Le CENTRE d'ÉDUCATION

en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Cayley 2019

(10e année – Secondaire IV)

le mardi 26 février 2019

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 27 février 2019

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On évalue afin d'obtenir $2 \times 0 + 1 - 9 = 0 + 1 - 9 = -8$.

Réponse : (A)

2. Kai est né 25 ans avant l'an 2020 et est donc né en $2020 - 25 = 1995$.

Réponse : (C)

3. Puisque 38 % des élèves ont reçu un muffin, donc 100 % − 38 % = 62 % des élèves n'ont pas reçu de muffin.
Autrement, on aurait pu utiliser les pourcentages d'élèves qui ont reçu un yaourt, un fruit ou une barre de céréales afin d'obtenir le pourcentage d'élèves qui n'ont pas reçu de muffin, soit : $10\ \% + 27\ \% + 25\ \% = 62\ \%$.

Réponse : (D)

4. On peut réorganiser l'ordre de la multiplication des nombres :

$$(2 \times \tfrac{1}{3}) \times (3 \times \tfrac{1}{2}) = 2 \times \tfrac{1}{2} \times 3 \times \tfrac{1}{3} = (2 \times \tfrac{1}{2}) \times (3 \times \tfrac{1}{3}) = 1 \times 1 = 1$$

Réponse : (C)

5. Puisque $10d + 8 = 528$, donc $10d = 520$, alors $\dfrac{10d}{5} = \dfrac{520}{5}$ d'où $2d = 104$.

Réponse : (A)

6. La droite d'équation $y = x + 4$ a une ordonnée à l'origine de 4.
Lorsque la droite subit une translation de 6 unités vers le bas, tous les points situés sur la droite subissent cette même translation.
L'ordonnée à l'origine subit donc cette translation et descend de 4 à $4 - 6 = -2$.

Réponse : (E)

7. Puisque les trois nombres 2, x et 10 ont une moyenne de x, donc $\dfrac{2 + x + 10}{3} = x$.
On multiplie par 3 afin d'obtenir $2 + x + 10 = 3x$.
On simplifie afin d'obtenir $x + 12 = 3x$, ensuite $2x = 12$ d'où $x = 6$.

Réponse : (E)

8. Afin d'aller de P à A, Alain doit se déplacer de 5 unités vers la droite et de 4 unités vers le haut, soit une distance totale de $5 + 4 = 9$ unités. (Tous les chemins qui mènent du point P au point A où les déplacements ne s'effectuent que vers le haut et que vers la droite auront cette même longueur.)
Afin d'aller de P à B, Alain doit se déplacer de 6 unités vers la droite et de 2 unités vers le haut, soit une distance totale de 8 unités.
Afin d'aller de P à C, Alain doit se déplacer de 3 unités vers la droite et de 3 unités vers le haut, soit une distance totale de 6 unités.
Afin d'aller de P à D, Alain doit se déplacer de 5 unités vers la droite et de 1 unité vers le haut, soit une distance totale de 6 unités.
Afin d'aller de P à E, Alain doit se déplacer de 1 unité vers la droite et de 4 unités vers le haut, soit une distance totale de 5 unités.
Donc, le chemin le plus court est celui du point P au point E.

Réponse : (E)

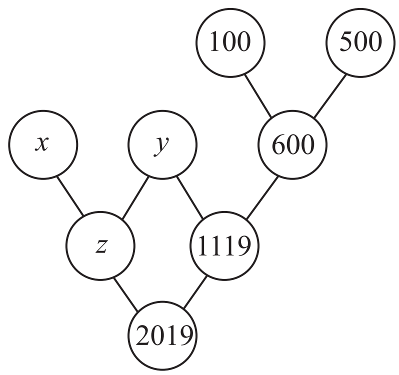
9. Puisque $(pq)(qr)(rp) = 16$, donc $pqqrrp = 16$ ou $ppqqrr = 16$ d'où $p^2q^2r^2 = 16$.
Ainsi, $(pqr)^2 = 16$, donc $pqr = \pm 4$.
En regardant les choix de réponse, on constate que pqr doit être positif, donc $pqr = 4$.

Réponse : (C)

10. Matilda et Ellie prennent chacune $\frac{1}{2}$ du mur.
Matilda peint $\frac{1}{2}$ de sa moitié du mur, soit $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ de tout le mur.
Ellie peint $\frac{1}{3}$ de sa moitié du mur, soit $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ de tout le mur.
Donc, $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{5}{12}$ du mur est peint en rouge.

