Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fryer 2019

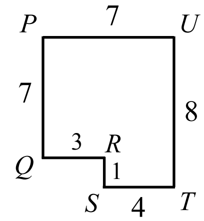
le mercredi 10 avril 2019
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 11 avril 2019
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

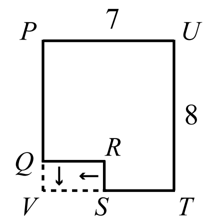
1. (a) Le rectangle dans la Figure A mesure 7 sur 8 et a donc un périmètre égal à $2 \times 7 + 2 \times 8$ ou 30.

(b) *Solution 1*



Dans la figure ci-contre, on identifie les sommets de la Figure B en les nommant.
La Figure B a une largeur de $PU = 7$.
Cependant, la largeur est aussi égale à $QR + ST$.
Puisque $QR = 3$, alors $ST = 7 - 3 = 4$.
De même, $PQ + RS = UT = 8$ et puisque $RS = 1$, alors $PQ = 7$.
La Figure B a un périmètre de $PQ+QR+RS+ST+TU+UP = 7+3+1+4+8+7 = 30$.

Solution 2



La réponse énoncée dans la Solution 1 (30) est égale à la réponse de la partie (a). Pourquoi ?
Considérons les translations dans la figure ci-contre : on fait glisser le segment RS vers la gauche jusqu'à ce qu'il atteigne QV et on fait glisser le segment QR vers le bas jusqu'à ce qu'ill atteigne VS.
Puisque $QRSV$ est un rectangle, alors $PVTU$ est un rectangle.
De plus, puisque $RS = QV$ et $QR = VS$, alors le périmètre de la Figure B est égal au périmètre du rectangle $PVTU$.
Puisque $PV = UT = 8$ et $VT = PU = 7$, le périmètre du rectangle $PVTU$ est égal à 30 (ce rectangle est celui de la partie (a)).
Ainsi, la Figure B a un périmètre de 30.

(c) Si l'on emploie le même raisonnement que celui de la Solution 2, le périmètre de la Figure C est égal au périmètre d'un rectangle qui a des côtés de longueurs $k + 4$ et $k + 2$.
Puisque la Figure C a un périmètre de 56, alors $2(k+4)+2(k+2) = 56$ ou $2k+8+2k+4 = 56$ d'où $4k = 44$ ou $k = 11$.
(Par ailleurs, on aurait pu déterminer que les deux longueurs manquantes dans la Figure C étaient toutes les deux égales à k. On aurait pu ensuite additionner les longueurs des six segments de la Figure C afin de déterminer son périmètre, soit $4k + 12$.)

(d) Tous les segments de longueurs 4 et 7 peuvent être déplacés vers l'extérieur de la figure de manière à ce que la Figure D ressemble à un carré dont les longueurs des côtés sont $8n+1$.
Ainsi, la Figure D a un périmètre de $4(8n + 1) = 32n + 4$.
On veut déterminer le plus grand entier n qui vérifie $32n + 4 < 1000$.
On résout cette inégalité afin d'obtenir $32n < 996$ ou $n < \frac{996}{32}$ d'où $n < 31{,}125$.
Ainsi, 31 est le plus grand entier n qui remplirait la condition que D soit inférieur à 1000.

2. (a) Il y a $10 \times 60 = 600$ secondes en 10 minutes.
Si la machine est réglée de manière à couper un bout de corde toutes les 8 secondes, alors $\dfrac{600 \text{ s}}{8 \text{ s}} = 75$ bouts de cordes seront coupés en l'espace de 10 minutes.

(b) On introduit une corde dans la machine à un rythme constant de 2 mètres par seconde.
Si la machine est réglée de manière à couper un bout de corde toutes les 3 secondes, alors la longueur de chaque bout de corde coupé sera de $2 \times 3 = 6$ mètres.

