



Le CENTRE d'ÉDUCATION en  
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

*cemc.uwaterloo.ca*

# Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur

le mercredi 20 novembre 2019

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 21 novembre 2019

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)



UNIVERSITY OF  
**WATERLOO**

Durée : 2 heures

©2019 University of Waterloo

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Le questionnaire est divisé en deux parties. Dans chaque partie, les questions sont à peu près en ordre croissant de difficulté. Les premiers problèmes de la partie B sont probablement plus faciles que les derniers de la partie A.

## **PARTIE A**

1. Cette partie est composée de six questions de 5 points chacune.
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse.** Le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

## **PARTIE B**

1. Cette partie est composée de trois questions de 10 points chacune.
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse.** Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Inscrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille insérée.
3. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

**À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.**

---

*Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.*

---

*Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, et le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au [cemc.uwaterloo.ca](http://cemc.uwaterloo.ca). Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.*

## **Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur**

Remarques :

1. Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Incrire toutes les solutions dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple,  $\pi + 1$  et  $1 - \sqrt{2}$  sont des nombres exacts simplifiés.
4. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent être présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par  $y = x^3 - x$ , mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
5. Les figures ne sont pas dessinées à l'échelle. Elles servent d'aide seulement.
6. Aucun élève ne peut passer le Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur et le Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire la même année.

### **PARTIE A**

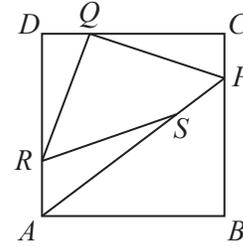
Pour chaque problème dans la partie A, le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée pour du travail pertinent inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

1. La somme des âges de Zipporah et Dina est de 51 ans. La somme des âges de Julio et Dina est de 54 ans. Zipporah a 7 ans. Quel est l'âge de Julio ?
2. Une piste circulaire a un rayon de 60 m. Ali court sur la piste circulaire à une vitesse constante de 6 m/s. Une autre piste en forme de triangle équilatéral a des côtés dont les longueurs sont de  $x$  m chacun. Darius court sur la piste triangulaire à une vitesse constante de 5 m/s. Ali et Darius prennent le même temps pour compléter chacun un tour de leur piste. Quelle est la valeur de  $x$  ?
3. Sachant que  $2^{200} \cdot 2^{203} + 2^{163} \cdot 2^{241} + 2^{126} \cdot 2^{277} = 32^n$ , quelle est la valeur de  $n$  ?
4. Combien de couples d'entiers  $(x,y)$  vérifient  $x^2 \leq y \leq x + 6$  ?
5. Un triangle rectangle a des côtés dont les longueurs sont des entiers et dont un des côtés a une mesure de 605. Parmi les côtés du triangle, ce côté est ni le plus court ni le plus long. Quelle est la longueur maximale possible du côté le plus court de ce triangle ?

6. Supposons qu'un carré  $ABCD$  a des côtés de longueur 4. Supposons aussi que  $0 < k < 4$ . Soit les points  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  et  $S$  situés respectivement sur  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  et  $AP$  de manière que

$$\frac{BP}{PC} = \frac{CQ}{QD} = \frac{DR}{RA} = \frac{AS}{SP} = \frac{k}{4-k}$$

Quelle est la valeur de  $k$  qui minimiserait l'aire du quadrilatère  $PQRS$ ?

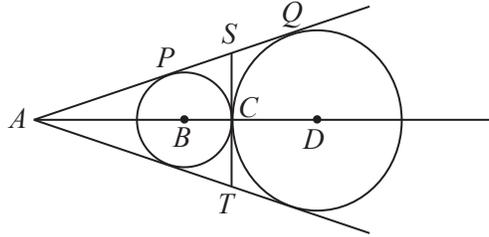


## PARTIE B

Pour chaque question dans la partie B, la solution doit être bien organisée et doit aussi présenter certains mots d'explication ou de justification. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

- Rachel fait des sauts de 168 cm chacun. Joel fait des sauts de 120 cm chacun. Mark fait des sauts de 72 cm chacun.
  - Lundi, Rachel fait 5 sauts et Joel fait  $n$  sauts. Au total, Rachel et Joel ont chacun sauté la même distance. Déterminer la valeur de  $n$ .
  - Mardi, Joel fait  $r$  sauts et Mark fait  $t$  sauts,  $r$  et  $t$  étant des entiers. Au total, Joel et Mark ont chacun sauté la même distance. Sachant que  $11 \leq t \leq 19$ , déterminer la valeur de  $r$  et de  $t$ .
  - Mercredi, Rachel fait  $a$  sauts, Joel fait  $b$  sauts et Mark fait  $c$  sauts,  $a$ ,  $b$  et  $c$  étant des entiers positifs. Au total, Rachel, Joel et Mark ont chacun sauté la même distance. Déterminer la valeur minimale possible de  $c$  et expliquer pourquoi cette valeur est bien la plus petite.
- Une *suite arithmétique* est une suite dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en ajoutant une constante au terme précédent. Par exemple, 3, 5, 7, 9 est une suite arithmétique de quatre termes.  
 Une *suite géométrique* est une suite numérique dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en multipliant le terme précédent par une constante. Par exemple, 3, 6, 12, 24 est une suite géométrique de quatre termes.
  - Déterminer un nombre réel  $w$  tel que  $\frac{1}{w}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$  soit une suite arithmétique.
  - Soit  $y, 1, z$  une suite géométrique où  $y$  et  $z$  sont tous les deux positifs. Déterminer tous les nombres réels  $x$  tels que  $\frac{1}{y+1}, x, \frac{1}{z+1}$  soit une suite arithmétique pour toutes telles valeurs de  $y$  et de  $z$ .
  - Soit  $a, b, c, d$  une suite géométrique et soit  $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{d}$  une suite arithmétique où  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  sont tous positifs et où  $a \neq b$ . Déterminer toutes les valeurs possibles de  $\frac{b}{a}$ .

3. Dans la figure ci-dessous, les cercles de centres  $B$  et  $D$  ont, respectivement, des rayons de 1 et de  $r$  et sont tangents en  $C$ . Le point  $B$  se trouve sur la droite qui passe par  $A$  et  $D$ . La droite qui passe par  $A$  et  $S$  est tangente aux cercles de centres  $B$  et  $D$  respectivement aux points  $P$  et  $Q$ . La droite qui passe par  $A$  et  $T$  est aussi tangente aux deux cercles. Le segment de droite  $ST$  est perpendiculaire à  $AD$  en  $C$  et est tangent aux deux cercles en  $C$ .



- (a) Il y a une valeur de  $r$  telle que  $AS = ST = AT$ . Déterminer cette valeur de  $r$ .
- (b) Il y a une valeur de  $r$  telle que  $DQ = QP$ . Déterminer cette valeur de  $r$ .
- (c) Un troisième cercle de centre  $O$  passe par  $A$ ,  $S$  et  $T$ , et coupe le cercle de centre  $D$  aux points  $V$  et  $W$ . Il y a une valeur de  $r$  telle que  $OV$  soit perpendiculaire à  $DV$ . Déterminer cette valeur de  $r$ .



Concours  
canadien de  
mathématiques  
de niveau  
supérieur  
2019  
(français)