Réponse : (A)

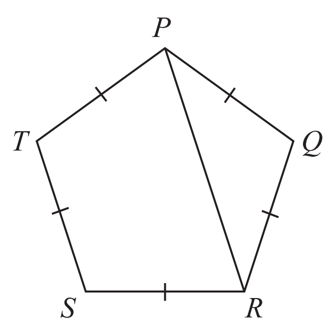
11. Soient y et z les valeurs dans les deux cercles vides :



À partir des règles données, $y + 600 = 1119$ d'où $y = 519$.
De plus, $z + 1119 = 2019$, donc $z = 900$.
Enfin, $x + y = z$, donc $x = z - y = 900 - 519 = 381$.

Réponse : (B)

12. On dessine un segment de droite qui relie P à R.



Puisque $PQRST$ est un pentagone régulier, donc $\angle PQR = \angle QRS = 108°$.
Puisque $PQ = QR$, donc le triangle PQR est un triangle isocèle où $\angle QPR = \angle QRP$.
Puisque $\angle PQR = 108°$, donc

$$\begin{aligned} \angle PQR + \angle QPR + \angle QRP &= 180° \\ 108° + 2\angle QRP &= 180° \\ 2\angle QRP &= 72° \\ \angle QRP &= 36° \end{aligned}$$

Puisque $\angle QRS = 108°$, donc $\angle PRS = \angle QRS - \angle QRP = 108° - 36° = 72°$.

Réponse : (A)

13. Dans la colonne des unités, on voit que $3 + 2 + q$ doit avoir un 2 comme chiffre des unités.
Puisque la valeur de q est un chiffre de 1 à 9, donc $3 + 2 + q$ est entre 6 et 14.
Puisque son chiffre des unitées est un 2, donc $3 + 2 + q = 12$, d'où $q = 7$.

Ceci veut aussi dire qu'il y a une retenue de 1 que l'on reporte dans la colonne des dizaines.
Dans la colonne des dizaines, on voit que $1 + 6 + p + 8$ doit avoir un 4 comme chiffre des unités.
Puisque la valeur de p est un chiffre de 1 à 9, donc $1 + 6 + p + 8$ est entre 16 et 24.
Puisque son chiffre des unitées est un 4, donc $1 + 6 + p + 8 = 24$, d'où $p = 9$.
Ceci veut aussi dire qu'il y a une retenue de 2 que l'on reporte dans la colonne des centaines.
Dans la colonne des centaines, on voit que $2 + n + 7 + 5$ doit avoir un 0 comme chiffre des unités.
Puisque la valeur de n est un chiffre de 1 à 9, donc $2 + n + 7 + 5$ est entre 15 et 23.
Puisque son chiffre des unitées est un 0, donc $2 + n + 7 + 5 = 20$, d'où $n = 6$.
Ceci veut aussi dire qu'il y a une retenue de 2 que l'on reporte dans la colonne des milliers.
Cela veut dire que $m = 2$.
Donc,

$$\begin{array}{rr} & 663 \\ & 792 \\ + & 587 \\ \hline & 2042 \end{array}$$

Enfin, $m + n + p + q = 2 + 6 + 9 + 7 = 24$.

Réponse : (B)

14. Chacune des lettres A, B, C, D et E ne parait qu'une seule fois dans chaque colonne et dans chaque rangée.
La lettre qui se trouve dans la deuxième rangée de la première colonne ne peut pas être un A, un E, ou un B (car ces lettres se trouvent déjà dans la colonne). Elle n'est aussi pas un C ou un A (car ces lettres se trouvent déjà dans la rangée).
La lettre qui se trouve dans la deuxième rangée de la première colonne est donc un D.
Cela signifie que la lettre qui se trouve dans la quatrième rangée de la première colonne doit être un C.
La lettre qui se trouve dans la deuxième rangée de la cinquième colonne ne peut pas être un D, un C, un A ou un E et doit donc être un B.
Cela signifique que la lettre dans la deuxième rangée de la deuxième colonne doit être un E.
En suivant le même raisonnement, les lettres qui se trouvent dans la première rangée des 3^{e} et 4^{e} colonnes sont respectivement D et B.
Cela signifie que la lettre qui se trouve dans la première rangée de la deuxième colonne doit être un C.
En suivant le même raisonnement, la lettre qui se trouve dans la cinquième rangée de la deuxième colonne doit être un A.
De plus, la lettre qui se trouve dans la troisième rangée de la deuxième colonne doit être un D.
Donc, la lettre qui va dans la case indiquée par le $*$ doit être un B.
On peut remplir le quadrillage de la manière suivante :

A	C	D	B	E
D	E	C	A	B
E	D	B	C	A
C	B	A	E	D
B	A	E	D	C

Réponse : (B)

15. La pente du segment de droite PR est $\dfrac{2-1}{0-4}$ et est donc égale à $-\dfrac{1}{4}$.

Puisque $\angle QPR = 90^\circ$, donc PQ et PR sont perpendiculaires.
Cela signifie que les pentes de PQ et de PR ont un produit qui est égal à -1.
Puisque la pente de PR est égale à $-\dfrac{1}{4}$, donc la pente de PQ est égale à 4.
Puisque le déplacement horizontal de PQ est égal à $2 - 0 = 2$, donc son déplacement vertical doit être égal à $4 \times 2 = 8$.
Ainsi, $s - 2 = 8$, d'où $s = 10$.

