Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur 2019

le mercredi 20 novembre 2019
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 21 novembre 2019
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

Partie A

1. Puisque Zipporah a 7 ans, et puisque la somme des âges de Zipporah et Dina est de 51 ans, alors Dina a $51 - 7 = 44$ ans.
   Puisque Dina a 44 ans, et puisque la somme des âges de Julio et Dina est de 54, alors Julio a $54 - 44 = 10$ ans.

   RÉPONSE : 10

2. Puisque la piste circulaire a un rayon de 60 m, elle a donc une circonférence de $2\pi \cdot 60$ m, soit 120π m.
   Puisque Ali court sur cette piste à une vitesse constante de 6 m/s, il lui faudra $\dfrac{120\pi \text{ m}}{6 \text{ m/s}} = 20\pi$ s afin de compléter un tour.
   Puisque Ali et Darius prennent le même montant de temps pour compléter chacun un tour de leur piste, alors Darius complétera également un tour de sa piste en 20π s.
   Puisque Darius court à une vitesse constante de 5 m/s, alors sa piste a une longueur de $20\pi \text{ s} \cdot 5 \text{ m/s}$, soit 100π m.
   Puisque la piste de Darius est en forme de triangle équilatéral ayant des côtés de longueur x m, alors son périmètre est égal à $3x$ m, d'où $3x \text{ m} = 100\pi$ m ou $x = \frac{100\pi}{3}$.

   RÉPONSE : $x = \frac{100\pi}{3}$

3. Puisque $2^a \cdot 2^b = 2^{a+b}$, alors

$$\begin{aligned}
32^n &= 2^{200} \cdot 2^{203} + 2^{163} \cdot 2^{241} + 2^{126} \cdot 2^{277} \\
&= 2^{200+203} + 2^{163+241} + 2^{126+277} \\
&= 2^{403} + 2^{404} + 2^{403} \\
&= 2^{403} + 2^{403} + 2^{404}
\end{aligned}$$

   Puisque $2^c + 2^c = 2(2^c) = 2^1 \cdot 2^c = 2^{c+1}$, alors

$$\begin{aligned}
32^n &= 2^{403+1} + 2^{404} \\
&= 2^{404} + 2^{404} \\
&= 2^{404+1} \\
&= 2^{405}
\end{aligned}$$

   Puisque $(2^d)^e = 2^{de}$, alors $32^n = (2^5)^n = 2^{5n}$.
   Puisque $32^n = 2^{405}$, alors $2^{5n} = 2^{405}$ d'où $5n = 405$ ou $n = 81$.

   RÉPONSE : $n = 81$

4. Afin qu'un couple d'entiers (x, y) puisse vérifier $x^2 \leq y \leq x + 6$, on doit avoir $x^2 \leq x + 6$, d'où $x^2 - x - 6 \leq 0$.
   Puisque $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$, alors on a $x^2 - x - 6 \leq 0$ uniquement lorsque $-2 \leq x \leq 3$. (Si l'on considère la fonction $f(x) = (x - 3)(x + 2)$ dont la représentation graphique est une parabole ouverte vers le haut, ses valeurs sont inférieures ou égales à 0 dans l'intervalle entre ses racines.)
   Donc, tout couple d'entiers (x,y) qui vérifie $x^2 \leq y \leq x + 6$ doit avoir $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ comme valeurs possibles de x.
   Lorsque $x = -2$, l'inéquation de départ prend la forme $4 \leq y \leq 4$, d'où y doit être égal à 4. Il y a donc 1 seul couple dans ce cas, soit $(-2, 4)$.
   Lorsque $x = -1$, l'inéquation de départ prend la forme $1 \leq y \leq 5$, d'où y doit être égal à l'une

des valeurs suivantes : 1, 2, 3, 4, 5. Il y a donc 5 couples dans ce cas.
Lorsque $x = 0$, l'inéquation de départ prend la forme $0 \leq y \leq 6$, d'où y doit être égal à l'une des valeurs suivantes : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Il y a donc 7 couples dans ce cas.
Lorsque $x = 1$, l'inéquation de départ prend la forme $1 \leq y \leq 7$. Il y a donc 7 couples dans ce cas.
Lorsque $x = 2$, l'inéquation de départ prend la forme $4 \leq y \leq 8$. Il y a donc 5 couples dans ce cas.
Lorsque $x = 3$, l'inéquation de départ prend la forme $9 \leq y \leq 9$, d'où y doit être égal à 9. Il y a donc 1 seul couple dans ce cas.
En tout, il y a donc $1 + 5 + 7 + 7 + 5 + 1 = 26$ couples d'entiers qui vérifient l'inéquation.