(c) *Solution 1*
On introduit une corde dans la machine à un rythme constant de 2 mètres par seconde. Ceci est équivalent à $2 \times 60 = 120$ mètres par minute.
Si chaque bout de corde coupé a une longueur de 30 m, la machine effectuera donc $\dfrac{120 \text{ m}}{30 \text{ m}} = 4$ coupes en l'espace d'une minute.

Solution 2
On introduit une corde dans la machine à un rythme constant de 2 mètres par seconde.
Afin de couper un bout de corde qui mesure 30 m de longueur, la machine doit être réglée de manière à effectuer une coupe toutes les $\dfrac{30}{2} = 15$ secondes.
Si la machine effectue une coupe toutes les 15 secondes, elle effectuera $\dfrac{60 \text{ s}}{15 \text{ s}} = 4$ coupes en l'espace d'une minute.

Solution 3
Dans la partie (b), la machine est réglée de manière à effectuer une coupe toutes les 3 secondes. Les bouts de cordes coupés ont donc une longueur de 6 mètres.
Puisqu'on introduit une corde dans la machine à un rythme constant, la machine doit être réglée de manière à effectuer une coupe en 5 fois plus de temps, soit chaque 5×3 secondes (15 secondes), afin de couper des bouts de corde 5 fois plus longs (car un bout de corde qui mesure 30 m de longueur est 5 fois plus long qu'un bout de corde de 6 m).
Si la machine effectue une coupe toutes les 15 secondes, elle effectuera donc $\dfrac{60 \text{ s}}{15 \text{ s}} = 4$ coupes en l'espace d'une minute.

(d) *Solution 1*
Si la machine est réglée de manière à effectuer 16 coupes en l'espace d'une minute (ou 16 coupes en l'espace de 60 secondes), elle effectuera une coupe toutes les $\dfrac{60 \text{ s}}{16}$ secondes (3,75 secondes). On introduit une corde dans la machine à un rythme constant de 2 mètres par seconde.
Puisque la machine est réglée de manière à effectuer une coupe toutes les 3,75 secondes, alors chaque bout de corde qui sera coupé aura une longueur de $2 \times 3{,}75 = 7{,}5$ mètres.

Solution 2
Puisque la machine est réglée de manière à effectuer 16 coupes en l'espace d'une minute, elle effectuera donc 16 coupes en l'espace de 60 secondes.
On introduit une corde dans la machine à un rythme constant de 2 mètres par seconde. Donc, en l'espace de 60 secondes, $60 \times 2 = 120$ mètres de corde auront été introduits dans la machine.
Pendant ces 60 secondes, la corde de 120 mètres sera coupée 16 fois. Donc, chaque bout de corde qui sera coupé aura une longueur de $\dfrac{120 \text{ m}}{16} = 7{,}5$ mètres.

3. (a) *Solution 1*
Dans la liste des entiers qui débute par 1, le 6$^{\text{e}}$ multiple de 5 est $6 \times 5 = 30$.
Donc, Tania a dressé la liste de chacun des entiers de 1 à 29 à l'exception des multiples positifs de 5 inférieurs à 30, soit les entiers $5, 10, 15, 20, 25$.
Alors, avant que sa liste n'atteinge la position où le 6$^{\text{e}}$ multiple de 5 est omis, elle aura listé $29 - 5 = 24$ entiers.

Solution 2
En commençant par 1, chaque groupe de 5 entiers comporte un entier qui est un multiple de 5.
Par exemple, le premier groupe de cinq entiers, soit le groupe $1, 2, 3, 4, 5$, a un multiple de 5 (soit l'entier 5). De même, le deuxième groupe de cinq entiers, soit le groupe $6, 7, 8, 9, 10$ a un multiple de 5 (soit l'entier 10).
Dans la liste de Tania, elle omet les entiers qui sont des multiples de 5, donc pour chaque groupe de 5 entiers, Tania n'en liste que 4.
Alors, avant que Tania n'omette le 6$^{\text{e}}$ multiple de 5, elle aura listé $6 \times 4 = 24$ entiers.