Réponse : (C)

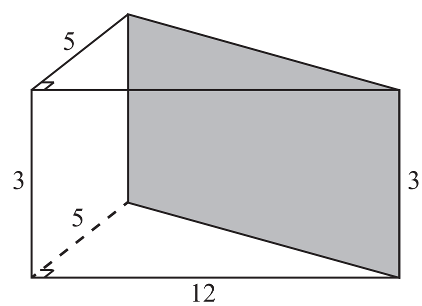
16. Supposons qu'il y a p personnes derrière Kaukab.
Il y a donc $2p$ personnes qui la précèdent.
Donc, le nombre total de personnes dans la file (y compris Kaukab) est égal à

$$n = p + 2p + 1 = 3p + 1$$

Ce dernier est un de plus qu'un multiple de 3.
Parmi les choix de réponse $(23, 20, 24, 21, 25)$, 25 est le seul qui est un de plus qu'un multiple de 3 (car $3 \times 8 + 1$.)
Donc, 25 est une valeur possible de n.

Réponse : (E)

17. Considérons le prisme à base triangulaire situé à l'avant du prisme rectangulaire.
Ce prisme a cinq faces : un rectangle à l'avant, un rectangle à gauche, un triangle en bas, un triangle en haut et un rectangle à l'arrière.



Le rectangle à l'avant mesure 3×12 et a donc une aire qui est égale à 36.
Le rectangle à gauche mesure 3×5 et a donc une aire qui est égale à 15.
Les triangles d'en haut et d'en bas sont tous les deux des triangles rectangles dont les mesures des cathètes sont de 5 et de 12. Cela signifie que chacun des triangles a une aire qui est égale à $\frac{1}{2} \times 12 \times 5 = 30$.
Le rectangle à l'arrière a une hauteur de 3. La longueur de ce rectangle est égale à la longueur de la diagonale de la face inférieure du prisme rectangulaire. On se sert du théorème de Pythagore afin de déterminer cette longueur : $\sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$. Donc, ce rectangle mesure 3×13 et a une aire qui est égale à 39.
En tout, l'aire totale de ce prisme à base triangulaire est donc égale à $36 + 15 + 2 \times 30 + 39 = 150$.

Réponse : (D)

18. André court pendant 10 secondes à une vitesse de y m/s.
Donc, André parcourt une distance de $10y$ m.
Carl commence la course 20 secondes avant André et continue à courir pendant 10 secondes en même temps qu'André. Donc, Carl court pendant 30 secondes.
Puisque Carl court à une vitesse de x m/s, il parcourt donc une distance de $30x$ m.
Puisque Carl et André parcourent la même distance, donc $30x$ m $= 10y$ m, d'où $\frac{y}{x} = 3$.
Donc, $y : x = 3 : 1$.

Réponse : (D)

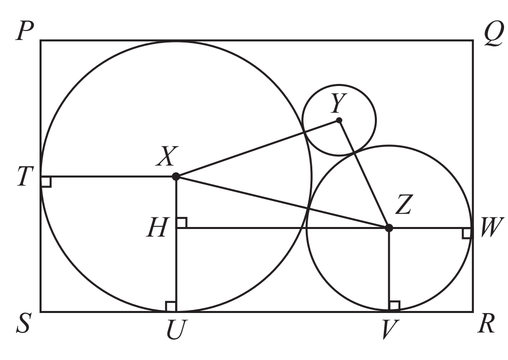
19. À l'aide des lois des exposants, on peut réécrire l'expression $\frac{2^{x+y}}{2^{x-y}} = 2^{(x+y)-(x-y)} = 2^{2y}$.
Puisque x et y sont des entiers positifs tels que $xy = 6$, alors les valeurs possibles de y sont les diviseurs positifs de 6 ; soit 1, 2, 3 ou 6. (Ces derniers correspondent à $x = 6, 3, 2, 1$.)
Les valeurs correspondantes de 2^{2y} sont $2^2 = 4$, $2^4 = 16$, $2^6 = 64$ et $2^{12} = 4096$.
Donc, la somme des valeurs possibles de $\frac{2^{x+y}}{2^{x-y}}$ est égale à $4 + 16 + 64 + 4096 = 4180$.