Réponse : 26

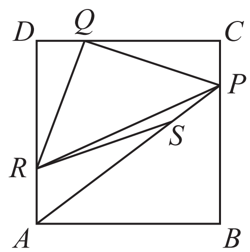
5. Dans le triangle rectangle, le côté de longueur 605 est ni le plus court ni le plus long. On suppose donc que le triangle rectangle a des côtés de longueurs $a, 605$ et c, où a et c sont des entiers qui satisfont à $a < 605 < c$. (Pourquoi n'est-il pas nécessaire de considérer les cas $a = 605$ ou $605 = c$?)
D'après le théorème de Pythagore, et sachant que c (la mesure du plus grand côté) doit être la longueur de l'hypoténuse, on obtient $a^2 + 605^2 = c^2$, d'où $c^2 - a^2 = 605^2$.
On veut déterminer la longueur maximale du côté le plus court du triangle.
Autrement dit, on veut déterminer la longueur maximale de a sans que celle-ci dépasse une valeur de 605.
On remarque que $c^2 - a^2 = 605^2$ uniquement lorsque $(c + a)(c - a) = 605^2$.
On remarque aussi que $605 = 5 \cdot 121 = 5 \cdot 11^2$, d'où $605^2 = 5^2 \cdot 11^4$.
On a ainsi $(c+a)(c-a) = 5^2 \cdot 11^4$, d'où $c+a$ et $c-a$ doivent donc être un couple de diviseurs de $5^2 \cdot 11^4$.
Puisque a et c sont des entiers strictement positifs, alors $c+a > c-a$. On remarque que $c > a$, donc $c + a > c - a > 0$.
On dresse la liste des valeurs possibles de $c+a$ et de $c-a$ dans le tableau ci-dessous afin d'en déterminer les valeurs possibles de c et de a

$c + a$	$c - a$	$2c = (c + a) + (c - a)$	c	$a = (c + a) - c$
$5^2 \cdot 11^4 = 366025$	1	366026	183013	103012
$5 \cdot 11^4 = 73205$	5	73210	36605	36600
$5^2 \cdot 11^3 = 33275$	11	33286	16643	16632
$11^4 = 14641$	$5^2 = 25$	14666	7333	7308
$5 \cdot 11^3 = 6655$	$5 \cdot 11 = 55$	6710	3355	3300
$5^2 \cdot 11^2 = 3025$	$11^2 = 121$	3146	1573	1452
$11^3 = 1331$	$5^2 \cdot 11 = 275$	1606	803	528
$5 \cdot 11^2 = 605$	$5 \cdot 11^2 = 605$	1210	605	0

Voici donc toutes les factorisations possibles de 605^2 d'où on obtient tous les couples d'entiers (a, c) possibles qui vérifient l'équation.
Donc, la valeur maximale possible de a qui est inférieure à 605 est de 528.

Réponse : 528

6. Puisque le carré $ABCD$ a des côtés de longueur 4, il a donc une aire de 4^2, soit 16.
L'aire du quadrilatère $PQRS$ est une expression exprimée en fonction de k qui est égale à l'aire du carré $ABCD$ moins celles des triangles ABP, PCQ, QDR et ARS.
Puisque $\dfrac{BP}{PC} = \dfrac{k}{4-k}$, il existe un nombre réel x tel que $BP = kx$ et $PC = (4-k)x$.
Puisque $BP + PC = BC = 4$, donc $kx + (4-k)x = 4$, d'où $4x = 4$ ou $x = 1$.
Donc, $BP = k$ et $PC = 4 - k$.
De même, $CQ = DR = k$ et $QD = RA = 4 - k$.
Le triangle ABP est rectangle en B et a donc une aire égale à $\frac{1}{2}(AB)(BP) = \frac{1}{2}(4k) = 2k$.
Le triangle PCQ est rectangle en C et a donc une aire égale à $\frac{1}{2}(PC)(CQ) = \frac{1}{2}(4-k)k$.
Le triangle QDA est rectangle en D et a donc une aire égale à $\frac{1}{2}(QD)(DR) = \frac{1}{2}(4-k)k$.
On détermine l'aire du triangle ARS en reliant d'abord R et P.