(b) *Solution 1*
Tania inlut l'entier 2019 dans sa liste mais en omet l'entier 2020 (car 2020 est un multiple de 5).
En commençant par 1, 2020 est le 404$^{\text{e}}$ multiple de 5 car $\frac{2020}{5} = 404$.
C'est-à-dire, les entiers de 1 à 2020 contiennent 404 groupes de 5 entiers.
Chacun de ces 404 groupes comporte un entier qui est un multiple de 5. Donc Tania omet 404 entiers (y compris 2020) de sa liste des entiers de 1 à 2020.
Si 2019 est le k^{e} entier dans la liste de Tania, alors $k = 2020 - 404 = 1616$.

Solution 2
Tania inlut l'entier 2019 dans sa liste mais en omet l'entier 2020 (car 2020 est un multiple de 5).
En commençant par 1, 2020 est le 404$^{\text{e}}$ multiple de 5 car $\frac{2020}{5} = 404$.
C'est-à-dire, les entiers de 1 à 2020 contiennent 404 groupes de 5 entiers.
Dans la liste de Tania, elle omet les entiers qui sont des multiples de 5, donc pour chaque groupe de 5 entiers, Tania n'en liste que 4.
Si 2019 est le k^{e} entier dans la liste de Tania, alors $k = 404 \times 4 = 1616$.

(c) *Solution 1*
On commence en déterminant quels entiers se trouvent dans la liste de Tania.
En commençant par 1, dans chaque groupe successif de 5 entiers consécutifs, Tania n'en liste que 4 (car elle omet les entiers qui sont des multiples de 5).
C'est-à-dire, dans chacun de ces groupes de 5 entiers, la liste de Tania ne contient que $\frac{4}{5}$ de ces entiers.
Considérons tous les entiers positifs de 1 à n, où n est un multiple de 5.
La liste de Tania ne contient que $\frac{4}{5}n$ de ces n entiers.
La liste de Tania contient 200 entiers, donc $\frac{4}{5}n = 200$ ou $n = \frac{200 \times 5}{4} = 250$.
Ainsi, si Tania dresse la liste des entiers positifs de 1 à 250 mais en omet les entiers qui sont des multiples de 5, sa liste contiendra $\frac{4}{5} \times 250 = 200$ entiers.
Il faut déterminer la somme, $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + \cdots + 244 + 246 + 247 + 248 + 249$, des 250 premiers entiers positifs de la liste de Tania dont les multiples de 5 ont été omis.
On déterminera cela en calculant la somme de tous les entiers de 1 à 250 dont on soustrait ensuite la somme de tous les entiers qui sont des multiples de 5 dans cette liste.
La somme des entiers de 1 à n est représentée par $\frac{1}{2}n(n + 1)$. Donc la somme de tous les entiers de 1 à 250 est égale à $\frac{1}{2}(250)(251) = 31\,375$.

Les multiples de 5 dans cette liste, $5 + 10 + 15 + \cdots + 240 + 245 + 250$, peuvent être écrits de la forme $5(1 + 2 + 3 + \cdots + 48 + 49 + 50)$ en factorisant le facteur commun de 5 (car chacun d'eux est un multiple de 5).

Cette somme est égale à $5 \times \frac{1}{2}(50)(51) = 6375$.

Si Tania dresse la liste des entiers positifs, en ordre, tout en omettant les entiers qui sont des multiples de 5, les 200 premiers entiers de sa liste auront une somme de $31\,375 - 6375$ ou $25\,000$.

Solution 2

Comme on l'a démontré dans la Solution 1 ci-dessus, la somme des 200 premiers entiers de la liste de Tania est la somme $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + \cdots + 244 + 246 + 247 + 248 + 249$.