Réponse : (A)

20. Soient x, y et z les rayons respectifs des cercles de centres X, Y et Z.
La distance entre les centres de deux cercles tangents est égale à la somme des rayons de ces cercles.
Donc, $XY = x + y$, d'où $x + y = 30$.
De plus, $XZ = x + z$, d'où $x + z = 40$. Par ailleurs, $YZ = y + z$, d'où $y + z = 20$.
On additionne ces trois équations ensembles afin d'obtenir $(x+y)+(x+z)+(y+z) = 30+40+20$, donc $2x + 2y + 2z = 90$ ou $x + y + z = 45$.
Puisque $x + y = 30$ et que $x + y + z = 45$, donc $30 + z = 45$, d'où $z = 15$.
Puisque $y + z = 20$, alors $y = 20 - z = 5$.
Puisque $x + z = 40$, alors $x = 40 - z = 25$.
On peut calculer les mesures du rectangle à l'aide des rayons des cercles.

La hauteur du rectangle $PQRS$ est égale à la «hauteur» du cercle de centre X (ce qui correspond à la longueur du diamètre du cercle, soit $2x$.)
Donc, la hauteur du rectangle $PQRS$ est égale à 50.

Afin de déterminer la largeur du rectangle $PQRS$, on relie X aux points de tangence (c'est-à-dire, aux points où le cercle touche le rectangle) T et U qui sont situés respectivement sur PS et SR. On relie aussi Z aux points de tangence V et W qui sont situés respectivement sur SR et QR. On relie ensuite le centre Z au point H de manière que ZH soit perpendiculaire à XU. Puisque les rayons sont perpendiculaires aux tangentes qui passent aux points de tangence, donc XT, XU, ZV et ZW sont perpendiculaires aux côtés du rectangle.



Puisque $XTSU$ et $ZWRV$ ont chacun trois angles droits, leur quatrième angle est donc logiquement un angle droit aussi. Ils sont donc des rectangles.
Ainsi, $SU = TX = 25$ (le rayon du cercle de centre X) et $VR = ZW = 15$ (le rayon du cercle de centre Z).
En suivant le même raisonnement, $HUVZ$ est aussi un rectangle.
Donc, $UV = HZ$ et $HU = ZV = 15$.
Puisque $XH = XU - HU$, donc $XH = 10$.
À l'aide du théorème de Pythagore, $HZ = \sqrt{XZ^2 - XH^2} = \sqrt{40^2 - 10^2} = \sqrt{1500} = 10\sqrt{15}$, donc $UV = 10\sqrt{15}$.
Cela signifie que $SR = SU + UV + VR = 25 + 10\sqrt{15} + 15 = 40 + 10\sqrt{15}$.
Ainsi, l'aire du rectangle $PQRS$ est égale à $50 \times (40 + 10\sqrt{15}) = 2000 + 500\sqrt{15} \approx 3936{,}5$.
Parmi les choix de réponse, (E) 3950 est le choix le plus proche à cette réponse.

Réponse : (E)

21. *Solution 1*

On commence par les chiffres des unités.
Puisque $4 \times 4 = 16$, donc $T = 6$, on reporte ensuite le 1 à la colonne des dizaines.
Dans la colonne des dizaines, puisque $4 \times 6 + 1 = 25$, donc $S = 5$, on reporte ensuite le 2 à la colonne des centaines.
Dans la colonne des centaines, puisque $4 \times 5 + 2 = 22$, donc $R = 2$, on reporte ensuite le 2 à la colonne des milliers.
Dans la colonne des milliers, puisque $4 \times 2 + 2 = 10$, donc $Q = 0$, on reporte ensuite le 1 à la colonne des dizaines de milliers.
Dans la colonne des dizaines de milliers, puisque $4 \times 0 + 1 = 1$, donc $P = 1$, on reporte ensuite le 0 à la colonne des centaines de milliers.
Dans la colonne des centaines de milliers, $4 \times 1 + 0 = 4$, comme prévu.
Voici donc la multiplication :

$$\begin{array}{rr} & 1\,0\,2\,5\,6\,4 \\ \times & 4 \\ \hline & 4\,1\,0\,2\,5\,6 \end{array}$$

Enfin, $P + Q + R + S + T = 1 + 0 + 2 + 5 + 6 = 14$.