On considère donc que le triangle ARP a une base de $RA = 4 - k$ et une hauteur égale à la distance entre les droites parallèles CB et DA, soit une hauteur de 4.
Donc, l'aire du triangle ARP est égale à $\frac{1}{2}(4-k)(4)$.
On considère maintenant que la base AP du triangle ARP est séparée par le point S en deux segments dont les longueurs ont un rapport de $k : (4-k)$.
Le rapport $AS : AP$ est donc égal à $k : ((4-k)+k)$, soit $k : 4$.
Donc, l'aire du triangle ARS est égale à $\dfrac{k}{4}$ fois l'aire du triangle ARP. (Puisque les deux triangles ont la même hauteur, soit la distance de R à AP, alors le rapport de leurs aires est égal à celui de leurs bases.)
Donc, l'aire du triangle ARS est égale à $\dfrac{\frac{1}{2}(4-k)(4)\cdot k}{4} = \frac{1}{2}k(4-k)$.
Ainsi, l'aire du quadrilatère $PQRS$ est égale à

$$\begin{aligned} 16 - 2k - 3\cdot\tfrac{1}{2}k(4-k) &= 16 - 2k - \tfrac{3}{2}\cdot 4k + \tfrac{3}{2}k^2 \\ &= \tfrac{3}{2}k^2 - 2k - 6k + 16 \\ &= \tfrac{3}{2}k^2 - 8k + 16 \end{aligned}$$

Quand $a > 0$, la fonction quadratique $f(t) = at^2 + bt + c$ atteint sa valeur minimale lorsque $t = -\dfrac{b}{2a}$ d'où $\frac{3}{2}k^2 - 8k + 16$ atteint donc sa valeur minimale lorsque $k = -\frac{-8}{2(3/2)} = \frac{8}{3}$.
Donc, la valeur de k qui minimiserait l'aire du quadrilatère $PQRS$ est égale à $\frac{8}{3}$.

Réponse : $k = \frac{8}{3}$

Partie B

1. (a) Puisque Rachel fait des sauts de 168 cm chacun, en sautant 5 fois, elle a sauté une distance totale de 5×168 cm $= 840$ cm.
Puisque Joel fait des sauts de 120 cm chacun, en sautant n fois, il a sauté une distance totale de $120n$ cm.
Puisque Rachel et Joel ont chacun sauté la même distance ce jour-là, alors $120n = 840$ d'où $n = 7$.

(b) Puisque Joel fait des sauts de 120 cm chacun, en sautant r fois, il a sauté une distance totale de $120r$ cm.
Puisque Mark fait des sauts de 72 cm chacun, en sautant t fois, il a sauté une distance totale de $72t$ cm.
Puisque Joel et Mark ont chacun sauté la même distance ce jour-là, alors $120r = 72t$, d'où on obtient $5r = 3t$ en divisant les deux membres par 24.
Puisque $5r$ est un multiple de 5, $3t$ doit aussi être un multiple 5, d'où t est donc un multiple de 5.
Puisque t est un multiple de 5 qui satisfait à $11 \leq t \leq 19$, alors $t = 15$.
Puisque $t = 15$, alors $5r = 3 \cdot 15 = 45$, d'où $r = 9$.
Donc, $r = 9$ et $t = 15$.

(c) Lorsque Rachel fait a sauts, elle saute une distance totale de $168a$ cm.
Lorsque Joel fait b sauts, il saute une distance totale de $120b$ cm.
Lorsque Mark fait c sauts, il saute une distance totale de $72c$ cm.
Puisque Rachel, Joel et Mark ont chacun sauté la même distance ce jour-là, alors $168a = 120b = 72c$.
En divisant les membres par 24, on obtient $7a = 5b = 3c$.
Puisque $7a$ est divisible par 7, alors $3c$ est divisible par 7, d'où c est donc divisible par 7.
Puisque $5b$ est divisible par 5, alors $3c$ est divisible par 5, d'où c est donc divisible par 5.
Puisque c est divisible par 5 et 7, et puisque 5 et 7 n'admettent aucun diviseur commun supérieur à 1, alors c doit être divisible par $5 \cdot 7$, soit 35.
Puisque c est un entier strictement positif qui est divisible par 35, alors $c \geq 35$.
Or, si $c = 35$, alors $3c = 105$, donc $7a = 5b = 105$ d'où $a = 15$ et $b = 21$. Autrement dit, on peut avoir $c = 35$.
Donc, la valeur minimale possible de c est de 35.