Les premier et dernier entiers de cette liste ont une somme de $1 + 249 = 250$.

La somme du deuxième entier et de l'avant-dernier entier est égale à $2 + 248 = 250$.

La somme du troisième entier et de l'antépénultième entier est égale à $3 + 247 = 250$.

En continuant de cette manière, on converge vers le milieu de la liste.

C'est-à-dire qu'on se déplace d'un entier à la droite du premier nombre précédent tandis qu'on se déplace d'un nombre vers la gauche du deuxième nombre précédent.

On remarque ainsi que

— lorsque le premier nombre du nouveau couple est un de plus que le premier nombre précédent, le nombre avec lequel il est jumelé est égal à un de moins que le deuxième nombre précédent et

— lorsque le premier nombre du nouveau couple est deux de plus que le premier nombre précédent (comme c'est le cas lorsqu'un multiple de 5 est omis), le nombre avec lequel il est jumelé est inférieur de deux par rapport au deuxième nombre précédent.

C'est-à-dire, en convergeant vers le milieu de la liste de Tania, chaque couple aura toujours une somme de 250.

Puisqu'il y a 200 entiers dans la liste de Tania, il doit ainsi y avoir 100 tels couples.

Donc, si Tania dresse la liste des entiers positifs, en ordre, tout en omettant les entiers qui sont des multiples de 5, les 200 premiers entiers de sa liste auront une somme de $250 \times 100 = 25\,000$.

4. (a) On commence en remarquant que lorsque $x = 18$,

$$12 \times 18 \times 24 = 12 \times (6 \times 3) \times (2 \times 12) = 12 \times 6 \times 6 \times 12 = (12 \times 6)^2 = 72^2.$$

Ainsi, $12, 18, 24$ est une suite Shonk.

Ensuite, étant donné que $12, x, 24$ doit être une suite Shonk, il faut démontrer que $x = 18$ est la seule valeur qui remplirait cette condition.

Afin que $12, x, 24$ soit une suite Shonk, il faut que $12 < x < 24$.

Cela signifie que la valeur de x est l'une parmi $13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22$ et 23.

Lorsque $x = 13$, le produit $12 \times 13 \times 24 = 3744$ n'est pas un carré parfait.

Cela peut être vérifié sur une calculatrice. Par contre, si on arrive à comprendre pourquoi ce produit n'est pas un carré parfait, on saura comment appliquer ce même raisonnement à nouveau.

Soit n un entier qui vérifie $n^2 = 12 \times 13 \times 24$.

Cela signifie que 13 est un facteur de n^2.

Par contre, puisque 13 est un nombre premier, cela signifie que 13 n'admet que n et lui-même comme facteurs.

Cela signifie que n^2 a au moins deux facteurs 13. Donc $12 \times 13 \times 24$ doit avoir au moins deux facteurs 13.

Cependant, ni 12 ni 24 n'ont 13 comme facteur. On arrive donc à la conclusion que $12 \times 13 \times 24$ n'est pas un carré parfait.
Donc, $12, 13, 24$ n'est pas une suite Shonk, alors $x \neq 13$.

La clé du raisonnement ci-dessus est que 13 est un nombre premier.
Ainsi, on peut utiliser le même raisonnement pour conclure que $x \neq 17$, que $x \neq 19$ et que $x \neq 23$.

Supposons maintenant que $x = 14$. Dans ce cas, $12 \times 14 \times 24$ a un facteur 7.
Si n est un entier qui vérifie $12 \times 14 \times 24 = n^2$, alors 7 est un facteur de n^2 et puisque 7 est un nombre premier, cela signifie que n doit avoir un 7 comme facteur.
Ainsi, $n^2 = 12 \times 14 \times 24$ a au moins deux facteurs 7. Or cela n'est pas le cas puisque 14 n'a qu'un seul facteur 7 et ni 12 ni 24 n'ont 7 comme facteur.
Alors, $12 \times 14 \times 24$ n'est pas un carré parfait, donc $12, 14, 24$ n'est pas une suite Shonk et $x \neq 14$.