Solution 2

Soit x l'entier à cinq chiffres $PQRST$.
Cela signifie que $PQRST0 = 10x$, ainsi $PQRST4 = 10x + 4$.
De plus, $4PQRST = 400\,000 + PQRST = 400\,000 + x$.
À partir de la multiplication, $4(10x + 4) = 400\,000 + x$, d'où $40x + 16 = 400\,000 + x$ ou $39x = 399\,984$.
Donc, $x = \dfrac{399\,984}{39} = 10\,256$.
Puisque $PQRST = 10\,256$, alors $P + Q + R + S + T = 1 + 0 + 2 + 5 + 6 = 14$.

Réponse : (A)

22. Voici une façon qui satisferait les sept restrictions. Dans ce cas, les sept amis prennent au total quatre bus :

Bus 1	Bus 2	Bus 3	Bus 4
Abu	Bai	Don	Gia
Cha	Fan	Eva	

Puisqu'il existe des groupes de 3 amis qui doivent tous être dans des bus différents, il leur faudra au moins 3 bus.
On va maintenant démontrer que 3 bus ne suffiront pas.
Supposons que les sept amis puissent être placés dans 3 bus.
Puisque Abu, Bai et Don sont dans 3 bus différents, nous allones les placer respectivement dans trois bus différents, soit le Bus 1, le Bus 2 et le Bus 3. (Voir le tableau ci-dessous.)
Puisque Abu, Bai et Eva sont dans 3 bus différents, Eva doit être dans le Bus 3.
Puisque Cha et Bai sont dans 2 bus différents et que Cha et Eva sont dans 2 bus différents, alors Cha n'est ni dans le Bus 2 ni dans le Bus 3, ainsi Cha est dans le Bus 1.
Jusqu'ici on a :

Bus 1	Bus 2	Bus 3
Abu	Bai	Don
Cha		Eva

Les deux amis restants sont Fan et Gia.
Puisque Fan, Cha et Gia sont dans 3 bus différents, alors ni Fan ni Gia ne sont dans le Bus 1.
Puisque Don, Gia et Fan sont dans 3 bus différents, alors ni Fan ni Gia ne sont dans le Bus 3.
Puisque Gia et Fan ne sont pas dans le même bus, ils ne peuvent pas être tous les deux dans le Bus 2, ce qui signifie que les sept amis ne peuvent pas prendre uniquement 3 bus.
Par conséquent, il faudra au moins 4 bus.

Réponse : (B)

23. Puisque la roue roule à vitesse constante, alors le pourcentage de temps qu'une partie ombrée de la roue touche une partie ombrée du chemin sera égal au pourcentage de la longueur totale du chemin où il y a un contact «ombré sur ombré».
Puisque la roue a un rayon de 2 m, donc sa circonférence est égale à $2\pi \times 2$ m, c.-à-d. 4π m.
Puisque la roue est divisée en quatre quarts, alors la partie de la circonférence qu'occupe chaque quart est égale à π m.
Soit l'extrémité gauche du chemin 0 m.
Lorsque la roue tourne une première fois, la première partie ombrée de la roue touche le chemin entre 0 m et $\pi \approx 3{,}14$ m.
Alors que la route continue à tourner, la deuxième partie ombrée de la roue touche le chemin entre $2\pi \approx 6{,}28$ m et $3\pi \approx 9{,}42$ m.
Alors que la roue effectue 3 rotations complètes, un quart ombré de la roue sera en contact avec le chemin à 6 intervalles (2 intervalles par rotation).
À chaque multiple impair de 1 m, 1 m du chemin est ombré. À chaque multiple pair de 1 m, 1 m du chemin est non ombré.
On crée un tableau des sections où les quarts ombrés sont en contact avec le chemin et les parties de ces intervalles qui sont ombrées :

Début du quart (m)	Fin du quart (m)	Parties ombrées du chemin (m)
0	$\pi \approx 3.14$	1 à 2 ; 3 à π
$2\pi \approx 6{,}28$	$3\pi \approx 9{,}42$	7 à 8 ; 9 à 3π
$4\pi \approx 12{,}57$	$5\pi \approx 15{,}71$	13 à 14 ; 15 à 5π
$6\pi \approx 18{,}85$	$7\pi \approx 21{,}99$	19 à 20 ; 21 à 7π
$8\pi \approx 25{,}13$	$9\pi \approx 28{,}27$	8π à 26 ; 27 à 28
$10\pi \approx 31{,}42$	$11\pi \approx 34{,}56$	10π à 32 ; 33 à 34

Donc, la longueur totale de «ombré sur ombré», en mètres, est

$$1 + (\pi - 3) + 1 + (3\pi - 9) + 1 + (5\pi - 15) + 1 + (7\pi - 21) + (26 - 8\pi) + 1 + (32 - 10\pi) + 1$$

ce qui est égal à $(16 - 2\pi)$ m.
La longueur totale du chemin sur lequel roule la roue est de $3 \times 4\pi$ m ou 12π m.
Cela signifie que le pourcentage de temps requis est égal à $\dfrac{(16-2\pi)\text{ m}}{12\pi\text{ m}} \times 100~\% \approx 25{,}8~\%$.
Parmi les choix de réponse, (E) 26 % est le choix le plus proche à cette réponse.