2. (a) Afin que la suite $\frac{1}{w}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ soit une suite arithmétique, on doit avoir

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{w} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{3}$$

Puisque $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$, alors $\frac{1}{2} - \frac{1}{w} = -\frac{1}{6}$, d'où $\frac{1}{w} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ ou $w = \frac{3}{2}$.

(b) La suite $\frac{1}{y+1}$, x, $\frac{1}{z+1}$ est une suite arithmétique uniquement lorsque $x - \frac{1}{y+1} = \frac{1}{z+1} - x$ ou $2x = \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}$.

Puisque $y, 1, z$ est une suite géométrique, alors $\frac{1}{y} = \frac{z}{1}$, d'où $z = \frac{1}{y}$. Puisque y et z sont positifs, alors $y \neq -1$ et $z \neq -1$.

Dans ce cas, $\frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = \frac{1}{y+1} + \frac{1}{\frac{1}{y}+1} = \frac{1}{y+1} + \frac{y}{1+y} = \frac{y+1}{y+1} = 1$.

Puisque $\frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = 1$, alors la suite $\frac{1}{y+1}$, x, $\frac{1}{z+1}$ est une suite arithmétique uniquement lorsque $2x = 1$ ou $x = \frac{1}{2}$.

(c) Puisque a, b, c, d est une suite géométrique, alors $b = ar$, $c = ar^2$ et $d = ar^3$, r étant un nombre réel quelconque. Puisque $a \neq b$, alors $a \neq 0$. (Si $a = 0$, alors $b = 0$.)

Puisque $a \neq b$, alors $r \neq 1$. On remarque que $\frac{b}{a} = \frac{ar}{a} = r$. Donc, il faut déterminer toutes les valeurs possibles de r.

Puisque a et b sont tous les deux positifs, alors $r > 0$.

Puisque $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{d}$ est une suite arithmétique, alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b} - \frac{1}{a} &= \frac{1}{d} - \frac{1}{b} \\
\frac{1}{ar} - \frac{1}{a} &= \frac{1}{ar^3} - \frac{1}{ar} \\
\frac{1}{r} - 1 &= \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r} \qquad \text{(car } a \neq 0\text{)} \\
r^2 - r^3 &= 1 - r^2 \\
0 &= r^3 - 2r^2 + 1 \\
0 &= (r-1)(r^2 - r - 1)
\end{aligned}$$

Puisque $r \neq 1$, alors $r^2 - r - 1 = 0$.

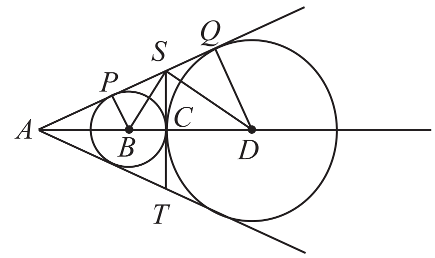
D'après la formule quadratique, $r = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Puisque a et b sont tous les deux positifs, alors $r > 0$. Donc, $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Voici donc la seule valeur possible de r.

On peut vérifier que r satisfait aux conditions en prenant, par exemple, $a = 1$ et $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, d'où on a donc $b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $c = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$ et $d = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3$. Donc, on obtient effectivement $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{d} - \frac{1}{b}$.

3. (a) Puisque $AS = ST = AT$, alors AST est un triangle équilatéral.
Donc, $\angle TAS = \angle AST = \angle ATS = 60^\circ$.
On relie les points B et P, B et S, D et Q, et D et S.



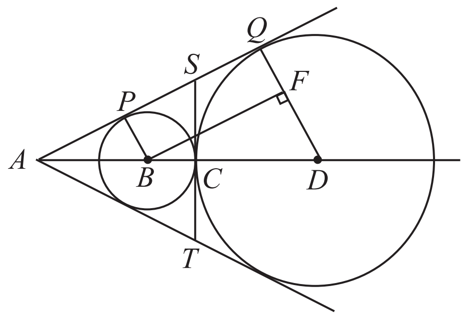
Puisque AS est tangent au cercle de centre B en P, alors BP est perpendiculaire à PS.
Puisque BP et BC sont les rayons du cercle de centre B, alors $BP = BC = 1$.
On considère les triangles SBP et SBC.
Les deux triangles sont respectivement rectangles en P et en C. De plus, ils partagent une même hypoténuse (BS) et ont des côtés de même longueur ($BP = BC$).
Donc, les triangles SBP et SBC sont isométriques.
Donc, $\angle PSB = \angle CSB = \frac{1}{2}\angle AST = 30^\circ$.
Le triangle SBC est donc un triangle remarquable 30°-60°-90°, d'où on a alors $SC = \sqrt{3}BC = \sqrt{3}$.
Puisque $\angle CSQ = 180^\circ - \angle CSP = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, alors d'après un argument semblable, le triangle DSC est aussi un triangle remarquable 30°-60°-90°.
Donc, $CD = \sqrt{3}SC = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$.
Puisque CD est égal au rayon du cercle de centre D, alors $r = CD = 3$.