Puisque $21 = 3 \times 7$, on peut utiliser le même raisonnement afin de démontrer que $x \neq 21$.
C'est-à-dire, afin que $12 \times 21 \times 24$ soit un carré parfait, il doit avoir au moins deux facteurs 7. Or cela n'est pas le cas car il n'en contient qu'un seul.

Nous avons ainsi réduit la liste des valeurs possibles de x aux entiers $15, 16, 18, 20$ et 22.

Puisque 15 et 20 ont tous les deux 5 comme facteur, les produits $12 \times 15 \times 24$ et $12 \times 20 \times 24$ ont chacun un seul 5 (qui lui est un nombre premier) comme facteur, donc ce ne sont pas des carrés parfaits.
Cela signifie que ni $12, 15, 24$ ni $12, 20, 24$ sont des suites Shonk, alors $x \neq 15$ et $x \neq 20$.

Puisque $22 = 2 \times 11$, on peut aussi conclure que $x \neq 22$ car $12 \times 22 \times 24$ a un seul 11 (qui lui est un nombre premier) comme facteur, donc $12 \times 22 \times 24$ n'est pas un carré parfait d'où $12, 22, 24$ n'est pas une suite Shonk.

Nous avons ainsi réduit la liste des valeurs possibles de x à $x = 16$ ou $x = 18$.

On va démontrer que $12 \times 16 \times 24$ n'est pas un carré parfait.
Afin de faire cela, on l'écrit sous la forme d'un produit de nombres premiers :

$$12 \times 16 \times 24 = (2 \times 2 \times 3) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 3)$$

La factorisation première de $12 \times 16 \times 24$ révèle qu'elle n'a que 2 et 3 comme facteurs premiers.
Plus précisément, il y a neuf facteurs 2 et deux facteurs 3.
Si n est un entier qui vérifie $12 \times 16 \times 24 = n^2$, alors n^2 doit avoir précisément neuf facteurs 2.
Or, chaque facteur de n a le même montant de facteurs 2, donc n^2 doit avoir un nombre pair de facteurs 2.
Puisque $12 \times 16 \times 24$ a un nombre impair de facteurs 2, on peut conclure que, pour tout entier quelconque n, $12 \times 16 \times 24 \neq n^2$ et n'est donc pas un carré parfait.
Ainsi, $12, 16, 24$ n'est pas une suite Shonk, donc $x \neq 16$.

On a exclu toute autre possibilité de x, on peut donc conclure que $12, x, 24$ est une suite Shonk uniquement lorsque $x = 18$.

(b) En nous appuyant sur le raisonnement de la partie (a), nous utiliserons l'observation selon laquelle, lors de la factorisation première d'un carré parfait, ses facteurs premiers paraitront toujours un nombre pair de fois.
Par exemple, 100 est un carré parfait tel que démontré par $100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5$ où il y a deux facteurs 2 et deux facteurs 5.
Dans l'énoncé de la question, on retrouve l'exemple $18^2 = 324$, ce qui équivaut à

$2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$. Ce dernier est le produit de deux facteurs 2 et de quatre facteurs 3.
En effet, si n est un entier qui a p comme facteur premier, il existe alors une “copie” de p dans chaque facteur de n qui se produit dans n^2.
D'autre part, si les facteurs d'un nombre sont des facteurs premiers qui paraissent un nombre pair de fois, alors ces facteurs premiers peuvent être regroupés afin de démontrer que le nombre d'origine est un carré parfait.
Par exemple, le nombre qui a quatre facteurs 2, deux facteurs 3 et six facteurs 5 est un carré parfait puisque

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = (2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5)^2$$