Réponse : (E)

24. Soit A l'ensemble $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
On remarque en premier lieu que l'entier s que choisit Roberta est de la forme $s = 11m$, m étant un entier de l'ensemble A. On remarque aussi que l'entier t que choisit Roberta est de la forme $t = 101n$, n étant un entier de l'ensemble A.
Cela signifie que le produit rst est égal à $r(11m)(101n) = 11 \times 101 \times rmn$ où r, m et n proviennent tous de l'ensemble A.
Cela signifie que le nombre de valeurs possibles de rst est égal au nombre de valeurs possibles de rmn. Donc, on compte le nombre de valeurs possibles de rst en comptant le nombre de valeurs possibles de rmn.

On remarque que A ne contient qu'un seul multiple de 5 et qu'un seul multiple de 7. De plus, ces multiples n'incluent qu'un seul facteur de 5 et 7 respectivement.
On compte le nombre de valeurs possibles de rmn en considérant les différentes possibilités pour le nombre de facteurs de 5 et de 7 dans rmn.
Soit y le nombre de facteurs de 5 dans rmn et soit z le nombre de facteurs de 7 dans rmn. Puisque r, m et n comprennent chacun au plus un facteur de 5 et au plus un facteur de 7 et que chacun de r, m et n ne peut pas contenir à la fois un facteur de 5 et un facteur de 7, donc $y + z$ a une valeur maximale de 3.

<u>1^{er} cas : $y = 3$</u>
Si rmn contient 3 facteurs de 5, donc $r = m = n = 5$, ainsi $rmn = 5^3$.
Cela signifie qu'il n'y a qu'une seule valeur possible de rmn.

<u>2^e cas : $z = 3$</u>
Dans ce cas-ci, $rmn = 7^3$, donc il n'y a qu'une seule valeur possible de rmn.

<u>3^e cas : $y = 2$ et $z = 1$</u>
Dans ce cas-ci, il doit exister deux 5 et un 7 dans r, m, n.
Autrement dit, rmn doit être égal à $5^2 \times 7$.
Cela signifie qu'il n'y a qu'une seule valeur possible de rmn.

<u>4^e cas : $y = 1$ et $z = 2$</u>
Dans ce cas-ci, rmn doit être égal à 5×7^2.
Cela signifie qu'il n'y a qu'une seule valeur possible de rmn.

<u>5^e cas : $y = 2$ et $z = 0$</u>
Dans ce cas-ci, il doit exister deux 5 dans r,m,n et le troisième chiffre ne peut être ni 5 ni 7.
Cela signifie que les valeurs possibles du troisième chiffre sont $2, 3, 4, 6, 8, 9$.
Cela signifie qu'il y a 6 valeurs possibles de rmn dans ce cas.

<u>6^e cas : $y = 0$ et $z = 2$</u>
Comme dans le cas précédent, il y a 6 valeurs possibles de rmn.

<u>7^e cas : $y = 1$ et $z = 1$</u>
Dans ce cas-ci, il doit exister un 5 et un 7 dans r,m,n, tandis que le troisième chiffre est un chiffre de l'ensemble 2,3,4,6,8,9.
Cela signifie qu'il y a 6 valeurs possibles de rmn dans ce cas.

<u>8^e cas : $y = 1$ et $z = 0$</u>
Dans ce cas-ci, il doit exister un 5 dans r,m,n, de plus, aucun des chiffres n'est égal à 7. Supposons que $r = 5$.
m et n valent chacun un chiffre parmi les chiffres de l'ensemble $2, 3, 4, 6, 8, 9$.
On crée une table de multiplication afin de déterminer les valeurs possibles de mn :

$\times$	2	3	4	6	8	9
2	4	6	8	12	16	18
3	6	9	12	18	24	27
4	8	12	16	24	32	36
6	12	18	24	36	48	54
8	16	24	32	48	64	72
9	18	27	36	54	72	81

On retrouve 16 différentes valeurs dans le tableau, soit :

$$4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27, 32, 36, 48, 54, 64, 72, 81$$

Il y a donc 16 valeurs possibles de rmn dans ce cas.

<u>9^e cas : $y = 0$ et $z = 1$</u>
Comme dans le cas précédent, il y a 16 valeurs possibles de rmn.