(b) *Solution 1*
D'après les renseignements fournis, $DQ = QP = r$.
On procède d'abord en reliant les points B et P, B et S, D et Q, et D et S.
Comme dans la partie (a), les triangles SBP et SBC sont isométriques, d'où $SP = SC$.
D'après un argument semblable, les triangles SDC et SDQ sont aussi isométriques, d'où $SC = SQ$.
Puisque $SP = SC$ et $SC = SQ$, alors $SP = SQ$.
Puisque $QP = r$, donc $SP = SQ = \frac{1}{2}r$.
Supposons que $\angle PSC = 2\theta$.
Puisque les triangles SBP et SBC sont isométriques, alors $\angle PSB = \angle CSB = \frac{1}{2}\angle PSC = \theta$.
Puisque $\angle QSC = 180^\circ - \angle PSC = 180^\circ - 2\theta$, alors $\angle QSD = \angle CSD = \frac{1}{2}\angle QSC = 90^\circ - \theta$.
Puisque le triangle SDQ est rectangle en Q, alors

$$\angle SDQ = 90^\circ - \angle QSD = \theta$$

Donc, les triangles SBP et DSQ sont semblables.
Donc, à partir de $\dfrac{SP}{BP} = \dfrac{DQ}{SQ}$ on a $\dfrac{\frac{1}{2}r}{1} = \dfrac{r}{\frac{1}{2}r} = 2$, d'où $\frac{1}{2}r = 2$ ou $r = 4$.

Solution 2
D'après les renseignements fournis, $DQ = QP = r$.
On relie les points B et P et les points D et Q. Comme dans la partie (a), BP et DQ sont perpendiculaires à PQ.
On relie les points B et F, F étant un point situé sur QD, de manière que BF soit perpendiculaire à QD.



Donc, le triangle BFD est rectangle en F.
De surcroît, puisque $BPQF$ a trois angles droits, il en découle que son quatrième angle est aussi un angle droit, d'où $BPQF$ est donc un rectangle.
Donc, $BF = PQ = r$ et $QF = PB = 1$.
Puisque $QD = r$, alors $FD = r - 1$.
De plus, $BD = BC + CD = 1 + r$.
D'après le théorème de Pythagore, on obtient les équations équivalentes suivantes pour le triangle BFD :

$$\begin{aligned} BF^2 + FD^2 &= BD^2 \\ r^2 + (r-1)^2 &= (r+1)^2 \\ r^2 + r^2 - 2r + 1 &= r^2 + 2r + 1 \\ r^2 &= 4r \end{aligned}$$

Puisque $r \neq 0$, donc $r = 4$.

(c) Comme dans la Solution 1 de la partie (b), les triangles SBP et DSQ sont semblables, d'où $SP = SQ$. Donc, $\dfrac{SP}{BP} = \dfrac{DQ}{SQ}$ ou $\dfrac{SP}{1} = \dfrac{r}{SP}$, d'où $SP^2 = r$ ou $SP = \sqrt{r}$.

Donc, $SP = SQ = SC = \sqrt{r}$.

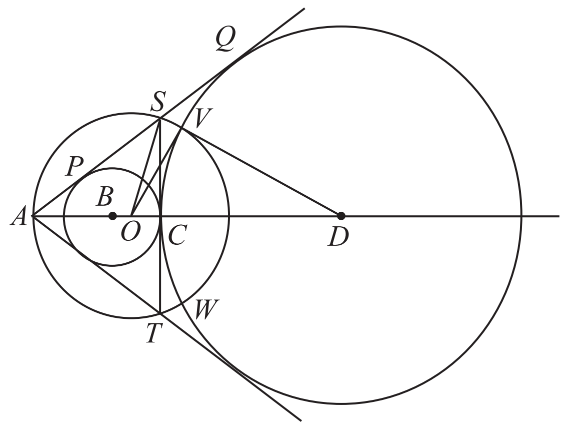
Ensuite, les triangles APB et AQD sont semblables puisqu'ils partagent le même sommet A et ont tous les deux un angle droit.