Afin que $28, y, z, 65$ soit une suite Shonk, $28 \times y \times z \times 65$ doit être un carré parfait.
On effectue la factorisation première de 28 et de 65 afin de réécrire l'expression sous la forme

$$2 \times 2 \times 7 \times y \times z \times 5 \times 13$$

Cette dernière doit être un carré parfait.
Les facteurs premiers 2, 5, 7 et 13 paraissent tous dans cette factorisation.
D'après nos délibérations ci-dessus, il doit y avoir un nombre pair de chacun de ces nombres premiers si le produit doit être un carré parfait.
Il doit donc y avoir un autre facteur de chacun des nombres premiers $5, 7$ et 13 dans le produit.
De plus, ces nombres premiers doivent être des facteurs de soit y soit z.
Cela signifie que soit y soit z doit avoir un 5 comme facteur, soit y soit z doit avoir un 7 comme facteur et soit y soit z doit avoir un 13 comme facteur.
Puisqu'il y a deux variables et trois nombres premiers, une de ces variables doit avoir deux de ces nombres comme facteurs premiers.
Puisque $5 \times 13 = 65$ et $7 \times 13 = 91$ et que y et z doivent être tous les deux inférieurs à 65, alors 5 et 13 ne peuvent pas être des facteurs pour la même variable. De même, 7 et 13 ne peuvent pas être des facteurs pour la même variable.
Donc, soit 5 et 7 sont tous les deux des facteurs de y, soit 5 et 7 sont tous les deux des facteurs de z.
Cela signifie que soit y, soit z est un multiple de $5 \times 7 = 35$.
Sachant que tout autre multiple de 35 sera supérieur à 65, on comprend alors que soit $y = 35$, soit $z = 35$.
La variable qui n'est pas égale à 35 doit être un multiple de 13 qui est situé entre 28 et 65. Les seuls tels multiples de 13 sont 39 et 52. Puisque les deux sont supérieurs à 35, on en déduit que $y = 35$. On comprend donc que soit $z = 39$, soit $z = 52$.
Si $z = 39$, on a

$$28 \times y \times z \times 65 = (2 \times 2 \times 7) \times (5 \times 7) \times (3 \times 13) \times (5 \times 13)$$

mais puisque ce produit n'a qu'un seul facteur 3, il ne peut pas représenter un carré parfait.
D'autre part, si $z = 52$, on a

$$\begin{aligned} 28 \times y \times z \times 65 &= (2 \times 2 \times 7) \times (5 \times 7) \times (2 \times 2 \times 13) \times (5 \times 13) \\ &= (2 \times 2 \times 5 \times 7 \times 13)^2 \\ &= 1820^2 \end{aligned}$$

Donc, $y = 35$ et $z = 52$ sont les seules valeurs qui font de $28, y, z, 65$ une suite Shonk.

(c) La plus longue suite de Shonk dont chacun des termes est un entier de 1 à 12 a neuf termes.
Un exemple d'une telle suite est $1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10$.
Chaque terme après le premier est supérieur au terme précédent, on doit donc vérifier que le produit de tous les termes est un carré parfait.
On effectue la factorisation première de chaque terme afin d'obtenir :

$$\begin{aligned} & 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 8 \times 9 \times 10 \\ = \;& 2 \times 3 \times (2 \times 2) \times 5 \times (2 \times 3) \times (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3) \times (2 \times 5) \\ = \;& (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5)^2 \\ = \;& 720^2 \end{aligned}$$

Il faut démontrer qu'aucune suite Shonk dont chacun des termes est un entier de 1 à 12 ne peut avoir une longueur supérieure à neuf termes.
On commence en remarquant que de 1 à 12, le seul nombre qui a 7 comme facteur est le nombre 7 lui-même.
Par conséquent, le nombre 7 ne peut pas être inclus dans la suite car le produit des termes d'une telle suite ne pourrait pas être un carré parfait.
De même, le nombre 11 ne peut pas être inclus dans la suite car aucun autre nombre de 1 à 12 n'a 11 comme facteur et donc, le produit des termes d'une suite qui inclurait 11 ne pourrait pas être un carré parfait.
Cela signifie que la suite doit être composée des nombres $1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10$ et 12.
Il y a 10 nombres dans cette liste. Donc afin d'avoir une suite de Shonk plus longue que celle du dessus, il faudrait inclure tous ces 10 entiers dans la suite.
Par contre, le produit