<u>10^e cas : $y = 0$ et $z = 0$</u>
Dans ce cas-ci, aucun des chiffres dans r,m,n n'est un 5 ni un 7.
Donc r,m,n valent chacun un chiffre parmi les chiffres de l'ensemble $2, 3, 4, 6, 8, 9$.
Cela signifie que les seuls facteurs premiers possibles de rmn sont 2 et 3.
Chacun des chiffres de l'ensemble $2, 3, 4, 6, 8, 9$ comprend au plus 2 facteurs de 3 et seulement le chiffre 9 comprend 2 facteurs de 3.
Cela signifie que rmn comprend au plus 6 facteurs de 3.
Soit w le nombre de facteurs de 3 dans rmn.

- Si $w = 6$, donc $r = m = n = 9$, d'où $rmn = 9^3$. Dans ce cas, il n'y a qu'une seule valeur de rmn.
- Si $w = 5$, donc il doit y avoir deux 9 dans r,m,n et le troisième chiffre est soit 3 ou 6. Cela signifie que $rmn = 9^2 \times 3$ ou $rmn = 9^2 \times 6$. Dans ce cas, il y a deux valeurs possibles de rmn.
- Si $w = 4$, deux cas se présentent : dans le premier cas il y a deux 9 dans r,m,n et le troisième chiffre ne comprend pas un facteur de 3, tandis que dans le deuxième cas il y a un seul 9 dans r,m,n et les deuxième et troisième chiffres sont chacun 3 ou 6.
  Donc, rmn peut être égal à $9^2 \times 2$, $9^2 \times 4$, $9^2 \times 8$, $9 \times 3 \times 3$, $9 \times 3 \times 6$ ou $9 \times 6 \times 6$.
  Il y a des répétitions dans cette liste et donc les valeurs de rmn sont 9^2, $9^2 \times 2$, $9^2 \times 4$, $9^2 \times 8$.
  Dans ce cas, il y a quatre valeurs possibles de rmn.

- Si $w = 3$, parmi les trois chiffres dans r,m,n, un peut être égal à 9, un autre peut être égal à soit 3 ou 6, et le dernier peut être égal à 2, à 4 ou à 8. Sinon, chacun des trois chiffres pourrait être égal à 3 ou à 6.
  Dans le premier cas, rmn peut être $9 \times 3 \times 2$, $9 \times 3 \times 4$, $9 \times 3 \times 8$, $9 \times 6 \times 2$, $9 \times 6 \times 4$, $9 \times 6 \times 8$.
  On peut réécrire ceux-ci de la forme 27×2^1, 27×2^2, 27×2^3, 27×2^4.
  Dans le deuxième cas, rmn peut être $3 \times 3 \times 3$, $3 \times 3 \times 6$, $3 \times 6 \times 6$, $6 \times 6 \times 6$.
  On peut réécrire ceux-ci de la forme 27, 27×2^1, 27×2^2, 27×2^3.
  En combinant nos listes, on a 27, 27×2^1, 27×2^2, 27×2^3, 27×2^4.
  Donc, à partir de ces deux cas, on obtient 5 valeurs possibles de rmn.
- Si $w = 2$, deux cas se présentent : soit un des chiffres r,m,n est égal à 9, soit deux des chiffres r,m,n égalent 3 ou 6.
  Dans le premier cas, les deux autres chiffres dans r,m,n égalent 2, 4 ou 8.
  On remarque que $2 = 2^1$, que $4 = 2^2$ et que $8 = 2^3$.
  Donc rmn contient au moins deux facteurs de 2 (par exemple, $rmn = 9 \times 2 \times 2$) et contient au plus six facteurs de 2 ($rmn = 9 \times 8 \times 8$).
  Si deux chiffres dans r,m,n égalent 3 ou 6, alors le troisième chiffre est égal à 2, à 4 ou à 8.
  Donc, rmn contient au moins un facteur de 2 ($rmn = 3 \times 3 \times 2$) et au plus cinq facteurs de 2 ($rmn = 6 \times 6 \times 8$).
  En combinant les résultats des deux cas, rmn peut être égal à $9 \times 2, 9 \times 2^2, \ldots, 9 \times 2^6$, donc il y a 6 valeurs possibles de rmn.
- Si $w = 1$, donc un des chiffres dans r,m,n est égal à 3 ou à 6 tandis que les deux autres égalent 2, 4 ou 8.
  Donc, rmn peut contenir au plus sept facteurs de 2 ($rmn = 6 \times 8 \times 8$) et doit contenir au moins deux facteurs de 2 ($rmn = 3 \times 2 \times 2$).
  Chacun des nombres de facteurs de 2 compris entre 2 et 7 (y compris 2 et 7) est possible. Il y a donc 6 valeurs possibles de rmn.
- Si $w = 0$, donc aucun des chiffres dans r,m,n ne peut être égal à 3, à 6 ou à 9.
  Ainsi, chacun des chiffres dans r,m,n est égal à 2^1, à 2^2 ou à 2^3.
  Alors rmn doit être une puissance de 2 et doit comprendre au moins trois facteurs de 2 et au plus neuf facteurs de 2. Puisque ces cas sont tous possibles, il y a donc 7 valeurs possibles de rmn.