Donc, $\dfrac{AB}{BP} = \dfrac{AD}{DQ}$, d'où $\dfrac{AB}{1} = \dfrac{AB+BD}{r}$ ou $AB = \dfrac{AB+1+r}{r}$.

On récrit cette équation sous la forme $rAB = AB + 1 + r$, d'où $(r-1)AB = r+1$ ou $AB = \dfrac{r+1}{r-1}$.

Donc, $AC = AB + BC = AB + 1 = \dfrac{r+1}{r-1} + 1 = \dfrac{(r+1)+(r-1)}{r-1} = \dfrac{2r}{r-1}$.

Ensuite, on dessine le cercle de centre O qui passe aux points A, S et T et qui coupe le cercle de centre D en point V de manière que OV soit perpendiculaire à DV.



Soit R le rayon de ce cercle. On remarque que $OS = AO = R$.

On considère le triangle OSC.

Ce triangle est rectangle en C.

D'après le théorème de Pythagore, on obtient les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}
OS^2 &= OC^2 + SC^2 \\
R^2 &= (AC - AO)^2 + SC^2 \\
R^2 &= (AC - R)^2 + SC^2 \\
R^2 &= AC^2 - 2R \cdot AC + R^2 + SC^2 \\
2R \cdot AC &= AC^2 + SC^2 \\
R &= \frac{AC}{2} + \frac{SC^2}{2AC} \\
R &= \frac{2r}{2(r-1)} + \frac{(\sqrt{r})^2}{4r/(r-1)} \\
R &= \frac{r}{r-1} + \frac{r-1}{4}
\end{aligned}$$

Puisque OV est perpendiculaire à DV, alors le triangle OVD est rectangle en V.

On remarque que $OV = R$ et $DV = r$. D'après le théorème de Pythagore, on obtient les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}
OV^2 + DV^2 &= OD^2 \\
R^2 + r^2 &= (OC + CD)^2 \\
R^2 + r^2 &= (AC - AO + CD)^2 \\
R^2 + r^2 &= \left(\frac{2r}{r-1} - R + r\right)^2 \\
R^2 + r^2 &= \left(\frac{2r + r(r-1)}{r-1} - R\right)^2 \\
R^2 + r^2 &= \left(\frac{r^2 + r}{r-1} - R\right)^2 \\
R^2 + r^2 &= \left(\frac{r^2 + r}{r-1}\right)^2 - 2R\left(\frac{r^2 + r}{r-1}\right) + R^2 \\
2R\left(\frac{r^2 + r}{r-1}\right) &= \left(\frac{r^2 + r}{r-1}\right)^2 - r^2 \\
2R\left(\frac{r(r+1)}{r-1}\right) &= \frac{r^2(r+1)^2}{(r-1)^2} - r^2 \\
2R &= \frac{r-1}{r(r+1)} \cdot \frac{r^2(r+1)^2}{(r-1)^2} - \frac{r-1}{r(r+1)} \cdot r^2 \\
2R &= \frac{r(r+1)}{r-1} - \frac{r(r-1)}{r+1}
\end{aligned}$$

Puisque $R = \dfrac{r}{r-1} + \dfrac{r-1}{4}$, donc :

$$\frac{2r}{r-1} + \frac{r-1}{2} = \frac{r(r+1)}{r-1} - \frac{r(r-1)}{r+1}$$

On multiplie les deux membres de l'équation par $2(r+1)(r-1)$. Ensuite, en développant, en simplifiant et en factorisant, on obtient les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}
4r(r+1) + (r-1)^2(r+1) &= 2r(r+1)^2 - 2r(r-1)^2 \\
(4r^2 + 4r) + (r-1)(r^2-1) &= 2r((r+1)^2 - (r-1)^2) \\
(4r^2 + 4r) + (r^3 - r^2 - r + 1) &= 2r((r^2 + 2r + 1) - (r^2 - 2r + 1)) \\
(4r^2 + 4r) + (r^3 - r^2 - r + 1) &= 2r(4r) \\
r^3 - 5r^2 + 3r + 1 &= 0 \\
(r-1)(r^2 - 4r - 1) &= 0
\end{aligned}$$

On sait que $r \neq 1$. (Si $r = 1$, les deux cercles seraient de même taille et les deux tangentes communes seraient parallèles.)
Donc, $r \neq 1$ d'où $r^2 - 4r - 1 = 0$.
D'après la formule quadratique,

$$r = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$$

Puisque $r > 1$, donc $r = 2 + \sqrt{5}$.