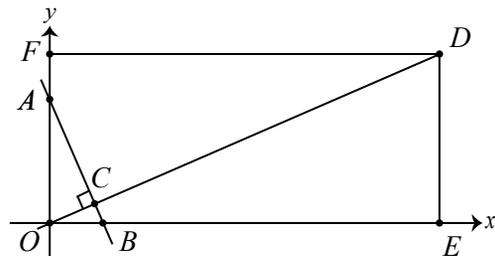


Figure 3

3. Si  $n$  est un entier positif, la notation  $n!$  (qui se lit "factorielle de  $n$ ") est utilisée pour représenter le produit des entiers de 1 à  $n$ . C'est-à-dire,  $n! = n(n-1)(n-2) \cdots (3)(2)(1)$ . Par exemple,  $5! = 5(4)(3)(2)(1)$  ou  $5! = 120$ .



- (a) Quel est le plus grand entier positif  $m$  qui admettrait  $2^m$  comme diviseur de  $9!$  ?



- (b) Quelle est la plus petite valeur de  $n$  pour laquelle  $n!$  est divisible par  $7^2$  ?



- (c) Expliquer pourquoi il n'existe pas un entier positif  $n$  pour lequel  $n!$  est divisible par  $7^7$  mais n'est pas divisible par  $7^8$ .



- (d) Démontrer qu'il y a un seul entier positif  $n$  pour lequel

$$n! = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \text{ et}$$

$$a + b + c + d = 45$$

$a, b, c, d$  étant des entiers positifs.

4. Un entier positif est dit avoir un *équilibre des chiffres* si chaque chiffre  $d$  (où  $0 \leq d \leq 9$ ) paraît un nombre maximal de  $d$  fois dans l'entier. Par exemple, 13224 a un équilibre des chiffres tandis que 21232 ne l'a pas.



- (a) Expliquer pourquoi un entier qui aurait un équilibre des chiffres ne serait pas divisible par 10.



- (b) Combien d'entiers à 4 chiffres, dont aucun n'est 0, n'auraient pas un équilibre des chiffres ?



- (c) Déterminer le nombre d'entiers positifs  $k$  pour lesquels existeraient des entiers positifs  $m$  et  $n$  qui auraient un équilibre des chiffres, où  $m$  et  $n$  auraient chacun  $k$  chiffres, et qui vérifieraient l'équation  $m + n = 10^k$ .



Le CENTRE d'ÉDUCATION en  
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE  
*cemc.uwaterloo.ca*

*Pour les élèves...*

Merci d'avoir participé au concours Galois de 2019! Chaque année, plus de 260 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire ou au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2019.

Visitez notre site Web au [cemc.uwaterloo.ca](http://cemc.uwaterloo.ca) pour :

- des copies gratuites des concours précédents
- des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
- des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

*Pour les enseignants...*

Visitez notre site Web au [cemc.uwaterloo.ca](http://cemc.uwaterloo.ca) pour :

- obtenir des renseignements au sujet des concours de 2019/2020
- inscrire vos élèves aux Concours canadiens de mathématiques de niveau intermédiaire et supérieur qui auront lieu en novembre
- jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11<sup>e</sup> et 12<sup>e</sup> année
- vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
- vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
- vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
- trouver les résultats de vos élèves dans les concours