Au total, le nombre de valeurs possibles de rmn (et donc de rst) est

$$2 \times 1 + 2 \times 1 + 2 \times 6 + 6 + 2 \times 16 + (1 + 2 + 4 + 5 + 6 + 6 + 7)$$

ce qui est égal à 85.

Réponse : (A)

25. Supposons que $PQ = a$, que $PS = b$ et que $PU = c$.
Puisque $PQRSTUVW$ est un prisme rectangulaire, donc $QR = PS = b$ et $ST = QV = PU = c$.
À l'aide du théorème de Pythagore, $PR^2 = PQ^2 + QR^2$, d'où $1867^2 = a^2 + b^2$.
À l'aide du théorème de Pythagore, $PV^2 = PQ^2 + QV^2$, d'où $2019^2 = a^2 + c^2$.
À l'aide du théorème de Pythagore, $PT^2 = PS^2 + ST^2$, d'où $x^2 = b^2 + c^2$.
En additionnant ces trois équations, on obtient

$$\begin{aligned} 1867^2 + 2019^2 + x^2 &= (a^2 + b^2) + (a^2 + c^2) + (b^2 + c^2) \\ 1867^2 + 2019^2 + x^2 &= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \\ a^2 + b^2 + c^2 &= \frac{1867^2 + 2019^2 + x^2}{2} \end{aligned}$$

Puisque $a^2 + b^2 = 1867^2$, donc

$$c^2 = (a^2 + b^2 + c^2) - (a^2 + b^2) = \frac{1867^2 + 2019^2 + x^2}{2} - 1867^2 = \frac{-1867^2 + 2019^2 + x^2}{2}$$

Puisque $a^2 + c^2 = 2019^2$, donc

$$b^2 = (a^2 + b^2 + c^2) - (a^2 + c^2) = \frac{1867^2 + 2019^2 + x^2}{2} - 2019^2 = \frac{1867^2 - 2019^2 + x^2}{2}$$

Puisque $b^2 + c^2 = x^2$, donc

$$a^2 = (a^2 + b^2 + c^2) - (b^2 + c^2) = \frac{1867^2 + 2019^2 + x^2}{2} - x^2 = \frac{1867^2 + 2019^2 - x^2}{2}$$

Puisque a, b et c sont les longueurs des arêtes du prisme, alors $a, b, c > 0$.
Puisque $a^2 > 0$, alors $\frac{1867^2 + 2019^2 - x^2}{2} > 0$, d'où $1867^2 + 2019^2 - x^2 > 0$ ou $x^2 < 2019^2 + 1867^2$.
Puisque $b^2 > 0$, alors $\frac{1867^2 - 2019^2 + x^2}{2} > 0$, d'où $1867^2 - 2019^2 + x^2 > 0$ ou $x^2 > 2019^2 - 1867^2$.
Puisque $c^2 > 0$, alors $\frac{-1867^2 + 2019^2 + x^2}{2} > 0$, d'où $-1867^2 + 2019^2 + x^2 > 0$. Cela signifie que $x^2 > 1867^2 - 2019^2$.
Puisque le côté droit de cette inégalité est négatif et que le côté gauche n'est pas négatif, cette inégalité sera toujours vraie.
Donc, il doit être vrai que $2019^2 - 1867^2 < x^2 < 2019^2 + 1867^2$.
Puisque les trois parties de cette inégalité sont positives, donc $\sqrt{2019^2 - 1867^2} < x < \sqrt{2019^2 + 1867^2}$.
Puisque $\sqrt{2019^2 - 1867^2} \approx 768{,}55$, que $\sqrt{2019^2 + 1867^2} \approx 2749{,}92$ et que x est un entier, donc $769 \leq x \leq 2749$.
Il y a $2749 - 769 + 1 = 1981$ entiers x dans cette étendue.
Toute telle valeur de x donne des valeurs positives aux expressions a^2, b^2 et c^2 et donc des valeurs positives à a, à b et à c ; autrement dit, on en obtient un prisme rectangulaire $PQRSTUVW$ dont les diagonales des faces correspondent à celles indiquées dans la question.
Il existe donc 1981 tels entiers x.

RÉPONSE : (E)