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 8 \times 9 \times 10 \times 12$$

a cinq facteurs 3 (dont un qui provient de chacun des nombres 3, 6 et 12, tandis que deux proviennent de 9).
Ainsi, ca ne peut pas être un carré parfait puisque tout facteur premier doit paraitre un nombre pair de fois dans la liste des facteurs premiers d'un carré parfait.

(d) On a besoin de deux faits liés à propos des carrés parfaits :
(F1) Un entier positif, n est un carré parfait lorsque chaque facteur premier parait un nombre pair de fois dans la liste de ses facteurs premiers. (On a vu cela dans la partie (b).)
(F2) Soient r, s et t des entiers qui vérifient $r = st$. S'il y a deux carrés parfaits parmi r, s, t, donc le troisième sera aussi un carré parfait. Cela est dû au fait que la liste des facteurs premiers du produit de deux carrés parfaits contiendra toujours un nombre pair de facteurs premiers. De même, la liste des facteurs premiers du quotient (entier) de deux carrés parfaits contiendra toujours un nombre pair de facteurs premiers.
Supposons que $m, 1176, n, 48\,400$ est une SSSC. Alors
- $m < 1176 < n < 48\,400$
- $m \times 1176 \times n$ est un carré parfait et
- $1176 \times n \times 48\,400$ est un carré parfait et
- $m \times 1176 \times n \times 48\,400$ est un carré parfait.

Puisque $1176 \times n \times 48\,400$ est un carré parfait et que $m \times (1176 \times n \times 48\,400)$ est aussi un carré parfait, donc, d'après (F2), m est aussi un carré parfait.
De plus, puisque $48\,400 = 220^2$ et $1176 = 6 \times 14^2$, alors

$$1176 \times n \times 48\,400 = (220 \times 14)^2 \times (6 \times n)$$

Ce dernier est un carré parfait uniquement lorsque $6n$ est un carré parfait.
Ainsi, si $m, 1176, n, 48\,400$ est une SSSC, alors m et $6n$ seront tous les deux des carrés parfaits.
De plus, si m et $6n$ sont tous les deux des carrés parfaits, alors $m \times 1176 \times n$, $1176 \times n \times 48\,400$ et $m \times 1176 \times n \times 48\,400$ seront tous des carrés parfaits.

On peut ainsi répondre à la question en comptant le nombre de couples d'entiers positifs (m,n) qui vérifient $1 \leq m < 1176$ et $1176 < n < 48\,400$, où m et $6n$ seraient tous les deux des carrés parfaits.

On remarque que $34^2 = 1156$ et que ce dernier est inférieur à 1176. On remarque aussi que $35^2 = 1225$ et que ce dernier est supérieur à 1176. Donc les valeurs possibles de m sont $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 33^2, 34^2$.
Il y a 34 possibilités pour la valeur de m.

On sait que $6 \times 14^2 = 1176$ et que ce dernier n'est pas supérieur à 1176. Donc la plus petite valeur de n est 6×15^2.
On remarque aussi que $6 \times 89^2 = 47\,526 < 48\,400$ mais que $6 \times 90^2 = 48\,600 > 48\,400$.
Donc, les valeurs possibles de n sont

$$6 \times 15^2, 6 \times 16^2, \ldots, 6 \times 89^2$$

Il y a $89 - 14 = 75$ telles valeurs.

Donc, il y a $34 \times 75 = 2550$ couples (m,n) qui permettraient à la suite $m, 1176, n, 48\,400$ d'être une SSSC.